

云间八年级 2025 学年第一学期 12 月学情调研
2025 学年第一学期 12 月学情调研八年级数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

1. 下列选项正确的是 ()

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. -1 的算术平方根是 1 D. $\sqrt[3]{-125} = -5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方根、算术平方根和立方根的定义逐项分析判断即可.

【详解】A. $\sqrt{9} = 3$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

B. $\sqrt{(-2)^2} = 2$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

C. -1 没有算术平方根, 故该选项是错误的, 不符合题意;

D. $\sqrt[3]{-125} = -5$, 故该选项是正确的, 符合题意.

故选 D.

【点睛】本题考查了平方根、算术平方根和立方根的定义, 熟练掌握平方根、算术平方根和立方根的定义是解本题的关键.

2. 在下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{18}$ B. $\sqrt{x^2 - y^2}$ C. $\sqrt{ab^3}$ D. $\sqrt{\frac{m}{3}}$

【答案】B

【解析】

【分析】最简二次根式需满足被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式, 根据最简二次根式的概念逐项判断即可; 本题主要考查了最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的概念是解题的关键.

【详解】解: A: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$, 含平方因子 9, 非最简, 不符合题意;

B: $\sqrt{x^2 - y^2}$ 被开方数为多项式, 无平方因子且不含分母, 为最简二次根式, 符合题意;

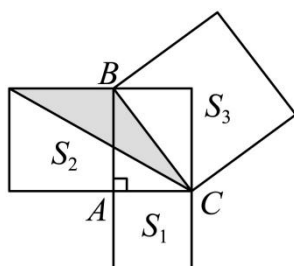
C: $\sqrt{ab^3} = \sqrt{a \cdot b^2 \cdot b} = |b|\sqrt{ab}$, 含平方因子 b^2 , 非最简, 不符合题意;

D: $\sqrt{\frac{m}{3}}$ 含分母，非最简，不符合题意；

故选: B.

3. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 分别以这个三角形的三边为边长向外侧作正方形, 面积分别记 S_1 , S_2 , S_3 . 若

$S_1 = 6$, $S_3 = 15$. 则图中阴影部分的面积为 ()



A. 6

B. 9

C. $\frac{9}{4}$

D. $\frac{9}{2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 由勾股定理可知 $S_1 + S_2 = S_3$, 即可求解.

本题考查了勾股定理, 掌握勾股定理是解题关键.

【详解】 由勾股定理可知 $AB^2 + AC^2 = BC^2$,

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3,$$

$$\therefore 6 + S_2 = 15,$$

$$\therefore S_2 = 9$$

$$\therefore \text{由图形可知, 阴影部分的面积为 } \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}.$$

故选: D.

4. 下列命题中, 假命题是 ()

A. 三角形三条边的垂直平分线的交点到三角形三个顶点的距离相等

B. 三角形三个内角的平分线的交点到三角形三条边的距离相等

C. 两腰对应相等的两个等腰三角形全等

D. 一条直角边和另一条直角边上的中线对应相等的两个直角三角形全等

【答案】 C

【解析】

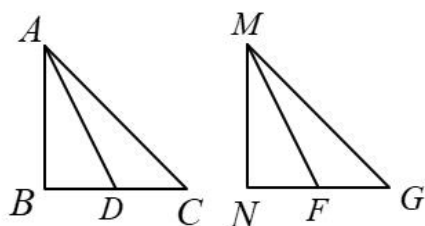
【分析】由线段的垂直平分线的性质可判断 A，由三角形的角平分线的性质可判定 B，由 SAS 判定两个三角形全等可判断 C，由 HL 判定两个直角三角形全等可判断 D，从而可得答案.

【详解】解：三角形三条边的垂直平分线的交点到三角形三个顶点的距离相等，是真命题，故 A 不符合题意；

三角形三个内角的平分线的交点到三角形三条边的距离相等，是真命题，故 B 不符合题意；

两腰对应相等的两个等腰三角形不一定全等，因为两腰的夹角不一定相等，故 C 符合题意；

如图， $\angle C = \angle N = 90^\circ$, $AD = MF$, $AB = MN$, $BD = DC$, $NF = FG$,



$\therefore Rt \triangle ADB \cong Rt \triangle MFN$,

$\therefore BD = FN$, 则 $BC = NG$,

$\therefore Rt \triangle ACB \cong Rt \triangle MGN$,

一条直角边和另一条直角边上的中线对应相等的两个直角三角形全等，是真命题，故 D 不符合题意；

故选 C

【点睛】本题考查的是线段垂直平分线的性质，角平分线的性质，全等三角形的判定与性质，掌握“判定命题真假的方法”是解本题的关键.

二、填空题（本题共 14 小题，每小题 2 分，满分 28 分）

5. 计算： $\sqrt{12} \times \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式的乘法，注意化简为最简二次根式是解题的关键.

利用二次根式的乘法法则，将 $\sqrt{12} \times \sqrt{2}$ 合并为 $\sqrt{24}$ ，再化简即可.

【详解】解：原式 $= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$,

故答案为： $2\sqrt{6}$.

6. 化简： $\sqrt{27a^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3a\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】 直接按照二次根式的特点化简二次根式即可.

【详解】 $\because \sqrt{27a^3}$ 有意义, $\therefore a > 0$

$$\text{原式} = \sqrt{27a^3} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot 3a} = 3a\sqrt{3a}$$

【点睛】 本题考查二次函数的化简, 在化简过程中, 一定要时刻注意二次根式的非负性.

7. 方程 $(1-x)^2 = 9$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 4, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 把 $(1-x)$ 看成是一个整体, 直接开平方解方程即可.

【详解】 解: $(1-x)^2 = 9$, 即 $(x-1)^2 = 9$,

直接开平方得: $x-1 = \pm 3$,

移项得: $x = 1 \pm 3$,

$\therefore x_1 = 4, x_2 = -2$,

故答案为: $x_1 = 4, x_2 = -2$

【点睛】 本题考查利用平方根解方程, 掌握平方根性质及意义是解题的关键.

8. 不等式 $x < \sqrt{3}x + 4$ 的解是_____

【答案】 $x > -2 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用不等式的性质求不等式解集即可.

【详解】 $x < \sqrt{3}x + 4$

$$x - \sqrt{3}x < 4$$

$$(1 - \sqrt{3})x < 4$$

$$x > \frac{4}{1 - \sqrt{3}}$$

$$x > -2 - 2\sqrt{3}$$

【点睛】 本题考查求一元一次不等式的解集，还涉及无理数的比较大小，熟练掌握各个知识点是解题关键.

9. 已知 $1 \leq a \leq 2$ ，化简 $\sqrt{a^2 - 2a + 1} + |a - 2| =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 由 $1 \leq a \leq 2$ 可得 $a - 1 \geq 0, a - 2 \leq 0$, 再化简二次根式与绝对值，最后合并即可.

【详解】 解： $\because 1 \leq a \leq 2$,

$$\therefore a - 1 \geq 0, a - 2 \leq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - 2a + 1} + |a - 2|$$

$$= |a - 1| + |a - 2|$$

$$= a - 1 - (a - 2) = a - 1 - a + 2 = 1$$

故答案为： 1

【点睛】 本题考查的是二次根式的化简，绝对值的化简，掌握 “ $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ ” 是解本题的关键.

10. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 5x + 1 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 由 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 时，解得 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ ，根据求根公式的分解方法和特点即可得到答案.

【详解】 解： 当 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 时，

$$\therefore a = 1, b = -5, c = 1,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 21 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2},$$

$$\therefore x^2 - 5x + 1 = \left(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right),$$

故答案为: $\left(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查了在实数范围内分解因式的知识, 当无法用十字相乘法分解时可以使用求根公式法进行分解.

11. 若关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 能够取到的最小整数是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程根的判别式, 熟知一元二次方程根的判别与方程解的关系是解题的关键.

先根据关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根则 $m \neq 0$, $\Delta > 0$ 得到关于 m 的不等式, 求出 m 的取值范围, 然后找到最小的整数值即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 4 + 4m > 0 \end{cases},$$

解得 $m > -1$ 且 $m \neq 0$,

$\therefore$ 最小的整数值为 1,

故答案为: 1.

12. 某班学生进行合影留念活动, 每两个同学之间会留下一张合影, 已知最终拍摄了 1225 张照片, 这个班的学生人数是_____人.

【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 解题的关键是正确理解题意建立方程.

设学生人数为 n , 根据题意建立方程 $\frac{n(n-1)}{2} = 1225$, 再解方程即可.

【详解】 解: 设学生人数为 n ,

由题意得, $\frac{n(n-1)}{2} = 1225$,

整理得, $n^2 - n - 2450 = 0$,

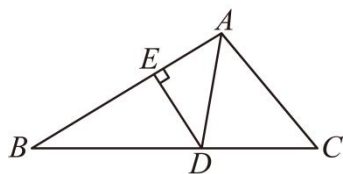
解得 $n_1 = 50$, $n_2 = -49$ (舍),

$\therefore$ 这个班的学生人数是 50 人,

故答案为: 50.

13. 如图, AD 是 $\triangle BAC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $S_{\triangle ABC} = 20$, $DE = 4$, $AB = 6$, 则边 AC 的长是

_____.

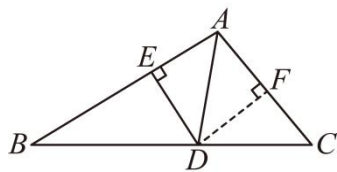


【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质; 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 由 AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $DE \perp AB$ 于点 E , 得 $DF = DE = 4$, 根据 $S_{\triangle ABC} = 20$, $AB = 6$, 求得 $AC = 4$, 于是得到问题的答案.

【详解】 解: 作 $DF \perp AC$ 于点 F ,



$\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的角平分线,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ,

$\because DF \perp AC$ 于点 F , $DE \perp AB$ 于点 E ,

$\therefore DF = DE = 4$,

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$$

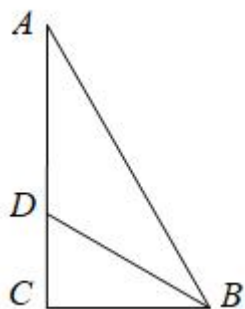
$\because S_{\triangle ABC} = 20$, $AB = 6$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times AC = 20$$

解得: $AC = 4$

故答案为: 4.

14. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 如果 $AC = 9cm$, 那么 $AD =$ _____ cm .



【答案】 6

【解析】

【分析】 根据直角三角形 30° 角的性质，角平分线的性质，列式计算即可.

【详解】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC=60^\circ,$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD=\angle CBD=30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle A,$$

$$\therefore AD=BD,$$

设 $AD=BD=x(cm)$,

$$\because AC=9cm,$$

$$\therefore CD=(9-x)cm,$$

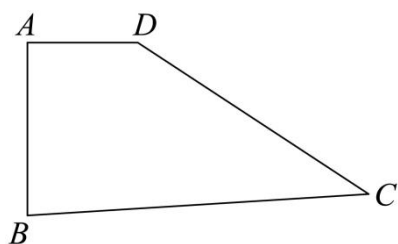
$$\therefore (9-x):x=1:2 \text{ 即: } x=6,$$

$$\therefore AD=6.$$

故答案是: 6.

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的判定定理以及含 30° 角的直角三角形的性质，熟练掌握“直角三角形中， 30° 角所对的直角边是斜边的一半”是解题的关键.

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD=2\sqrt{2}$ ， $AB=2\sqrt{7}$ ， $BC=10$ ， $CD=8$ ， $\angle BAD=90^\circ$ ， 那么四边形 $ABCD$ 的面积是_____.

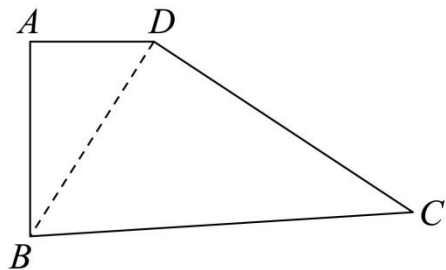


【答案】 $2\sqrt{14}+24$

【解析】

【分析】连结 BD ，然后根据勾股定理求得 BD 的值和 $\triangle BAD$ 的面积，再根据勾股定理逆定理得到 $\triangle BDC$ 是直角三角形，所以可以得到 $\triangle BDC$ 的面积，从而得到四边形 $ABCD$ 的面积.

【详解】解：如图，连结 BD ，



$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2},$$

$$\because AD = 2\sqrt{2}, \quad AB = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore BD = 6,$$

$$\because BD^2 = 36, \quad CD^2 = 64, \quad BC^2 = 100, \quad BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

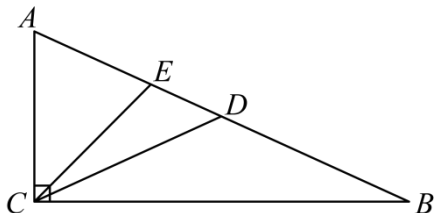
$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{7} = 2\sqrt{14}, \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC} = 2\sqrt{14} + 24$$

故答案为： $2\sqrt{14} + 24$.

【点睛】本题考查勾股定理以及逆定理，三角形的面积等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是三角形的中线， CE 是三角形的一条内角平分线，若 $\angle A = 65^\circ$ ，那么 $\angle CED$ 的度数是_____.



【答案】 110° ## 110 度

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的定义及三角形外角的性质，根据题意得 CE 是 $\angle ACB$ 的角平分线，得到

$\angle ACE = 45^\circ$ ，利用三角形外角的性质结合 $\angle A = 65^\circ$ 即可解答.

【详解】解：根据题意得 CE 是 $\angle ACB$ 的角平分线，

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

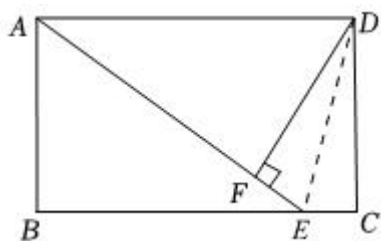
$$\therefore \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\because \angle A = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle ACE + \angle A = 110^\circ.$$

故答案为： 110° .

17. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $BC=5$ ， $AB=3$ ，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle DCE$ 沿着 DE 翻折后，点 C 落在线段 AE 上的点 F 处，那么 CE 的长度是_____.



【答案】1

【解析】

【分析】由对折先证明 $DE = DC = 3$ ， $\angle DFE = 90^\circ$ ， $\angle DEF = \angle DEC$ ， $CE = EF$ ，再利用勾股定理求解 AF ，再证明 $AE = AD = 5$ ，从而求解 EF ，于是可得答案.

【详解】解： $\because$ 长方形 $ABCD$ 中， $BC=5$ ， $AB=3$ ，

$$\therefore AD = BC = 5, CD = AB = 3, \angle C = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

由折叠可得： $DE = DC = 3$ ， $\angle DFE = 90^\circ$ ， $\angle DEF = \angle DEC$ ， $CE = EF$ ，

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ, AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = 4,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CED,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$$\therefore AE = AD = 5,$$

$$\therefore EF = AE - AF = 1,$$

$$\therefore CE = 1.$$

故答案为：1

【点睛】 本题考查的是长方形的性质，勾股定理的应用，轴对称的性质，求解 $AF=4, AE=AD=5$ 是解本题的关键.

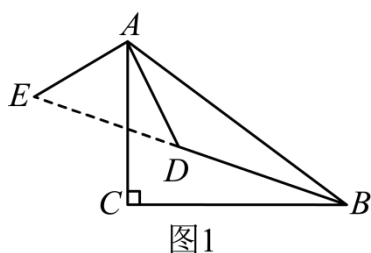
18. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 是锐角， $\angle ABC$ 与 $\angle BAC$ 的平分线交于点 D ，过 A 作 $AE \perp AD$ 交 BD 的延长线于点 E . 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 中有一个锐角相等时， $\angle ABC$ 的度数是_____.

【答案】 45° 或 30°

【解析】

【分析】 本题考查直角三角形的性质，画出图形并熟练运用角平分线的定义是本题的关键. 根据题意，画出 $\angle ACB = 90^\circ$ 和 $\angle BAC = 90^\circ$ 两种三角形，利用角平分线的定义表示出相关角的数量关系，设 $\angle ABC = 2x$ ，每个图形分两种情况讨论，根据三角形外角的性质表示出 $\angle ADE$ ，列方程求出 x 的值，即可得到答案.

【详解】 解：如图 1 所示，当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时，



设 $\angle ABC = 2x$ ，则 $\angle BAC = 90^\circ - 2x$ ，

$\because \angle ABC$ 与 $\angle BAC$ 的平分线交于点 D ，

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ - x, \quad \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = x,$$

①当 $\angle ABC = \angle ADE$ 时，

$$\because \angle ADE = \angle ABD + \angle BAD = x + 45^\circ - x = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ;$$

②当 $\angle BAC = \angle ADE$ 时，

$$\because \angle ADE = \angle ABD + \angle BAD = x + 45^\circ - x = 45^\circ, \quad \angle BAC = 90^\circ - 2x,$$

$$\therefore 90^\circ - 2x = 45^\circ,$$

$$\therefore x = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2 \times 22.5^\circ = 45^\circ;$$

如图 2 所示，当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，

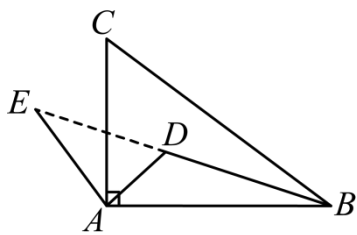


图2

设 $\angle ABC = 2x$ ，则 $\angle ACB = 90^\circ - 2x$ ，

$\because \angle ABC$ 与 $\angle BAC$ 的平分线交于点 D ，

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ, \quad \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = x,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABD + \angle BAD = 45^\circ + x > \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB,$$

$$\therefore 45^\circ + x = 90^\circ - 2x,$$

$$\therefore x = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2 \times 15^\circ = 30^\circ;$$

综上， $\angle ABC = 45^\circ$ 或 30° 。

故答案为： 45° 或 30° 。

三、简答题 (本大题共 4 题，每题 6 分，满分 24 分)

19. 计算： $\left(3\sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{50} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \div \sqrt{32} - \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

【答案】 $1 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键。

首先计算括号内的二次根式加减运算，再计算除法，并利用平方差公式对二次根式进行化简，最后合并同类项进行求解即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：原式} &= (9\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \div 4\sqrt{2} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= 8\sqrt{2} \div 4\sqrt{2} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3} - 1 \\ &= 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

20. 解方程: $x^2 - 2\sqrt{5}x = 4$

【答案】 $x_1 = \sqrt{5} - 3$, $x_2 = \sqrt{5} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查求解一元二次方程, 选择合适的方法求解一元二次方程是解题的关键.
选择公式法进行求解一元二次方程即可.

【详解】 解: $x^2 - 2\sqrt{5}x = 4$,

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{5}x - 4 = 0,$$

$$\Delta = (-2\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 36,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{5} \pm 6}{2},$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{5} - 3, \quad x_2 = \sqrt{5} + 3.$$

21. 关于 x 的方程 $x^2 - (k+3)x + (2k+1) = 0$ 是一个一元二次方程, 方程有两个实根 x_1 、 x_2 , 这两个实根满足条件 $x_1^2 + x_2^2 = 20$, 求 k 的值

【答案】 $k = -1 \pm \sqrt{14}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的判别式 ($\Delta = b^2 - 4ac$) 和根与系数的关系, 关键知识点: $\Delta > 0$ 等价于方程有两个不相等的实数根; $\Delta = 0$ 等价于方程有两个相等的实数根; $\Delta < 0$ 等价于方程没有实根; 韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 根据方程的系数结合根的判别式可得出 $\Delta > 0$, 由此

可证出方程总有两个不同的实数根, 根据一元二次方程的根与系数的关系, 可以得到 $x_1 + x_2 = k + 3$,

$x_1 x_2 = 2k + 1$, 再将它们代入 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 20$, 即可求出 k 的值.

【详解】 解: 由方程 $x^2 - (k+3)x + (2k+1) = 0$,

$$\Delta = [-(k+3)]^2 - 4(2k+1)$$

$$= k^2 - 2k + 5$$

$$= (k-1)^2 + 4 > 0$$

即 $\Delta > 0$,

$\therefore$ 无论 k 取何值时, 方程总有两个不相等的实数根;

$$\because x_1 + x_2 = k + 3, \quad x_1 \cdot x_2 = 2k + 1,$$

$$\text{又 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2,$$

$$\text{把 } x_1 + x_2 = k + 3, \quad x_1 \cdot x_2 = 2k + 1 \text{ 代入上式: } x_1^2 + x_2^2 = (k + 3)^2 - 2(2k + 1),$$

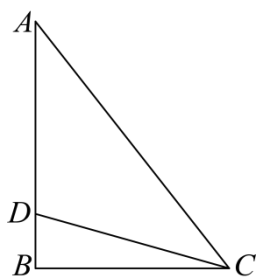
$$\because x_1^2 + x_2^2 = 20,$$

$$\therefore (k + 3)^2 - 2(2k + 1) = 20,$$

$$\text{整理得: } k^2 + 2k - 13 = 0,$$

$$\text{解得: } k = -1 \pm \sqrt{14}.$$

22. 如图, 一架无人机悬停在空中点 A 处, 点 A 与地面上点 B 之间的距离 $AB = 20$ 米, 点 A 与地面上点 C (点 B, C 处于同一水平面上) 的距离 $AC = 25$ 米, 且 $BC = 15$ 米.



(1) 求 $\angle ABC$ 的度数;

(2) 现这架无人机沿 AB 所在直线向下飞行至点 D 处, 若点 D 恰好在边 AC 的垂直平分线上, 连接 CD , 求这架无人机向下飞行的距离 (AD 的长).

【答案】 (1) $\angle ABC = 90^\circ$

(2) $\frac{125}{8}$ 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理及其逆定理, 线段垂直平分线的性质, 熟练的掌握勾股定理的逆定理和线段垂直平分线的性质是解题的关键.

(1) 根据勾股定理的逆定理即可解答;

(2) 设 $AD = x$ 米, 则 $BD = (20 - x)$ 米, 由线段垂直平分线的性质得到 $CD = AD = x$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 根据勾股定理建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because AB^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 625$, $AC^2 = 25^2 = 625$,

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: 设 $AD = x$ 米, 则 $BD = (20 - x)$ 米,

$\because$ 点 D 恰好在边 AC 的垂直平分线上,

$$\therefore CD = AD = x \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 由勾股定理得 $DC^2 = BD^2 + BC^2$,

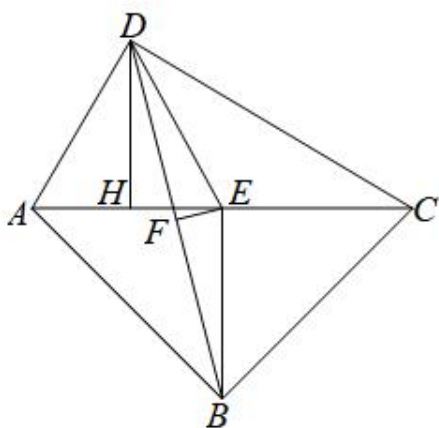
$$\therefore x^2 = (20 - x)^2 + 15^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{125}{8}.$$

答: 这架无人机向下飞行的距离 (AD 的长) 为 $\frac{125}{8}$ 米.

四、解答题 (第 23、24 题, 每题 8 分; 第 25、26 题, 每题 10 分; 满分 36 分)

23. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 AC 中点, 点 F 是 BD 中点.



(1) 求证: $EF \perp BD$;

(2) 过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 H 点, 如果 BD 平分 $\angle HDE$, 求证: $BA = BC$.

【答案】(1) 见详解; (2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半以及等腰三角形“三线合一”, 即可得到结论;

(2) 先证明 $DH \parallel BE$, 再证明 BE 垂直平分 AC , 即可得到结论.

【详解】(1) $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 AC 中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, BE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore DE = BE,$$

$\therefore$ 点 F 是 BD 中点,

$$\therefore EF \perp BD;$$

(2) $\therefore BD$ 平分 $\angle HDE$,

$$\therefore \angle HDB = \angle EDB,$$

$$\therefore DE = BE,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD,$$

$$\therefore \angle HDB = \angle EBD,$$

$$\therefore DH \parallel BE,$$

$$\therefore DH \perp AC,$$

$$\therefore BE \perp AC,$$

$\therefore$ 点 E 是 AC 中点,

$\therefore BE$ 垂直平分 AC ,

$$\therefore BA = BC.$$

【点睛】 本题主要考查直角三角形的性质，等腰三角形的性质定理以及中垂线的性质定理，熟练掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，等腰三角形“三线合一”是解题的关键。

24. 广西桂林山水甲天下，桂林已成为国内外最受游客喜欢的旅游城市之一。在2023年国庆长假期间，接待游客达600万人次左右，预计在2025年国庆长假期间，接待游客达726万人次左右。

(1) 求桂林2023年至2025年国庆长假期间接待游客人次的年平均增长率；

(2) 桂林漓江景区一奶茶店销售一款奶茶，每杯成本价为5元，根据销售经验，在旅游旺季，若每杯定价20元，则平均每天可销售200杯，若每杯售价降低1元，则平均每天可多销售25杯。2025年国庆期间，店家决定进行降价促销活动，则当每杯售价定为多少元时，既能让顾客获得最大优惠，又可以让店家在此款奶茶上实现平均每天3250元的利润额？

【答案】 (1) 年平均增长率为10%

(2) 当每杯售价定为15元时，店家在此款奶茶上实现平均每天3250元的利润额

【解析】

【分析】 本题考查了增长率问题(一元二次方程的应用)，营销问题(一元二次方程的应用)，解题关键是掌握上述知识点并能运用求解。

(1) 设年平均增长率为 r ，根据题意，列出一元二次方程求解；

(2) 设降价 x 元, 根据题意, 列出一元二次方程求解.

【小问 1 详解】

解: 设年平均增长率为 r ,

$$\text{则 } 600(1+r)^2 = 726,$$

$$\text{解得: } r_1 = -\frac{21}{10} (\text{舍去}), \quad r_2 = 10\%,$$

答: 桂林 2023 年至 2025 年国庆长假期间接待游客人次的年平均增长率为 10%;

【小问 2 详解】

解: 设降价 x 元,

售价: $20 - x$ 元,

销量: $200 + 25x$ 杯,

单杯利润: 售价 - 成本 = $(20 - x) - 5 = 15 - x$ 元,

总利润: 利润 = $(15 - x)(200 + 25x)$ 元,

$$\text{则 } (15 - x)(200 + 25x) = 3250,$$

$$\text{解得: } x_1 = 2, \quad x_2 = 5,$$

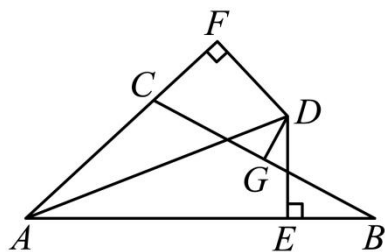
售价 $20 - x$ 元:

当 $x = 2$ 时, 售价 18 元;

当 $x = 5$ 时, 售价 15 元,

当每杯售价定为 15 元时, 既能让顾客获得最大优惠, 又可使店家在此款奶茶上实现平均每天 3250 元的利润额.

25. 已知: $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的垂直平分线相交于点 D . $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E 、 F .



(1) 求证: $BE = CF$;

(2) 若 $AB = 6$, $AC = 3$, 求 BE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3}{2}$

【解析】

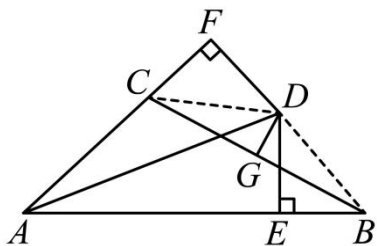
【分析】本题主要考查了利用角平分线的性质和垂直平分线的性质证明三角形全等进行求解，准确计算是解题的关键.

(1) 连接 DC ， DB ，根据角平分线的性质和垂直平分线的性质证明 $\triangle CDF \cong \triangle BDE$ ，即可得证；

(2) 根据已知条件证明 $\triangle ADF \cong \triangle ADE$ ，得到 $AE = AF$ ，设 $BE = CF = x$ ，则 $AE = 6 - x$ ，根据 $AF = AC + CF$ 代入计算即可得解.

【小问 1 详解】

证明：连接 DC ， DB ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$$\therefore DE = DF,$$

又 $\because DG$ 垂直平分 BC ，

$$\therefore CD = BD,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 和 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，
$$\begin{cases} CD = BD \\ DF = DE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle BDE (\text{HL}),$$

$$\therefore BE = CF.$$

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AD = AD \\ DF = DE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{HL}),$$

$$\therefore AE = AF,$$

设 $BE = CF = x$ ，则 $AE = 6 - x$ ，

$$\because AF = AC + CF = 3 + x,$$

$$\therefore 3 + x = 6 - x,$$

$$\therefore x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BE = \frac{3}{2}.$$

26. 已知直线 MN 与 PQ 互相垂直，垂足为 O ，点 A 在射线 OQ 上运动，点 B 在射线 OM 上运动，点 A ， B 均不与点 O 重合.

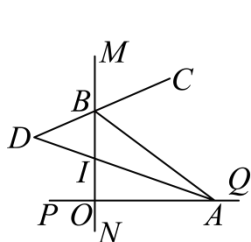


图1

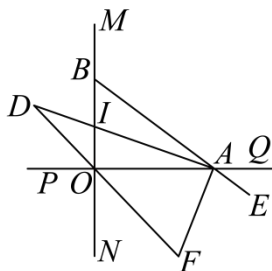


图2

(1) 如图 1, AI 平分 $\angle BAO$ 交 OB 于点 I , BC 平分 $\angle ABM$, BC 的反向延长线交 AI 的延长线于点 D .

①若 $\angle BAO = 30^\circ$, 则 $\angle ADB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

②在点 A , B 的运动过程中, $\angle ADB$ 的大小是否会发生变化? 若不变, 求出 $\angle ADB$ 的度数; 若变化, 请说明理由.

(2) 如图 2, 已知点 E 在 BA 的延长线上, $\angle BAO$ 的平分线 AI , $\angle OAE$ 的平分线 AF 与 $\angle BOP$ 的平分线所在的直线分别相交于点 D , F . 在 $\triangle ADF$ 中, 如果有一个角的度数是另一个角的 3 倍, 请求出 $\angle ABO$ 的度数.

【答案】 (1) ① 45° ; ② 不变, $\angle ADB = 45^\circ$;

(2) 60° 或 45° .

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的外角性质, 角平分线的定义, 垂直的定义等知识, 解题的关键是掌握相关的知识.

(1) ①由垂直的定义得 $\angle AOB = 90^\circ$, 结合 $\angle BAO = 30^\circ$, 可得 $\angle ABM = \angle AOB + \angle BAO = 120^\circ$, 根据角平分线的定义可得 $\angle CBA = \frac{1}{2}\angle ABM = 60^\circ$, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAO = 15^\circ$, 最后根据三角形的外角性质即可求解; ②设 $\angle BAO = \alpha$, 则 $\angle ABM = 90^\circ + \alpha$, 根据角平分线的定义可得

$\angle CBA = \frac{1}{2}\angle ABM = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAO = \frac{1}{2}\alpha$, 最后根据三角形的外角性质即可求解;

(2) 根据角平分线的定义可得 $\angle DAP = \frac{1}{2}\angle BAO$, $\angle OAF = \frac{1}{2}\angle OAE$, $\angle DOP = \frac{1}{2}\angle BOP$, 进而得到 $\angle DAF = \angle DAP + \angle OAF = 90^\circ$, 推出 $\angle D + \angle F = 90^\circ$, 根据三角形外角性质可推出 $\angle OBA = 2\angle D$, 然后分两种情况讨论: ①当 $\angle DAF = 3\angle D$ 时, ②当 $\angle F = 3\angle D$ 时.

【小问 1 详解】

① $\because$ 直线 MN 与 PQ 互相垂直, 垂足为 O ,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle AOB + \angle BAO = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\because AI \text{ 平分 } \angle BAO \text{ 交 } OB \text{ 于点 } I, \quad BC \text{ 平分 } \angle ABM,$$

$$\therefore \angle CBA = \frac{1}{2} \angle ABM = 60^\circ, \quad \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAO = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBA - \angle BAD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

故答案为: 45;

②不变, $\angle ADB = 45^\circ$.

$$\because \text{直线 } MN \text{ 与 } PQ \text{ 互相垂直, 垂足为 } O,$$

$$\therefore \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABM \text{ 是 } \triangle ABO \text{ 的外角, 设 } \angle BAO = \alpha,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle BAO + \angle BOA = 90^\circ + \alpha,$$

$$\because AI \text{ 平分 } \angle BAO \text{ 交 } OB \text{ 于点 } I, \quad BC \text{ 平分 } \angle ABM,$$

$$\therefore \angle CBA = \frac{1}{2} \angle ABM = \frac{1}{2} \times (90^\circ + \alpha) = 45^\circ + \frac{1}{2} \alpha,$$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAO = \frac{1}{2} \alpha,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBA - \angle BAD = \left(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha \right) - \frac{1}{2} \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB \text{ 的值不变, 且 } \angle ADB = 45^\circ;$$

【小问 2 详解】

$$\because AI \text{ 平分 } \angle BAO, \quad AF \text{ 平分 } \angle OAE, \quad OD \text{ 平分 } \angle BOP,$$

$$\therefore \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAO, \quad \angle OAF = \frac{1}{2} \angle OAE, \quad \angle DOP = \frac{1}{2} \angle BOP,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DAP + \angle OAF = \frac{1}{2} \angle BAO + \frac{1}{2} \angle OAE = \frac{1}{2} (\angle BAO + \angle OAE) = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt} \triangle ADF \text{ 中 } \angle D + \angle F = 90^\circ,$$

$$\because \angle DOP \text{ 是 } \triangle ADO \text{ 的外角, } \angle BOP \text{ 是 } \triangle ABO \text{ 的外角,}$$

$$\therefore \angle D = \angle DOP - \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BOP - \frac{1}{2} \angle BAO = \frac{1}{2} (\angle BOP - \angle BAO); \quad \angle OBA = \angle BOP - \angle BAO,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle OBA, \quad \text{即 } \angle OBA = 2\angle D,$$

$$\because \text{一个角是另一角的 3 倍,}$$

$$\therefore \text{由图可知, 可分两种情况讨论:}$$

①当 $\angle DAF = 3\angle D$ 时,

$$\because \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{3} \angle DAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA = 2\angle D = 60^\circ;$$

②当 $\angle F = 3\angle D$ 时,

$$\because \angle D + \angle F = 90^\circ \text{ 即 } 4\angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA = 2\angle D = 45^\circ;$$

综上所述, $\angle OBA$ 等于 60° 或 45° .