

2025 学年第一学期八年级数学学科阶段测试

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{13}{17}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 , 其中无理数有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查无理数的定义, 无理数就是无限不循环小数, 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称, 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数, 由此即可判断选项. 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开不尽方的数; 以及像 $0.101001000100001\cdots$ 等有这样规律的数, 也考查了求立方根.

【详解】 解: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 是无理数;

$-\sqrt[3]{9}$ 是无理数;

$\frac{13}{17}$ 是分数, 属于有理数;

$-\pi$ 是无理数;

$\sqrt[3]{-8} = -2$ 是整数, 属于有理数;

-0.1010010001 是小数, 属于有理数;

故无理数有 3 个: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $-\pi$,

故选: B.

2. 下列方程中, 是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 是实数) B. $(x+1)(x+4) = (x-2)^2$

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$ D. $\sqrt{3}x^2 - 9x = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的定义, 熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键. 根据“只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数为 2 的整式方程叫做一元二次方程”, 由此问题可求解.

【详解】解：A、当 $a=0$ 时，则 $ax^2+bx+c=0$ 就不是一元二次方程，故不符合题意；

B、把 $(x+1)(x+4)=(x-2)^2$ 化简为 $9x=0$ ，不是一元二次方程，故不符合题意；

C、 $x^2+\frac{1}{x}-3=0$ 含分式，不是一元二次方程，故不符合题意；

D、 $\sqrt{3}x^2-9x=0$ 是一元二次方程，故符合题意。

故选 D。

3. 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{16}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{32x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了同类二次根式，熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键。

各式化简后，利用同类二次根式定义判断即可。

【详解】解：A、 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ，不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，不符合题意；

C、 $\sqrt{0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sqrt{5}$ ，不符合题意；

D、 $\sqrt{32x^3}=4x\sqrt{2x}$ ， $\sqrt{2x}$ ，符合题意，

故选：D。

4. 电影《志愿军》不仅讲述了中国人民志愿军抗美援朝的故事，更是通过鲜活生动的人物塑造，让观众体会到历史事件背后的人性和情感，一上映就获得全国人民的追捧。某地第一天票房约3亿元，若以后每天票房按相同的增长率增长，三天后票房收入累计达18亿元，若把增长率记作 x ，则方程可以列为（ ）

A. $3(1+x)=18$

B. $3(1+x)^2=18$

C. $3+3(1+x)^2=18$

D. $3+3(1+x)+3(1+x)^2=18$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了增长率问题(一元二次方程的应用), 根据题意求出第二天和第三天的票房即可求解.

【详解】 解: 由题意得: 第二天的票房为 $3(1+x)$ 亿元, 第三天的票房为 $3(1+x)^2$ 亿元,

$$\therefore 3+3(1+x)+3(1+x)^2=18$$

故选: D.

5. 已知 a 、 b 、 c 是三角形三边的长, 则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2(b-c)x+a=0$ 的实数根的情况是 ()

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根;

C. 没有实数根

D. 无法确定

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据三角形的三边关系可知 $\Delta < 0$, 可知一元二次方程根的情况.

【详解】 解: $\Delta = [2(b-c)]^2 - 4a^2 = 4(b-c+a)(b-c-a)$,

$\therefore a$ 、 b 、 c 是三角形三边的长,

$\therefore b-c+a > 0$, $b-c-a < 0$,

$\therefore \Delta = 4(b-c+a)(b-c-a) < 0$,

$\therefore$ 原方程没有实数根,

故选: C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 三角形的三边关系, 熟练掌握根的判别式与根的情况的关系是解题的关键.

6. 设 x 、 y 、 z 是两两不等的实数, 且满足下列等式: $\sqrt{x^3(y-x)^3} + \sqrt{x^3(z-x)^3} = \sqrt{y-x} - \sqrt{x-z}$, 则

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的值是 ()

A. 0

B. 1

C. 3

D. 条件不足, 无法计算

【答案】 A

【解析】

【分析】 首先根据二次根式的被开方数为非负数与 x 、 y 、 z 是两两不等的实数, 即可求得: x 为 0, y 与 z 互为相反数, 据此即可求得代数式的值.

【详解】解：根据题意得：

$$\begin{cases} x^3(y-x)^3 \geq 0 \\ x^3(z-x)^3 \geq 0 \\ y-x > 0 \\ x-z > 0 \end{cases}$$

$$\therefore y > x > z,$$

$$\therefore y-x > 0, \quad z-x < 0,$$

$$\therefore \text{由 } x^3(y-x)^3 \geq 0 \text{ 可得 } x \geq 0, \text{ 由 } x^3(z-x)^3 \geq 0 \text{ 可得 } x \leq 0,$$

$$\therefore x = 0,$$

$$\therefore \sqrt{y-x} - \sqrt{x-z} = 0,$$

$$\therefore \sqrt{y} - \sqrt{-z} = 0,$$

$$\therefore y = -z,$$

$$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -z^3 + z^3 = 0.$$

【点睛】此题考查了二次根式成立的条件与不等式组解集的求解方法，代数式求值问题，找到 x, y, z 的关系是求解本题的关键。

二、填空题（每题 2 分，共 24 分）

7. 16 的平方根是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】本题考查了平方根的定义，根据平方根的定义，一个数的平方根是使得其平方等于该数的值，16 的平方根有两个： ± 4 ，由此即可得解，熟练掌握平方根的定义是解此题的关键。

【详解】解： $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ ，

即 16 的平方根是 ± 4 ，

故答案为： ± 4 。

8. 当 x _____时， $\frac{\sqrt{x+2}}{x-5}$ 在实数范围内有意义。

【答案】 ≥ -2 且 $x \neq 5$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，由二次根式有意义的条件以及分式有意

义的条件得出 $x+2 \geq 0$ 且 $x-5 \neq 0$ ，求解即可，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解： $\because \frac{\sqrt{x+2}}{x-5}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore x+2 \geq 0$ 且 $x-5 \neq 0$ ，

解得： $x \geq -2$ 且 $x \neq 5$ ，

故当 $x \geq -2$ 且 $x \neq 5$ 时， $\frac{\sqrt{x+2}}{x-5}$ 在实数范围内有意义，

故答案为： ≥ -2 且 $x \neq 5$.

9. 等式 $\sqrt{(x-2)(3-x)} = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{3-x}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $2 \leq x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件，被开方数必须为非负数，因此需保证每个根号下的表达式均大于等于零，由此计算即可得解，熟练掌握二次根式有意义的条件是解此题的关键.

【详解】解：要使 $\sqrt{x-2}$ 有意义，需 $x-2 \geq 0$ ，即 $x \geq 2$ ；

要使 $\sqrt{3-x}$ 有意义，需 $3-x \geq 0$ ，即 $x \leq 3$ ，

当 $x \geq 2$ 且 $x \leq 3$ 时， $(x-2)(3-x) \geq 0$ ，因此等式成立，

故答案为： $2 \leq x \leq 3$.

10. 比较大小（用“>”、“<”、“=”连接）： $-3\sqrt{3}$ _____ $-\sqrt{28}$.

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的大小比较，通过比较两个负数的绝对值大小，绝对值大的负数反而小，即可得解，熟练掌握此知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解： $\because 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ ， $27 < 28$ ，

$\therefore 3\sqrt{3} < \sqrt{28}$ ，

$\therefore -3\sqrt{3} > -\sqrt{28}$ ，

故答案为： > .

11. 方程 $2x^2 = x$ 的解为_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法计算即可得解，选择合适的方法进行计算是解此题的关键.

【详解】 解： $\because 2x^2 = x,$

$$\therefore 2x^2 - x = 0,$$

$$\therefore x(2x - 1) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } 2x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}.$$

12. 化简: $\sqrt{32a^3b} (b < 0) =$ _____.

【答案】 $-4a\sqrt{2ab}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质进行化简，由于 $b < 0$ ，为确保被开方数非负，需 $a \leq 0$ ；然后将 32 分解为 16×2 ，利用二次根式的性质进行化简即可，熟练掌握此知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解： $\sqrt{32a^3b} = \sqrt{16 \times 2 \times a^2 \times a \times b} = \sqrt{16} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{2ab},$

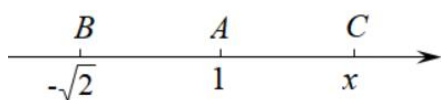
$$\because b < 0, ab \geq 0,$$

$$\therefore a \leq 0,$$

$$\therefore \sqrt{32a^3b} = -4a\sqrt{2ab},$$

$$\text{故答案为: } -4a\sqrt{2ab}.$$

13. 在如图所示的数轴上，点 B 与点 C 到点 A 的距离相等， A 、 B 两点对应的实数分别是 1， $-\sqrt{2}$ ，则点 C 对应的实数是_____.



【答案】 $2 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 设点 C 所对应的实数是 x ，点 B 与点 C 到点 A 的距离相等可列方程，求解即可.

【详解】 解： 设点 C 表示实数 x ,

$\because$ 点 B 与点 C 到点 A 的距离相等

由此可得 $x - 1 = 1 - (-\sqrt{2})$ ，解得 $x = 2 + \sqrt{2}$ ，故 C 点对应的实数是 $2 + \sqrt{2}$.

故答案为： $2 + \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查的是数轴上两点间距离的定义，根据题意列出关于 x 的方程是解答此题的关键.

14. 不等式： $2\sqrt{2}x + 1 > 3x$ 的解集为_____.

【答案】 $x < 3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，通过移项将不等式化为 $x(2\sqrt{2} - 3) > -1$ ，由于 $2\sqrt{2} - 3 < 0$ ，除以负数时不等号方向改变，得到 $x < \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ ，再进行分母有理化即可求解，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解： $\because 2\sqrt{2}x + 1 > 3x$,

$$\therefore 2\sqrt{2}x - 3x > -1,$$

$$\therefore x(2\sqrt{2} - 3) > -1,$$

$\because 2\sqrt{2} - 3 < 0$ ，除以负数，不等号方向改变，

$$\therefore x < \frac{-1}{2\sqrt{2} - 3},$$

$$\text{化简分母 } \frac{-1}{2\sqrt{2} - 3} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}},$$

$$\text{有理化分母 } \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3)^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 + 2\sqrt{2},$$

即 $x < 3 + 2\sqrt{2}$,

故 $2\sqrt{2}x + 1 > 3x$ 的解集为 $x < 3 + 2\sqrt{2}$,

故答案为: $x < 3 + 2\sqrt{2}$.

15. 在实数范围内因式分解: $2x^2 - 5x + 1 =$ _____

【答案】 $2 \left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$.

【解析】

【分析】 运用求根公式解得对应方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的解, 再分解因式.

【详解】 $\because 2x^2 - 5x + 1 = 0, a=2, b=-5, c=1$,

$\therefore 2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的根为 $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$,

即 $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$,

$\therefore 2x^2 - 5x + 1 = 2 \left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$.

故答案为 $2 \left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$.

【点睛】 此题考查公式法分解因式. 解题关键在于熟练运用求根公式解得对应方程的解.

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + 2m = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 . 若 $x_1 - 2x_2 = 6$, 则实数 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 由根与系数的关系可知 $x_1 + x_2 = 3$, 将其代入到 $x_1 - 2x_2 = 6$, 即 $x_1 + x_2 - 3x_2 = 6$ 求得 $x_2 = -1$, 代回方程中即可求得 m 的值.

【详解】 由题意知 $x_1 + x_2 = 3$,

$\because x_1 - 2x_2 = 6$, 即 $x_1 + x_2 - 3x_2 = 6$,

$\therefore 3 - 3x_2 = 6$,

解得: $x_2 = -1$,

代入到方程中, 得: $1 + 3 + 2m = 0$,

解得: $m = -2$,

故答案为 -2 .

【点睛】 本题考查了方程解的概念, 一元二次方程根与系数的关系, 熟练掌握是解题的关键. 若 x_1, x_2 是一

元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根时, $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

17. 有若干支球队参加篮球比赛, 共比赛了 45 场, 每两队之间都比赛一场, 则有_____支球队.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 设共有 x 支球队, 则每两队之间比赛一场, 共比赛场数为 $\frac{x(x-1)}{2}$,

根据总场数 45 列出方程求解, 理解题意, 找准等量关系是解此题的关键.

【详解】 解: 设共有 x 支球队, 则每两队之间比赛一场, 共比赛场数为 $\frac{x(x-1)}{2}$,

根据题意, 有 $\frac{x(x-1)}{2} = 45$,

方程两边同时乘以 2, 得 $x(x-1) = 90$,

整理得 $x^2 - x - 90 = 0$,

因式分解得 $(x-10)(x+9) = 0$,

解得 $x = 10$ 或 $x = -9$,

由于球队数量为正整数,

故 $x = 10$,

故答案为: 10.

18. 若 a, b, c, d 为互不相等的实数, 且满足 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = \frac{8}{27}$, $(b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = \frac{8}{27}$, 则

$\sqrt[3]{(a^2b^2 - c^2d^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系, 求立方根, 由条件可知, a^2 和 b^2 是关于 x 的二次方程

$(x - c^2)(x - d^2) = \frac{8}{27}$ 的两个根, 根据根与系数的关系, 可得 $a^2b^2 - c^2d^2 = -\frac{8}{27}$, 再计算立方根即可, 熟

练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解: $\because a, b, c, d$ 为互不相等的实数, 且满足 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = \frac{8}{27}$, $(b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = \frac{8}{27}$,

$\therefore a^2$ 和 b^2 是关于 x 的二次方程 $(x - c^2)(x - d^2) = \frac{8}{27}$ 的两个根,

即 a^2 和 b^2 是关于 x 的二次方程 $x^2 - (d^2 + c^2)x + c^2d^2 - \frac{8}{27} = 0$ 的两个根,

$$\therefore a^2b^2 = c^2d^2 - \frac{8}{27},$$

$$\therefore a^2b^2 - c^2d^2 = -\frac{8}{27},$$

$$\therefore \sqrt[3]{(a^2b^2 - c^2d^2)} = \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3},$$

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

三、计算题 (每题 5 分, 共 30 分)

19. 计算题

$$(1) \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 6\sqrt{0.75} - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^0;$$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{12}{y^3}} \div \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{3}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\frac{18}{xy^3}} \right).$$

【答案】(1) $-9 + 8\sqrt{3}$;

$$(2) \frac{4\sqrt[3]{12}\sqrt{6}}{9}(y > 0) \text{ 或 } -\frac{4\sqrt[3]{12}\sqrt{6}}{9}(y < 0).$$

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算, 二次根式的运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 根据分母有理化, 二次根式的性质, 零指数幂分别运算, 然后合并即可;

(2) 先确定 $y > 0$, 然后根据立方根, 二次根式的性质进行化简, 然后通过二次根式乘法进行求解即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 6\sqrt{0.75} - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^0 \\ &= \frac{(\sqrt{3}-2)^2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} + \sqrt{3} - 1 + 6\sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{3-4} + \sqrt{3} - 1 + 3\sqrt{3} - 1$$

$$= -7 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 3\sqrt{3} - 1$$

$$= -9 + 8\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \sqrt[3]{\frac{12}{y^3}} \div \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{3}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\frac{18}{xy^3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{y} \div \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{xy}{3} \times \frac{18}{xy^3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{y} \div \left(\frac{3}{8} \sqrt{\frac{6}{y^2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{y} \times \frac{8}{3} \times \frac{|y|}{\sqrt{6}}$$

$$= \begin{cases} \frac{4\sqrt[3]{12}\sqrt{6}}{9} (y > 0) \\ -\frac{4\sqrt[3]{12}\sqrt{6}}{9} (y < 0) \end{cases}.$$

20. 解方程

$$(1) \quad (3x + \sqrt{5})^2 - 18 = 0$$

$$(2) \quad \frac{3}{2}y \left(\frac{1}{3}y - \frac{8}{3} \right) = 3y - 12$$

$$(3) \quad \text{用配方法解方程 } 2x^2 - 3x - 6 = 0.$$

$$(4) \quad 2x^2 - mx - n^2 = 0 \quad (m, n \text{ 为常数});$$

$$\text{【答案】} (1) \quad x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}, \quad x_2 = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}$$

$$(2) \quad y_1 = 12, \quad y_2 = 2$$

$$(3) \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$$

$$(4) \quad x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4} \quad \text{或} \quad x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4}$$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，掌握算理是解决问题的关键.

(1) 用直接开方法解答即可；

(2) 先化为一元二次方程的一般形式，然后用因式分解法解方程即可；

(3) 用配方法解方程即可；

(4) 用公式法解方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (3x + \sqrt{5})^2 - 18 = 0$$

$$(3x + \sqrt{5})^2 = 18$$

$$3x + \sqrt{5} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}, \quad x_2 = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{3}{2}y \left(\frac{1}{3}y - \frac{8}{3} \right) = 3y - 12$$

$$y^2 - 14y + 24 = 0$$

$$(y - 2)(y - 12) = 0$$

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 2;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x = 3$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 3 + \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{57}{16}$$

$$x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$$

【小问4详解】

$$\text{解: } 2x^2 - mx - n^2 = 0$$

$$x = \frac{-(-m) \pm \sqrt{(-m)^2 - 4 \times 2 \times (-n^2)}}{2 \times 2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4}$$

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4}, \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4}$$

四、解答题 (21-22 每题 6 分, 23-24 每题 7 分, 25 题 8 分, 共 34 分)

$$21. \text{ 已知 } y = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} + 8, \text{ 求 } \frac{x - 4y}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \text{ 的值.}$$

【答案】 $\frac{9\sqrt{2}}{2} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 求代数式的值, 根据二次根式有意义的条件求出 $x = \frac{1}{2}$, 从而得出 $y = 8$, 将所求式子进行化简, 最后代入 x 、 y 的值计算即可得解, 熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】 解: $\because x - \frac{1}{2} \geq 0, \quad \frac{1}{2} - x \geq 0,$

$$\therefore x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + 8 = 8,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{x - 4y}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} - 2$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2} - 2.$$

22. 已知一元二次方程 $(a-3)x^2 - 4x + 2 = 0$.

- (1) 若方程的一个根为 $x = -1$, 求 a 的值;
 (2) 若方程有实数根, 求满足条件的正整数 a 的值.

【答案】(1) $a = -3$

(2) 1, 2, 4, 5

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 一元二次方程的解;

- (1) 把 $x = -1$ 代入方程求出 a 即可.
 (2) 由题意可得 $\Delta \geq 0$, 根据不等式即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: 把 $x = -1$ 代入 $(a-3)x^2 - 4x + 2 = 0$ 得: $a - 3 + 4 + 2 = 0$,

解得 $a = -3$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 方程有实数根,

$\therefore \Delta \geq 0$ 且 $a - 3 \neq 0$, 即 $16 - 8(a - 3) \geq 0$ 且 $a - 3 \neq 0$,

解得: $a \leq 5$ 且 $a \neq 3$,

$\therefore$ 满足条件的正整数 a 的值为 1, 2, 4, 5.

23. 某建筑工程队, 计划在工地一边的靠墙处 (利用墙, 墙长 100 米), 用 170 米长的建筑材料围成一个长方形仓库,

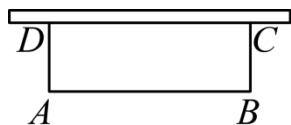


图1

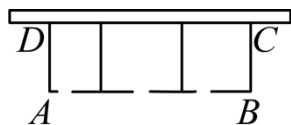


图2

- (1) 如果长方形仓库 (如图 1) 占地面积为 1500 平方米, 求与墙垂直的边 AD 的长;
 (2) 为了便于分类存放和搬运货物, 现决定改变计划, 用原有建筑材料建造并分割出三个小仓库, 并在与墙平行的边 AB 上, 每个仓库预留出 1 个长度为 2 米的门 (如图 2), 长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方

米，若能，求与墙垂直的边 AD 的长；若不能，请说明理由.

【答案】(1) 与墙垂直的边 AD 的长为 75m

(2) 不能，理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，理解题意，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解此题的关键.

(1) 设与墙垂直的边 AD 的长为 x m，则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-2x)$ m，根据“长方形仓库占地面积为 1500 平方米”列出一元二次方程，解方程即可得解；

(2) 设与墙垂直的边 AD 的长为 y m，则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-4y+3\times 2)$ m，根据“长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米”列出一元二次方程，解方程即可得解.

【小问 1 详解】

解：设与墙垂直的边 AD 的长为 x m，则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-2x)$ m，

由题意可得： $x(170-2x)=1500$ ，

解得： $x_1=10$ ， $x_2=75$ ，

当 $x=10$ 时， $170-2x=170-2\times 10=150>100$ ，不符合题意；

当 $x=75$ 时， $170-2x=170-2\times 75=20<100$ ，符合题意；

$\therefore$ 与墙垂直的边 AD 的长为 75m；

【小问 2 详解】

解：不能，理由如下：

设与墙垂直的边 AD 的长为 y m，则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-4y+3\times 2)$ m，

由题意可得 $y(170-4y+3\times 2)=2000$ ，

整理可得： $y^2-44y+500=0$ ，

$\therefore \Delta = (-44)^2 - 4\times 1\times 500 = -64 < 0$ ，

$\therefore$ 原方程没有实数根，

$\therefore$ 不能使长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米.

24. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若实数 k 为整数, 且满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的值也为整数, 求 k 的值.

【答案】(1) $k < 0$

(2) $-5, -3, -2$

【解析】

【分析】(1) 一元二次方程有两个实数根, 则根的判别式为非负数, 且二次项系数不为零, 据此求解即可;

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系可得 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 - \frac{4}{k+1}$, 再根据 $\frac{2(k-1)}{k+1}$ 为整数, 可得 $k+1 = \pm 1$

或 ± 2 或 ± 4 , 最后结合 $k < 0$ 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0, 4k \neq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} (-4k)^2 - 4 \times 4k \cdot (k+1) \geq 0 \\ 4k \neq 0 \end{cases},$$

解得: $k < 0$;

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{-4k}{4k} = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{k+1}{4k}$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1^2 - 2 \cdot \frac{k+1}{4k} = \frac{k-1}{2k}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{\frac{k-1}{2k}}{\frac{k+1}{4k}}$$

$$= \frac{2(k-1)}{k+1},$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{2(k-1)}{k+1} = \frac{2(k+1)-4}{k+1} = 2 - \frac{4}{k+1} \text{ 的值为整数,}$$

$$\therefore k+1=\pm 1 \text{ 或 } \pm 2 \text{ 或 } \pm 4,$$

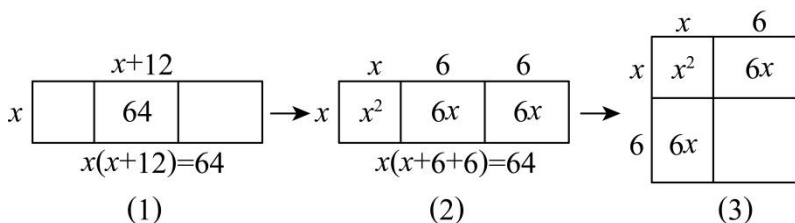
$$\because k < 0,$$

$$\therefore k = -2 \text{ 或 } -3 \text{ 或 } -5.$$

【点睛】本题考查一元二次方程的定义，根的判别式，根与系数的关系，分式的混合运算，数的整除，掌握相关知识是解决问题的关键.

25. 数学史上，曾有数学家利用几何法求解一元二次方程. 下面，以 $x^2 + 12x = 64$ 的求解为例，说明用几何法解一元二次方程的过程：

分析：由于 $x^2 + 12x = 64$ ，因此 $x(12+x) = 64$. 如图（1）所示分别以 x 和 $x+12$ 为两边构造一个长方形，面积为 64. 如图（2）所示再把该长方形分割成一个面积是 x^2 的小正方形和两个面积是 $6x$ 的小长方形，将分割后的图形重新拼接成图（3）所示的图形，则图（3）的阴影部分是边长为 6 的小正方形，面积为 36.



通过以上图形变化上将一个面积为 64 的长方形和一个面积为 36 的小正方形切拼成了一个面积为 $64+36=100$ ，且边长是 $x+6$ 的正方形.

显然该正方形的边长为 10，故 $x+6=10$ ，得 $x=4$.

注：用几何法求解一元二次方程时，只能得到正数根.

请根据上述材料解决以下问题：

(1) 用几何方法求方程 $x^2 + 4x = 32$ 的正数根. 具体过程如下：

①仿照图（1）（2）（3）在如图所示的区域内画出图形，并标出相应的线段长度



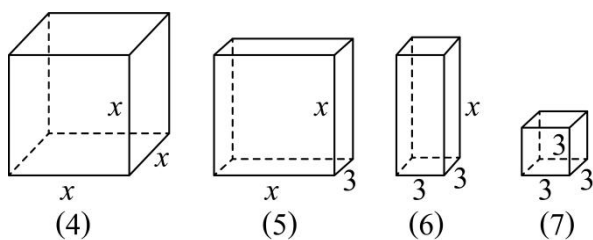
②根据①中所画图形求出方程 $x^2 + 4x = 32$ 的正数根. (填空)

通过以上图形变化上将一个面积为 32 的长方形和四个面积为_____的小正方形切拼成了一个面积为_____，且边长是_____的正方形.

显然该正方形的边长为_____，故_____，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 根据探究材料，我们尝试用“立体图形的组合”求特殊的一元三次方程的正根. 例如，求方程

$x^3 + 9x^2 + 27x = 973$ 的正数根.



类比平面图形的研究, 可将此问题转化成拼正方体来求解, 现准备以下规格的立体图形:

需要准备图 (4) 中的几何体 _____ 块; 需要准备图 (5) 中的几何体 _____ 块;

需要准备图 (6) 中的几何体 _____ 块; 需要准备图 (7) 中的几何体 _____ 块.

请直接写出方程 $x^3 + 9x^2 + 27x = 973$ 的一个正数根; $x =$ _____.

【答案】 (1) ①见解析; ②1, 36, $x+2$, $x+2$, $(x+2)^2 = 36$, 4

(2) 7

【解析】

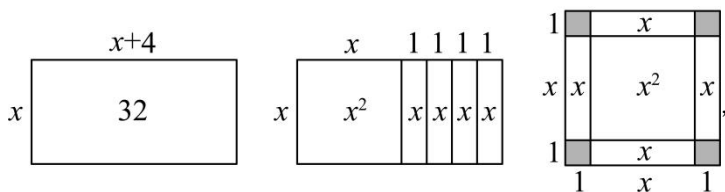
【分析】 本题考查了一元二次方程的实际应用, 理解题意是解此题的关键.

(1) ①根据题意画出图形即可; ②根据所画图形并结合题意解答即可;

(2) 由 $x^3 + 9x^2 + 27x = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 9x$ 可得需要准备图 (4) 中的几何体 1 块; 需要准备图 (5) 中的几何体 3 块; 需要准备图 (6) 中的几何体 3 块, 画出拼成的立体图形, 从而可得需要准备图 (7) 中的几何体 1 块, 因此 $(x+3)^2 = 973 + 27 = 10^3$, 由此求解即可.

【小问 1 详解】

解: ①根据题意作图如下:



②根据①中所画图形求出方程 $x^2 + 4x = 32$ 的正数根. (填空)

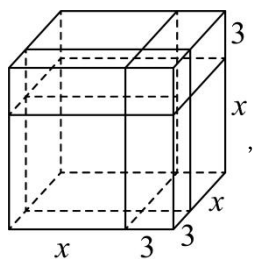
通过以上图形变化上将一个面积为 32 的长方形和四个面积为 1 的小正方形切拼成了一个面积为 $32 + 4 = 36$, 且边长是 $(x+2)$ 的正方形.

显然该正方形的边长为 $(x+2)$, 故 $(x+2)^2 = 36$, 得 $x = 4$;

【小问 2 详解】

解: $x^3 + 9x^2 + 27x = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 9x$,

故需要准备图 (4) 中的几何体1块; 需要准备图 (5) 中的几何体3块; 需要准备图 (6) 中的几何体3块, 拼成的立体图形如图所示:



故需要准备图 (7) 中的几何体1块,

因此 $(x+3)^2 = 973 + 27 = 10^3$,

故方程 $x^3 + 9x^2 + 27x = 973$ 的一个正数根为 $x = 7$.