

2025 学年第一学期八年级数学专项作业

一、单项选择题 (本大题共有 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.12}$

B. $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$

C. $\sqrt{x^2+y^2}$

D. $\sqrt{24x}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了最简二次根式, 最简二次根式需满足根号下为整数或整式, 且不含分母或平方因子. 选项 A 根号下为小数, 可化为分数但非整数; 选项 B 根号下含分母; 选项 D 根号下含平方因子 (如 4), 可化简; 选项 C 根号下为整式且无平方因子, 故为最简.

【详解】 解: A、 $\sqrt{0.12} = \sqrt{\frac{12}{100}} = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 根号下非整数, 故不是最简;

B、 $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$, 根号下含分母, 故不是最简;

C、 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为整式, 且无平方因子, 故是最简;

D、 $\sqrt{24x} = \sqrt{4 \times 6x} = 2\sqrt{6x}$, 含平方因子 4, 可化简, 故不是最简.

故选: C.

2. $\sqrt{10}$ 的整数部分是 x , 小数部分是 y , 则 $y(x+\sqrt{10})$ 的值是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的估算和二次根式的性质, 由于 $3 < \sqrt{10} < 4$, 由此可确定 $\sqrt{10}$ 的整数部分 x , 接着确定小数部分 y , 然后代入所求代数式中恰好利用平方差公式计算出结果.

【详解】 解: $\because 9 < 10 < 16$,

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

$$\therefore x = 3, \quad y = \sqrt{10} - 3,$$

$$\therefore y(x + \sqrt{10}) = (\sqrt{10} - 3)(\sqrt{10} + 3) = 1$$

故选 A.

3. 下列方程不是一元二次方程的是 ()

A. $x^2 + 1 = 2x$

B. $(x-1)(x+1) = x(x+1)$

C. $2x^2 - 3x = 1 + x^2$

D. $0 = x^2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义；根据一元二次方程的定义（整式方程、一个未知数、未知数最高次数为 2、二次项系数不为 0），对每个选项进行化简和判断

【详解】 解： A、 $x^2 + 1 = 2x$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

B、 $(x-1)(x+1) = x(x+1)$ 即 $x^2 - 1 = x^2 + x$ ， $x = -1$ ，不是一元二次方程，故该选项符合题意；

C、 $2x^2 - 3x = 1 + x^2$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

D、 $0 = x^2$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

故选： B.

4. 下列关于 x 的方程中一定没有实数根的是 ()

A. $x^2 - x - 1 = 0$

B. $4x^2 - 6x + 9 = 0$

C. $x^2 = -x$

D. $x^2 - mx - 2 = 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据根的判别式的概念,求出 Δ 的正负即可解题.

【详解】 解: A. $x^2 - x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, $\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,

B. $4x^2 - 6x + 9 = 0$, $\Delta = 36 - 144 = -108 < 0$, $\therefore$ 原方程没有实数根,

C. $x^2 = -x$, $x^2 + x = 0$, $\Delta = 1 > 0$, $\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,

D. $x^2 - mx - 2 = 0$, $\Delta = m^2 + 8 > 0$, $\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,

故选 B.

【点睛】 本题考查了根的判别式,属于简单题,熟悉根的判别式的概念是解题关键.

5. 将 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 化简后的结果正确的答案是 ()

A. $-\sqrt{-a}$

B. $\sqrt{a}$

C. $-\sqrt{a}$

D. $\sqrt{-a}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质和化简，

根据二次根式的性质，被开方数必须非负，确定 a 的取值范围，再对原式进行化简.

【详解】 解： $\because \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 有意义，

$$\therefore -\frac{1}{a} \geq 0, \text{ 故 } a < 0.$$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{a^2\left(-\frac{1}{a}\right)} = -\sqrt{-a}$$

故选 A.

6. 已知 a, b 为任意实数，则下列等式成立的是()

A. $\sqrt{a^2} = a$ B. $\sqrt{a^4} = a^2$ C. $\sqrt{(-a)^2} = \pm a$ D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查二次根式的化简与性质，逐一判断各选项. A 项忽略 a 的符号可能为负；C 项平方根结果应非负数，不应有 $\pm$ ；D 项需 a, b 均非负才成立；B 项因 $a^4 \geq 0$ 且 $a^2 \geq 0$ ，等式恒成立.

【详解】 解： A. 当 $a < 0$ 时， $\sqrt{a^2} = |a| = -a \neq a$ ，不成立；

B. $\because$ 对于任意实数 a ， $a^4 \geq 0$ ，

$\therefore \sqrt{a^4} = |a^2|$. 又 $\because a^2 \geq 0$ ， $\therefore |a^2| = a^2$ ，故 $\sqrt{a^4} = a^2$ 恒成立.

C. $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ ，结果非负数，而 $\pm a$ 表示两个值，且当 $a > 0$ 时 $|a| = a \neq -a$ ，不成立；

D. 当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时， $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ 无实数意义，等式不成立.

$\therefore$ 只有 B 正确.

故选： B.

二、填空题 (本大题共有 16 题，每题 2 分，满分 32 分)

7. 当 a _____ 时， $\sqrt{2-a}$ 有意义.

【答案】 ≤ 2

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件，被开方数必须大于或等于零.

【详解】解：要使 $\sqrt{2-a}$ 有意义，则被开方数 $2-a \geq 0$ ，

解得 $a \leq 2$ ．

故答案为： ≤ 2 ．

8. 化简 $\sqrt{(3-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】

$$\pi - 3$$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简，解决本题的关键是判断 $(3-\pi)$ 的正负．

根据平方根的性质， $\sqrt{a^2} = |a|$ ，再结合绝对值的定义，对 $(3-\pi)$ 的符号进行判断即可化简．

【详解】解：根据 $3-\pi < 0$ ，

$$\therefore \sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3.$$

故答案为： $\pi - 3$ ．

9. 分母有理化： $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ．

【解析】

【分析】一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子．据此作答．

$$\text{【详解】解：} \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

故答案为 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ．

【点睛】本题考查二次根式的有理化．根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化．二次根式有理化主要利用了平方差公式，所以一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子．

10. $(1-\sqrt{2})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $3-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，完全平方公式；使用完全平方公式展开即可求解．

$$\text{【详解】解：} (1-\sqrt{2})^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

故答案为: $3-2\sqrt{2}$.

11. 将 $2.\dot{7}\dot{1}$ 写成分数_____

【答案】 $\frac{269}{99}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的应用; 设循环小数为未知数, 通过乘以100使循环部分对齐, 再相减消去循环部分, 解方程得到分数形式.

【详解】 解: 设 $x = 2.\dot{7}\dot{1}$, 则 $100x = 271.\dot{7}\dot{1}$.

由 $100x - x = 271.\dot{7}\dot{1} - 2.\dot{7}\dot{1}$, 得 $99x = 269$,

所以 $x = \frac{269}{99}$

故答案为: $\frac{269}{99}$.

12. 关于 x 的方程 $(a-3)x^{|a|-1} - 2ax + 3 = 0$ 是一元二次方程. 则 a 需满足条件是_____.

【答案】 $a = -3$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义, 根据一元二次方程的定义可得, 未知数的最高次数为2, 且二次项系数不为零.

【详解】 解: 由于方程是关于 x 的一元二次方程, 因此未知数 x 的最高指数 $|a|-1$ 必须等于2, 即 $|a|-1=2$, 解得 $|a|=3$, 所以 $a=3$ 或 $a=-3$.

同时, 二次项系数 $a-3 \neq 0$,

即 $a \neq 3$. 因此 $a = -3$.

故答案为: $a = -3$.

13. 一元二次方程 $(2x+1)(x-3) = x^2 + 1$ 的一般形式是_____.

【答案】 $x^2 - 5x - 4 = 0$

【解析】

【分析】 把方程化为 $ax^2 + bx + c = 0$ 的形式即可求解.

【详解】 $(2x+1)(x-3) = x^2 + 1$,

$2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 + 1$,

$$x^2 - 5x - 4 = 0.$$

故答案为: $x^2 - 5x - 4 = 0$.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的一般形式是: $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$) 特别要注意 $a \neq 0$ 的条件. 这是在做题过程中容易忽视的知识点. 在一般形式中 ax^2 叫二次项, bx 叫一次项, c 是常数项. 其中 a, b, c 分别叫二次项系数, 一次项系数, 常数项.

14. 已知方程 $(m - \sqrt{2})x^2 + 9x + m^2 - 2 = 0$ 的一个根为 0, 则 $m =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了方程的解的定义; 由于方程的一个根为 0, 将 $x = 0$ 代入方程, 得到关于 m 的方程, 求解即可.

【详解】解: 将 $x = 0$ 代入方程 $(m - \sqrt{2})x^2 + 9x + m^2 - 2 = 0$,

得: $(m - \sqrt{2}) \times 0^2 + 9 \times 0 + m^2 - 2 = 0$ 简化得: $m^2 - 2 = 0$

解得: $m = \sqrt{2}$ 或 $m = -\sqrt{2}$

故答案为: $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$.

15. 已知 $\sqrt{6} \approx 2.45$, $\sqrt{60} \approx 7.45$, 那么 $\sqrt{60000} \approx$ _____.

【答案】 245

【解析】

【分析】本题考查了求一个数的算术平方根; 利用平方根的性质, 将 $\sqrt{60000}$ 分解为 $\sqrt{6} \times 100$, 然后代入已知近似值 $\sqrt{6} \approx 2.45$ 进行计算.

【详解】解: 因为 $60000 = 6 \times 10000$, 且 $10000 = 100^2$,

所以 $\sqrt{60000} = \sqrt{6 \times 10000} = \sqrt{6} \times \sqrt{10000} = \sqrt{6} \times 100$.

已知 $\sqrt{6} \approx 2.45$,

因此 $\sqrt{60000} \approx 2.45 \times 100 = 245$.

故答案为 245.

16. 已知最简根式 $\sqrt{a^2 - 1}$ 与 $\sqrt{3a + 9}$ 是同类二次根式, 则 $a =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式，解一元二次方程；根据同类二次根式的定义，两个最简二次根式的被开方数必须相等，由此列出方程求解，并检验被开方数非负且根式为最简.

【详解】 解：由题意，得 $a^2 - 1 = 3a + 9$.

整理得 $a^2 - 3a - 10 = 0$,

因式分解得 $(a-5)(a+2) = 0$,

解得 $a = 5$ 或 $a = -2$.

当 $a = 5$ 时，被开方数 $a^2 - 1 = 24$ ， $3a + 9 = 24$ ，但 $\sqrt{24}$ 不是最简二次根式，与已知“最简根式”矛盾.

当 $a = -2$ 时，被开方数 $a^2 - 1 = 3$ ， $3a + 9 = 3$ ，且 $\sqrt{3}$ 是最简二次根式，符合条件.

故答案为 -2.

17. 若一元二次方程 $kx^2 - 2x + 1 = 0$ 有实数根，则 k _____.

【答案】 $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式的意义以及一元二次方程的定义；一元二次方程有实数根，需满足判别式 $\Delta \geq 0$ ，且二次项系数 $k \neq 0$.

【详解】 解： $\because$ 方程 $kx^2 - 2x + 1 = 0$ 为一元二次方程，

$\therefore k \neq 0$.

$\because$ 一元二次方程 $kx^2 - 2x + 1 = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 = 4 - 4k \geq 0$.

$\therefore k \leq 1$.

综上， $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$.

故答案为： $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$.

18. 已知方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 ，求 $x_1 \cdot x_2$ 的值为 _____

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程，根与系数的关系，解题的关键是熟练掌握一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根 x_1, x_2 , 满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 根据一元二次方程根与系数的关系进行解答即可.

【详解】解: 对于一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 其中二次项系数 $a = 1$, 常数项 $c = 6$, 根据根与系数的关系, 两根之积 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$.

故答案为: 6.

19. 若 $\sqrt{x+3} + (y-2)^2 = 0$, 那么 $x+y =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的非负性以及平方的非负性; 根据非负数的性质, 算术平方根和平方项均非负, 它们的和为零时, 每个部分都为零, 据此作答即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x+3} + (y-2)^2 = 0$,

$$\therefore \sqrt{x+3} = 0, (y-2)^2 = 0.$$

$$\therefore x+3=0, y-2=0,$$

$$\therefore x=-3, y=2.$$

$$\therefore x+y=-3+2=-1.$$

故答案为: -1.

20. 计算: $(\sqrt{15}+4)^{2007} \cdot (4-\sqrt{15})^{2007} =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方, 二次根式的混合运算; 观察到两个幂的指数相同, 利用幂的运算性质将原式化为积的乘方形式, 再应用平方差公式计算底数的乘积, 进而即可求解.

【详解】 解: 原式 $= (\sqrt{15}+4)^{2007} \cdot (4-\sqrt{15})^{2007}$

$$= [(\sqrt{15}+4)(4-\sqrt{15})]^{2007}$$

$$= [4^2 - (\sqrt{15})^2]^{2007}$$

$$= (16-15)^{2007}$$

$$= 1^{2007}$$

$$= 1.$$

故答案为：1.

21. $y = a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$ ，其中 $a = 99$ ，则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】197

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，通过将根号内的表达式化为完全平方形式，化简后根据 a 的值确定绝对值，从而求解.

【详解】解：由题意， $y = a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$. $1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2$,

$$\therefore \sqrt{1 - 2a + a^2} = \sqrt{(a - 1)^2} = |a - 1|.$$

当 $a = 99$ 时， $a - 1 = 98 > 0$,

故 $|a - 1| = a - 1$.

因此 $y = a + (a - 1) = 2a - 1$.

代入 $a = 99$ ，得 $y = 2 \times 99 - 1 = 198 - 1 = 197$.

故答案为：197.

22.

计

算

$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的混合运算；通过观察表达式结构，设 $S = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$ ，将原表达式用 S 表示，利用整式乘法展开并合并同类项，从而简化计算.

【详解】解：设 $S = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$ ， $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，

$$\therefore \text{原式} = (1 - S)(S + c) - (1 - S - c)S$$

$$= (S + c - S^2 - Sc) - (S - S^2 - Sc)$$

$$= S + c - S^2 - Sc - S + S^2 + Sc$$

$$= c.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

三、简答题 (每小题 4 分, 满分 32 分)

23. 计算

$$(1) \left(\sqrt{18} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right) \div \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \frac{1}{2}\sqrt{6} \times 4\sqrt{\frac{1}{12}} \div \frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$$

$$(3) \frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \sqrt{\frac{(x-3)^2}{y^3}} (x < 3, y > 0)$$

【答案】 (1)

$$2\sqrt{6} + 3$$

(2)

$$\sqrt{3}$$

(3)

$$3\sqrt{x}$$

(4)

$$\frac{(3-x)\sqrt{y}}{y^2}$$

【解析】

【分析】 此题考查二次根式的混合运算.

(1) 先化简括号中的二次根式及分母有理化, 除法化为乘法, 再合并同类二次根式, 计算乘法;

(2) 根据二次根式乘除法法则计算即可；

(3) 先化简二次根式，再计算加减法；

(4) 将分子、分母化简即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \left(\sqrt{18} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right) \div \frac{\sqrt{3}}{3} \\ & = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \times \sqrt{3} \\ & = (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times \sqrt{3} \\ & = 2\sqrt{6} + 3;\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2}\sqrt{6} \times 4\sqrt{\frac{1}{12}} \div \frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}} \\ & = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} \right) \sqrt{6 \times \frac{1}{12} \times \frac{2}{3}} \\ & = 3\sqrt{\frac{1}{3}} \\ & = \sqrt{3};\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}& \frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} \\ & = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \\ & = 3\sqrt{x};\end{aligned}$$

【小问 4 详解】

$$\begin{aligned}& \sqrt{\frac{(x-3)^2}{y^3}} (x\langle 3, y \rangle 0) \\ & = \frac{|x-3|}{|y|} \sqrt{\frac{1}{y}}\end{aligned}$$

$$= \frac{(3-x)\sqrt{y}}{y^2}.$$

24. 解方程式

$$(1) \quad (3x - \sqrt{3})^2 = 27$$

$$(2) \quad (y-1)(y+3) = 5$$

$$(3) \quad \frac{x-1}{3} + \frac{x^2+3}{2} - 2 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$(2) \quad y_1 = -4, y_2 = 2$$

$$(3) \quad x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1$$

$$(4) \quad x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程；

(1) 根据直接开平方法解一元二次方程；

(2) 先展开整理，再根据因式分解法解一元二次方程；

(3) 去分母后化为整式方程，再用因式分解法求解；

(4) 直接使用公式法求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (3x - \sqrt{3})^2 = 27,$$

$$\therefore 3x - \sqrt{3} = \pm 3\sqrt{3},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (y-1)(y+3) = 5,$$

$$\therefore y^2 + 2y - 3 = 5,$$

$$\therefore y^2 + 2y - 8 = 0,$$

$$\therefore (y+4)(y-2) = 0,$$

$$\therefore y+4=0 \text{ 或 } y-2=0,$$

$$\text{解得: } y_1 = -4, y_2 = 2;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \frac{x-1}{3} + \frac{x^2+3}{2} - 2 = 0$$

$$\therefore 2(x-1) + 3(x^2+3) - 12 = 0$$

$$\therefore 2x - 2 + 3x^2 + 9 - 12 = 0$$

$$\text{即 } 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\therefore (3x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore 3x+5=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1,$$

【小问 4 详解】

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\therefore a=3, b=-6, c=2, \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{解得: } x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

四、解答题 (本大题共有 5 题, 第 25-27 题 4 分, 第 28-29 题 6 分, 满分 24 分)

$$25. \text{ 当 } 3 < x < 5 \text{ 时, 化简: } |x-2| + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式性质, 熟练掌握二次根式性质, 是解题的关键. 根据 $3 < x < 5$, 然后再

根据二次根式性质，进行计算即可.

【详解】解： $\because 3 < x < 5$,

$$\begin{aligned} &\therefore |x-2| + \sqrt{x^2 - 10x + 25} \\ &= x - 2 + \sqrt{(x-5)^2} \\ &= x - 2 + |x-5| \\ &= x - 2 + 5 - x \\ &= 3. \end{aligned}$$

26. 已知: $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, 求 $x^2 - xy - 2y^2$ 的值.

【答案】 $-32 - 24\sqrt{15}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 因式分解; 首先将 x 和 y 的分母有理化, 化简得到 $x = 4 - \sqrt{15}$, $y = 4 + \sqrt{15}$. 然后计算 $x+y$ 和 $x-2y$ 的值, 利用因式分解 $x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y)$ 求值.

【详解】解: $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$,
 $y = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$,
 $\therefore x+y = (4-\sqrt{15}) + (4+\sqrt{15}) = 8$,
 $x-2y = (4-\sqrt{15}) - 2(4+\sqrt{15}) = 4-\sqrt{15}-8-2\sqrt{15} = -4-3\sqrt{15}$,
 $\therefore x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = (-4-3\sqrt{15}) \times 8 = -32 - 24\sqrt{15}$,
故答案为: $-32 - 24\sqrt{15}$.

27. 已知方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的两根为 x_1 和 x_2 , 求:

(1) $x_1 + x_2$;

(2) $x_1^2 + x_2^2$;

(3) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

【答案】(1) -2

(2) 10

(3) $\pm \frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根时，

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，能熟记根与系数的关系是解此题的关键.

(1) 由根与系数的关系可知， $x_1 + x_2 = -2$.

(2) 把 $x_1^2 + x_2^2$ 变形为 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ ，代入 $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -3$ 即可求解；

(3) 把 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 变形为 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$ ，根据 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ ，求得 $x_1 - x_2$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：由根与系数的关系可知， $x_1 + x_2 = -2$ ，

【小问 2 详解】

解：由根与系数的关系可知， $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -3$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-2)^2 - 2 \times (-3) = 4 + 6 = 10;$$

【小问 3 详解】

$$\because x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -3$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{\pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{x_1 x_2} = \frac{\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-3)}}{-3} = \pm \frac{4}{3}.$$

28. 据说著名数学家华罗庚有次搭乘飞机时，看到邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：一个数是 59319，求它的立方根. 华罗庚脱口而出，邻座的乘客十分惊奇，忙问计算的奥妙. 你知道华罗庚是怎样迅速又准确地计算出来的吗？

(1) 【发现与思考】 因为 $10^3 = 1000, 100^3 = 1000000, 1000 < 59319 < 1000000$ ，所以 $\sqrt[3]{59319}$ 是两位数. 因为 59319 的个位数字是 9，所以 $\sqrt[3]{59319}$ 的个位数字是_____. 因为 $30^3 = 27000, 40^3 = 64000$ ，所以 $\sqrt[3]{59319}$ 的十位数字是_____, 所以 $\sqrt[3]{59319} = \underline{\hspace{1cm}}$.

(2) 【运用并解决】 类比上述的【发现与思考】，推理求出 185193 的立方根.

【答案】(1) 9；3；39

(2) 57

【解析】

【分析】本题考查了求一个数的立方根；

(1) 根据推导过程即可完成填空；

(2) 结合 (1) 中的推导过程即可求解.

【小问 1 详解】

解：因为 59319 的个位数字是 9，所以 $\sqrt[3]{59319}$ 的个位数字是 9. 因为 $30^3 = 27000$ ， $40^3 = 64000$ ，所以 $\sqrt[3]{59319}$ 的十位数字是 3，所以 $\sqrt[3]{59319} = 39$.

故答案为：9；3；39.

【小问 2 详解】

解：∵ $10^3 = 1000$ ， $100^3 = 1000000$ ；

又∵ $1000 < 185193 < 1000000$ ；

∴ $\sqrt[3]{185193}$ 是两位数；

∵ 185193 的个位数字是 3；

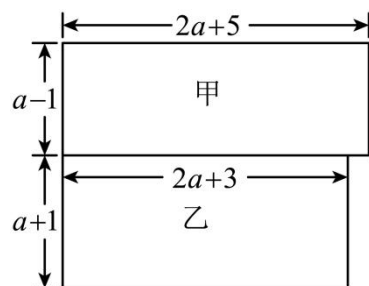
∴ $\sqrt[3]{185193}$ 的个位数字是 7.

∵ $50^3 = 125000$ ， $60^3 = 216000$ ；

∴ $\sqrt[3]{185193}$ 的十位数字是 5.

∴ $\sqrt[3]{185193} = 57$.

29. 为进一步推进绿美花都生态建设，某景区计划在相邻的甲、乙两块空地上修建一块长方形绿地（不能超过原有范围），作为网红打卡点. 已知甲、乙两块空地的各边长如图所示（单位为 m ，且 $a > 0$ ），它们的面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$.



(1) 甲空地的周长为 _____ m ；（用含 a 的代数式表示，结果化为最简）

(2) 请比较 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$ 的大小关系, 并说明理由;

(3) ①为了达到最佳效果, 景区要求新修建的长方形绿地面积要尽量大, 请你用含 a 的代数式表示出该长方形绿地的最大面积 S ;

②若 $S_{\text{甲}} = 225\text{m}^2$, 请求出①中 S 的值.

【答案】 (1) $(6a+8)$

(2) $S_{\text{甲}} < S_{\text{乙}}$, 理由见解析

(3) 460m^2

【解析】

【分析】 本题主要考查了列代数式和求代数式的值, 整式运算的应用, 因式分解法求解一元二次方程, 能根据题意用含 a 的代数式分别表示出图中各部分的面积是解题的关键.

(1) 根据长方形的周长公式即可解决问题.

(2) 利用作差法即可解决问题.

(3) ①根据题意, 得出当长方形的一边长为 $2a$, 另一边长为 $2a+3$ 时面积最大, 再结合长方形的周长公式进行表示即可.

②由甲的面积求得出 a 的值, 再代入①中进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: 由题得, 甲空地的周长为: $2(a-1+2a+5) = (6a+8)(\text{m})$;

故答案为: $(6a+8)$.

【小问 2 详解】

解: $S_{\text{甲}} < S_{\text{乙}}$.

理由: $\because S_{\text{甲}} = (a-1)(2a+5) = (2a^2+3a-5)(\text{m}^2)$,

$S_{\text{乙}} = (a+1)(2a+3) = (2a^2+5a+3)(\text{m}^2)$,

$\therefore S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = (2a^2+3a-5) - (2a^2+5a+3) = (-2a-8)(\text{m}^2)$,

$\because a > 0$,

$\therefore -2a-8 < 0$,

$\therefore S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} < 0$,

$$\therefore S_{\text{甲}} < S_{\text{乙}}.$$

【小问 3 详解】

解：当长方形的一边长为 $2a$ ，另一边长为 $2a+3$ 时面积最大，

此时长方形的面积 $S = 2a(2a+3) = (4a^2 + 6a)(\text{m}^2)$.

②当 $S_{\text{甲}} = 225\text{m}^2$ 时，

$$2a^2 + 3a - 5 = 225,$$

解得 $a_1 = 10$, $a_2 = -\frac{23}{2}$ (舍去).

则 $S = 4a^2 + 6a = 4 \times 10^2 + 6 \times 10 = 460(\text{m}^2)$.