

上海五浦汇实验学校 2025-2026 学年八年级上学期 10 月月考数学试题

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 下列各式中不成立的是（ ）

- A. $\sqrt{(-15)^2} = 15$ B. $\sqrt{(-15)^2} = -15$ C. $-\sqrt{(1-15)^2} = -14$ D. $\pm\sqrt{(-15)^2} = \pm 15$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了求一个的平方根以及算术平方根，解题的关键是熟练掌握平方根以及算术平方根的定义.

根据平方根和算术平方根的定义求解即可.

【详解】解： $\sqrt{(-15)^2} = 15$ ， $-\sqrt{(1-15)^2} = -14$ ， $\pm\sqrt{(-15)^2} = \pm 15$ ，

故 A、C、D 正确，不符合题意，B 错误，符合题意；

故选：B

2. 若关于 x 的方程 $(m-2)x^{|m|} - 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程，则（ ）

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = \pm 2$ D. $m \neq \pm 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，掌握一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$) 是解题的关键.

根据一元二次方程的定义，列出关于 m 的方程求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $(m-2)x^{|m|} - 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程，

$\therefore |m| = 2$ 且 $m - 2 \neq 0$ ，

$\therefore m = -2$.

故答案为：B.

3. 下列各式中最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{3a^3}$ B. $\sqrt{1.5a}$ C. $\sqrt[3]{5a}$ D. $\sqrt{a^2 - 4}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的定义. 解题的关键是根据最简二次根式的定义, 最简二次根式必须满足两个条件:

- (1) 被开方数不含分母;
- (2) 被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

根据最简二次根式的定义解答即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{3a^3}$, 被开方数含能开得尽方的因式, 不是最简二次根式, 故该选项不符合题意;

B、 $\sqrt{1.5a} = \sqrt{\frac{3}{2}a}$, 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 故该选项不符合题意;

C、 $\sqrt[3]{5a}$ 的根指数是 3, 不是二次根式, 故该选项不符合题意;

D、 $\sqrt{a^2-4}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

故选: D.

4. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $ax^2+bx+c=0$ B. $x^2+\frac{1}{x}=4$ C. $\sqrt{3}x^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $x^2-y=1$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了一元二次方程的定义, 只含有一个未知数, 且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程, 一元二次方程有三个特点: 只含有一个未知数; 未知数的最高次数是 2; 是整式方程, 据此进行逐项分析, 即可作答.

【详解】解: A、 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

B、 $x^2+\frac{1}{x}=4$ 不是整式方程, 不是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

C、 $\sqrt{3}x^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是一元二次方程, 故该选项符合题意;

D、 $x^2-y=1$ 含有两个未知数, 不是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

故选: C

5. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 三条边的长, 那么方程 $cx^2+(a+b)x+\frac{c}{4}=0$ 的根的情况是().

- A. 没有实数根 B. 有两个不相等的正实数根 C. 有两个不相等的负实数根

根

D. 有两个异号实数根

【答案】C

【解析】

【详解】判断上述方程的根的情况，只要看根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值的符号，结合三角形三边关系即可作出判断.

解：在此方程中 $\Delta=b^2-4ac=(a+b)^2-4c\times\frac{c}{4}=(a+b)^2-c^2$

$\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 三条边的长

$\therefore a > 0, b > 0, c > 0. c < a+b$, 即 $(a+b)^2 > c^2$

$\therefore \Delta = (a+b)^2 - c^2 > 0$

故方程有两个不相等的实数根.

又 $\because$ 两根的和是 $-\frac{a+b}{c} < 0$, 两根的积是 $\frac{c}{4} = \frac{1}{4} > 0$

$\therefore$ 方程有两个不等的负实根.

故选 C

总结：一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta > 0$? 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0$? 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0$? 方程没有实数根.

三角形三边关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

6. 比大小： $\sqrt{11}-\sqrt{9}$ _____ $\sqrt{12}-\sqrt{8}$, $\sqrt{11}-\sqrt{9}$ _____ $\sqrt{15}-\sqrt{13}$, 正确的是 ()

A. $>; >$

B. $>; <$

C. $<; >$

D. $<; <$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分母有意义，实数比较大小，先整理 $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2}$, 再得出 $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2} > \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2} < \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2}$, 结合一个数的倒数越大, 这个数反而越小, 进行作答即可.

【详解】解：依题意， $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{(\sqrt{11}-\sqrt{9})(\sqrt{11}+\sqrt{9})} = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2}$ ，

$$\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{8}}{(\sqrt{12}-\sqrt{8})(\sqrt{12}+\sqrt{8})} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}，$$

$$\therefore \sqrt{11}+\sqrt{9} > \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2} > \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{则 } \sqrt{11}-\sqrt{9} < \sqrt{12}-\sqrt{8}；$$

依题意， $\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{(\sqrt{15}-\sqrt{13})(\sqrt{15}+\sqrt{13})} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{15-13} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2}$ ，

$$\therefore \sqrt{11}+\sqrt{9} < \sqrt{15}+\sqrt{13}，$$

$$\therefore \frac{\sqrt{11}+\sqrt{9}}{2} < \frac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2}，$$

$$\therefore \sqrt{11}-\sqrt{9} > \sqrt{15}-\sqrt{13}，$$

故选：C.

二、填空题：（本大题共 16 题，每空 2 分，满分 34 分）

7. $\sqrt{256}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 根据算术平方根和平方根的定义求解即可.

【详解】 解： $\sqrt{256} = 16$ 的平方根是 ± 4 ，

故答案为： ± 4 .

【点睛】 本题主要考查了求一个数的算术平方根和平方根，熟知算术平方根和平方根的定义是解题的关键.

8. 不等式 $(4-3\sqrt{2})x+6 \geq 0$ 的解集是_____；

【答案】 $x \leq 12+9\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式，分母有理化. 按照解不等式的步骤，先移项，再将系数化为 1，最后对结果进行化简即可.

【详解】解： $(4-3\sqrt{2})x+6\geq 0$ ，

移项，得： $(4-3\sqrt{2})x\geq -6$ ，

系数化为 1，得： $x\leq \frac{-6}{4-3\sqrt{2}} = \frac{-6\times(4+3\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})\times(4+3\sqrt{2})} = \frac{-6\times(4+3\sqrt{2})}{-2} = 12+9\sqrt{2}$ ，

即 $x\leq 12+9\sqrt{2}$ ，

故答案为： $x\leq 12+9\sqrt{2}$ 。

9. 无限小数化为分数： $2.1\dot{3}\dot{6} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

【答案】 $\frac{47}{22}$

【解析】

【分析】 本题考查的是利用一元一次方程把循环小数化为分数，掌握“建立方程的方法”是解本题的关键。设 $2.1\dot{3}\dot{6} = x$ ，则 $10x = 21.\dot{3}\dot{6}$ ，设 $y = 21.\dot{3}\dot{6}$ ，求得 $y = \frac{2115}{99} = \frac{705}{33}$ ，由 $10x = y$ 得到 $x = \frac{y}{10} = \frac{705}{330} = \frac{47}{22}$ ，即可求出答案。

【详解】解： 设 $2.1\dot{3}\dot{6} = x$ ，则 $10x = 21.\dot{3}\dot{6}$ ，

设 $y = 21.\dot{3}\dot{6}$

$\therefore 100y = 2136.\dot{3}\dot{6}$

$\therefore 100y - y = 99y = 2115$ ，

解得 $y = \frac{2115}{99} = \frac{705}{33}$ ，

$\therefore 10x = y$

$\therefore x = \frac{y}{10} = \frac{705}{330} = \frac{47}{22}$ ，

$\therefore 2.1\dot{3}\dot{6} = \frac{47}{22}$ ，

故答案为： $\frac{47}{22}$ 。

10. 写一个关于 x 的一元二次方程使其满足：二次项系数为 2，两根之和是 3，两根之积是 $-\frac{1}{2}$ ，这样的方程是： $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

【答案】 $2x^2 - 6x - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的定义和根与系数的关系. 设一元二次方程为 $2x^2 + bx + c = 0$, 则

$$-\frac{b}{2} = 3, \frac{c}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ 解得 } b = -6, c = -1, \text{ 即可得到答案.}$$

【详解】 解: 关于 x 的一元二次方程使其满足: 二次项系数为 2, 两根之和是 3, 两根之积是 $-\frac{1}{2}$,

设一元二次方程为 $2x^2 + bx + c = 0$,

$$\text{则 } -\frac{b}{2} = 3, \frac{c}{2} = -\frac{1}{2},$$

解得 $b = -6, c = -1$,

$\therefore$ 一元二次方程为: $2x^2 - 6x - 1 = 0$,

故答案为: $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

11. 在实数范围内分解因式: $2x^2 + 4xy - 3y^2 =$ _____

【答案】 $2(x + y + \frac{\sqrt{10}}{2}y)(x + y - \frac{\sqrt{10}}{2}y)$

【解析】

【分析】 此题考查分解因式, 先配方, 然后利用平方差公式分解即可.

【详解】 解: $2x^2 + 4xy - 3y^2 = 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - \frac{5}{2}y^2\right) = 2\left[(x + y)^2 - \frac{5}{2}y^2\right] = 2(x + y + \frac{\sqrt{10}}{2}y)(x + y - \frac{\sqrt{10}}{2}y),$

故答案为: $2(x + y + \frac{\sqrt{10}}{2}y)(x + y - \frac{\sqrt{10}}{2}y)$.

12. 设 $3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 x , 小数部分为 y , 则 $x + y + \frac{2}{y}$ 的值是 _____.

【答案】 $\frac{8 - \sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了无理数的估算, 二次根式的混合计算, 先估算出 $1 < \sqrt{2} < 2$, 进而推出

$1 < 3 - \sqrt{2} < 2$, 则可确定 $x = 1$, $y = 2 - \sqrt{2}$, 据此代值计算即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$,

$$\therefore 1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$\therefore -2 < -\sqrt{2} < -1,$$

$$\therefore 1 < 3 - \sqrt{2} < 2,$$

$\therefore 3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 x , 小数部分为 y ,

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore y = 3 - \sqrt{2} - 1 = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore x + y + \frac{2}{y}$$

$$= 1 + 2 - \sqrt{2} + \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= 3 - \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}$$

$$= 3 - \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4 - 2}$$

$$= 3 - \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{8 - \sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $\frac{8 - \sqrt{2}}{2}$.

13. 若两个最简二次根式 $\sqrt{a^2 - 3}$ 和 $2\sqrt{-a - 1}$ 是同类二次根式, 那么 $a =$ _____;

【答案】 -2

【解析】

【分析】 此题考查了同类二次根式的知识, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握同类二次根式的根指数、被开方数相同.

根据同类二次根式的根指数、被开方数相同可得出方程, 解出即可得出答案.

【详解】解：∵最简二次根式 $\sqrt{a^2-3}$ 与 $2\sqrt{-a-1}$ 是同类二次根式，

$$\therefore a^2-3=-a-1,$$

$$\text{解得： } a_1=-2, a_2=1.$$

当 $a_2=1$ 时，二次根式 $\sqrt{a^2-3}$ 和 $2\sqrt{-a-1}$ 无意义，故舍去，

$$\text{所以， } a=-2,$$

故答案为：-2.

14. 若关于 x 的方程 $(k-1)x^2-\sqrt{3k-1}x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围_____.

$$\text{【答案】 } \frac{1}{3} \leq k \leq 3 \text{ 且 } k \neq 1$$

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义，根据二次项系数非零及根的判别式 $\Delta \geq 0$ ，列出关于 k 的一元一次不等式组是解题的关键. 根据二次项系数非零、二次根式有意义及根的判别式 $\Delta \geq 0$ ，即可得出关于 k 的一元一次不等式组，解之即可得出 k 的取值范围.

【详解】解：∵方程 $(k-1)x^2-\sqrt{3k-1}x+1=0$ 有两个实数根，

$$\therefore \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta = 3k-1-4(k-1) \geq 0, \\ 3k-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{1}{3} \leq k \leq 3 \text{ 且 } k \neq 1,$$

$$\text{即 } k \text{ 的取值范围为 } \frac{1}{3} \leq k \leq 3 \text{ 且 } k \neq 1.$$

$$\text{故答案为： } \frac{1}{3} \leq k \leq 3 \text{ 且 } k \neq 1.$$

15. 某病毒的直径约80~120nm, 1nm为十亿分之一米. 将120nm用科学记数法表示为_____米;

$$\text{【答案】 } 1.2 \times 10^{-7}$$

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法“将一个数表示成 $a \times 10^n$ ”的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法”、负整数指数幂，熟记科学记数法的定义是解题关键. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

根据科学记数法的定义和负整数指数幂即可得.

【详解】解：1nm为十亿分之一米，

$$\therefore 120\text{nm} = 120 \times 10^{-9}\text{m} = 1.2 \times 10^{-7}\text{m},$$

故答案为: 1.2×10^{-7} .

16. 若代数式 $\frac{\sqrt{2-x} + x^0}{|x-1|}$ 在实数范围内有意义, 那么 x 的取值范围是_____;

【答案】 $x \leq 2$ 且 $x \neq 0$, 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了分母不为 0, 零次幂, 二次根式有意义的条件, 根据代数式 $\frac{\sqrt{2-x} + x^0}{|x-1|}$ 在实数范围内有意义, 得 $2-x \geq 0, x \neq 0, x-1 \neq 0$, 再解出 x 的取值范围, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 代数式 $\frac{\sqrt{2-x} + x^0}{|x-1|}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore 2-x \geq 0, x \neq 0, x-1 \neq 0,$$

$$\therefore x \leq 2 \text{ 且 } x \neq 0, \text{ 且 } x \neq 1,$$

故答案为: $x \leq 2$ 且 $x \neq 0$, 且 $x \neq 1$.

17. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ 的两根之和与两根之积互为相反数, 那么 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根和系数的关系, 一元二次方程根的判别式, 相反数的定义, 设方程的两个根为 x_1, x_2 , 由根和系数的关系得 $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1 x_2 = m^2 - 2$, 进而得到 $2(m+1) + m^2 - 2 = 0$, 解方程求出 m 的值, 再根据根的判别式求出 m 的取值范围即可求解, 掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】 解: 设方程的两个根为 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 - 2,$$

$\because$ 两根之和与两根之积互为相反数,

$$\therefore 2(m+1) + m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{整理得, } m^2 + 2m = 0,$$

$$\text{解得 } m = 0 \text{ 或 } m = -2,$$

$$\text{又 } \because \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 2) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -\frac{3}{2},$$

$$\therefore m = 0,$$

故答案为: 0.

18. 化各式为最简二次根式: ① $\sqrt{\frac{8a^4}{27x^3y}} (x < 0) =$ _____; ② $(a-1)\sqrt{\frac{-1}{a-1}} =$ _____;

【答案】 ①. $-\frac{2a^2\sqrt{6xy}}{9x^2y}$ ②. $-\sqrt{1-a}$

【解析】

【分析】 本题考查化简二次根式, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 化简即可.

【详解】 解: ① $\sqrt{\frac{8a^4}{27x^3y}} (x < 0) = \sqrt{\frac{2 \times (2a^2)^2}{3 \times 3^2 \cdot x^2 \cdot xy}} (x < 0) = \frac{2a^2}{-3x} \sqrt{\frac{2}{3xy}} = -\frac{2a^2}{3x} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 3xy}}{3xy} = -\frac{2a^2\sqrt{6xy}}{9x^2y}$

② $(a-1)\sqrt{\frac{-1}{a-1}} = -\sqrt{\frac{-1}{a-1} \cdot (a-1)^2} = -\sqrt{1-a}.$

故答案为: $-\frac{2a^2\sqrt{6xy}}{9x^2y}, -\sqrt{1-a}.$

19. 若二次三项式 $kx^2 + (6k+1)x + 9k+1$ 在实数范围内可以因式分解, 则常数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{8}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 由题意可得 $\Delta \geq 0$, 解不等式求出 k 的取值范围即可, 理解题意是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 二次三项式 $kx^2 + (6k+1)x + 9k+1$ 在实数范围内可以因式分解,

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\text{即 } (6k+1)^2 - 4 \times k \times (9k+1) \geq 0,$$

$$\text{解得 } k \geq -\frac{1}{8},$$

$$\text{又 } \because k \neq 0,$$

$$\therefore \text{常数 } k \text{ 的取值范围是 } k \geq -\frac{1}{8} \text{ 且 } k \neq 0.$$

20. 已知 $x = \frac{3}{2\sqrt{3}-3}$, 则 $x^3 - 6x^2 + 10x - 3$ 的值为_____;

【答案】 $26\sqrt{3} + 36$ ## $36 + 26\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查代数式求值，二次根式的混合运算，分母有理化. 通过分母有理化可得 $x = 2\sqrt{3} + 3$ ，将原式变形为 $x[(x-3)^2 + 1] - 3$ ，再将 $x = 2\sqrt{3} + 3$ 代入求值即可.

【详解】 解： $x = \frac{3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{3(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = 2\sqrt{3} + 3,$

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = x(x^2 - 6x + 10) - 3 = x[(x-3)^2 + 1] - 3$$

将 $x = 2\sqrt{3} + 3$ 代入，得：

$$\text{原式} = (2\sqrt{3} + 3) \times [(2\sqrt{3} + 3 - 3)^2 + 1] - 3$$

$$= (2\sqrt{3} + 3) \times 13 - 3$$

$$= 26\sqrt{3} + 39 - 3$$

$$= 26\sqrt{3} + 36.$$

故答案为： $26\sqrt{3} + 36$.

21. 若 $a + 6\sqrt{3} = (m + n\sqrt{3})^2$ ，且 a 、 m 、 n 均为正整数，则 a 的值是_____.

【答案】 12 或 28

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式在二次根式混合运算中的运用，熟记完全平方公式，以及分类讨论思想的运用是解答的关键.

先利用完全平方公式将 $(m + n\sqrt{3})^2$ 展开，再等式左右两边对应项相等得到关于 m 、 n 的方程组，进而可求解.

【详解】 解： $\because a + 6\sqrt{3} = (m + n\sqrt{3})^2 = m^2 + 3n^2 + 2mn\sqrt{3},$

$$\therefore a = m^2 + 3n^2, \quad 2mn = 6,$$

$$\therefore mn = 3,$$

$\because a$ 、 m 、 n 均为正整数，

$$\therefore \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases},$$

$$\text{当 } \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases} \text{ 时, } a = m^2 + 3n^2 = 3^2 + 3 \times 1^2 = 12,$$

$$\text{当 } \begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases} \text{ 时, } a = m^2 + 3n^2 = 1^2 + 3 \times 3^2 = 28,$$

综上所述, a 的值为 12 或 28,

故答案为: 12 或 28.

22. 已知关于 x 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中, ①若 $2a + 3c = 0$, 那么方程有两个不相等的实数根;

②若 $b = -2a - \frac{1}{2}c$, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$; ③若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 两根为 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 2$, 则 $2ab + \frac{c^2}{2} = 0$;

④若 $b < 0, a + b > 0, a - c < 0$, 那么方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 一定无解. 其中正确的是_____.

【答案】①②③④

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系, 一元二次方程的根的判别式. 对于一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0), \text{ 若 } x_1, x_2 \text{ 是方程的两个根, 那么 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不相等的实数根, 当 $\Delta = 0$ 时, 有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 没有实数根, 由此逐项判断即可.

【详解】解: 由已知得 $\Delta = b^2 - 4ac (a \neq 0)$,

$$\text{①由 } 2a + 3c = 0 \text{ 得 } c = -\frac{2a}{3},$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a \cdot \left(-\frac{2a}{3}\right) = b^2 + \frac{8}{3}a^2,$$

$$\because a \neq 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 + \frac{8}{3}a^2 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根; 故①正确;

$$\text{②若 } b = -2a - \frac{1}{2}c,$$

$$\text{则 } b^2 - 4ac = \left(-2a - \frac{1}{2}c\right)^2 - 4ac = \left(2a - \frac{1}{2}c\right)^2 \geq 0, \text{ 故②正确;}$$

③若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 两根为 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 2$,

$$\text{则 } -\frac{b}{a} = -1 + 2 = 1, \quad \frac{c}{a} = -1 \times 2 = -2,$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \left(2ab + \frac{c^2}{2} \right) = 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} \right)^2 = 2 \times (-1) + \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 0,$$

$$\therefore a \neq 0,$$

$$\therefore 2ab + \frac{c^2}{2} = 0; \text{ 故③正确;}$$

④若 $b < 0, a + b > 0, a - c < 0$, 则 $b < 0 < |b| < a < c$,

$$\therefore ac > |b|^2 = b^2,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 一定无解. 故④正确,

综上所述, 正确的是①②③④.

故答案为: ①②③④.

三、计算题: (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

23. 计算: $(\sqrt{3} - 1)^2 + \frac{\sqrt{27} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - |\sqrt{3} - 2| - (\pi - 3.14)^0$.

【答案】 $3 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算. 先计算完全平方式, 化简二次根式, 绝对值, 零次幂, 最后进行加减运算.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (\sqrt{3} - 1)^2 + \frac{\sqrt{27} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - |\sqrt{3} - 2| - (\pi - 3.14)^0 \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - (2 - \sqrt{3}) - 1 \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2 + \sqrt{3} - 1 \\ &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

24. 化简: $-6\sqrt{\frac{2m^2-2n^2}{a^3}} \div \frac{2}{3}\sqrt{\frac{m-n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{m+n}} \cdot \sqrt{-a}.$

【答案】 $9a\sqrt{-2a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，根据二次根式的运算法则和有意义的条件化简即可，掌握二次根式的运算法则及有意义的条件是解题的关键.

【详解】 解：由题意可得， $a < 0$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= -6\sqrt{\frac{2m^2-2n^2}{a^3}} \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{m+n}} \cdot \sqrt{-a} \\ &= -6 \times \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2(m^2-n^2)}{a^3} \times \frac{a^2}{m-n} \times \frac{a^3}{m+n} \times (-a)} \\ &= -9 \sqrt{\frac{2(m+n)(m-n)}{a^3} \times \frac{a^2}{m-n} \times \frac{a^3}{m+n} \times (-a)} \\ &= -9\sqrt{-2a^3} \\ &= 9a\sqrt{-2a}. \end{aligned}$$

25. $4(3x-1)^2 - 9(3x+1)^2 = 0$ (用因式分解法)

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{15}, x_2 = -\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了运用因式分解法进行解一元二次方程，先把原式整理得 $[2(3x-1)+3(3x+1)][2(3x-1)-3(3x+1)] = 0$ ，再化简括号内的运算得 $(15x+1)(-5-3x) = 0$ ，令每个因式为 0 进行解方程，即可作答.

【详解】 解： $\because 4(3x-1)^2 - 9(3x+1)^2 = 0$ ，

$$\therefore [2(3x-1)]^2 - [3(3x+1)]^2 = 0,$$

$$\therefore [2(3x-1)+3(3x+1)][2(3x-1)-3(3x+1)] = 0,$$

整理得 $(15x+1)(-5-3x) = 0$ ，

$$\therefore 15x+1=0 \text{ 或 } -5-3x=0,$$

解得 $x_1 = -\frac{1}{15}, x_2 = -\frac{5}{3}$.

26. $3x - 2x^2 = -1$ (用配方法)

【答案】 $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用配方法解一元二次方程，先把二次项系数化为1，再利用配方法解答即可求解，掌握配方法是解题的关键.

【详解】 解： $\because 3x - 2x^2 = -1$,

$$\therefore 2x^2 - 3x = 1,$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{9}{16},$$

$$\text{即} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16},$$

$$\therefore x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}.$$

27. 解方程： $2(x-1)^2 = 3-3x$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，把右式移到左边，再利用因式分解法解答即可求解，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

【详解】 解： $\because 2(x-1)^2 = 3-3x$,

$$\therefore 2(x-1)^2 + 3(x-1) = 0,$$

$$\therefore (x-1)[2(x-1)+3] = 0,$$

$$\text{即} (x-1)(2x+1) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } 2x+1=0,$$

$$\therefore x_1=1, \quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

$$28. \text{ 解方程: } 2x^2 + (3m-n)x - 2m^2 + 3mn - n^2 = 0$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{m-n}{2}, x_2 = n-2m$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法进行解一元二次方程，先把 $-2m^2 + 3mn - n^2$ 整理得 $(2m-n)(-m+n)$ ，再得出 $[2x + (-m+n)][x + (2m-n)] = 0$ ，令每个因式为 0，进行列式计算，即可作答。

$$\text{【详解】 解: } \because 2x^2 + (3m-n)x - 2m^2 + 3mn - n^2 = 0,$$

$$\therefore 2x^2 + (3m-n)x + (-2m^2 + 3mn - n^2) = 0,$$

$$\text{则 } 2x^2 + (3m-n)x + (2m-n)(-m+n) = 0,$$

$$\therefore [2x + (-m+n)][x + (2m-n)] = 0,$$

$$\therefore 2x + (-m+n) = 0 \text{ 或 } x + (2m-n) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{m-n}{2}, x_2 = n-2m$$

三、解答题：(本大题共 3 题，6+6=12，满分 24 分)

29. 若 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{x-a} = \sqrt{a-y} - \sqrt{a(y-a)}$ ，其中 a 、 x 、 y 为两两不等的实数，求 $\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值。

$$\text{【答案】 } \frac{1}{3}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件，通过分析左右两边四个二次根式有意义得到 a 的值是解题的关键。

已知等式右边成立， $x-a \geq 0$ ， $a-y \geq 0$ ，即 $y-a \leq 0$ ；由等式左边成立可知 $a=0$ ，已知等式可变为

$$\sqrt{x} = \sqrt{-y}，\text{移项、开平方得 } x = -y，\text{利用代入法求式子的值即可。}$$

$$\text{【详解】 解: } \because \sqrt{a(x-a)} + \sqrt{x-a} = \sqrt{a-y} - \sqrt{a(y-a)} \text{ 在实数范围内成立,}$$

$$\therefore x-a \geq 0, \quad a-y \geq 0, \quad \text{即 } y-a \leq 0, \quad x-a \leq 0,$$

$$\text{又} \because a(y-a) \geq 0, \quad a(x-a) \geq 0,$$

$$\therefore a = 0, \text{ 原等式可变为 } \sqrt{x} = \sqrt{-y},$$

$$\therefore x = -y,$$

$$\therefore \frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3y^2 - y^2 - y^2}{y^2 + y^2 + y^2} = \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3}.$$

30. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 若 ABC 为等腰三角形, $AB = 3\text{cm}$, 另外两条边是方程的根, 求 ABC 的周长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 7cm 或 11cm

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 解一元二次方程, 等腰三角形的定义, 构成三角形的条件:

(1) 根据根的判别式证明即可;

(2) 先解方程得到 $x_1 = m + 1$, $x_2 = m - 1$, 再根据等腰三角形的两条边是方程的解, 得到 $x = 3$ 是方程的解, 据此求出方程的两个根, 进而确定 ABC 的三边长, 结合构成三角形的条件求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 由题意得, $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 1) = 4 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

解: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$,

$$[x - (m + 1)][x - (m - 1)] = 0,$$

解得 $x_1 = m + 1$, $x_2 = m - 1$,

当 $m + 1 = 3$ 时, 解得 $m = 2$, $m - 1 = 2 - 1 = 1$,

此时等腰三角形三边分别为 1, 3, 3,

$$\because 1 + 3 > 3,$$

$\therefore$ 此时能构成三角形,

$$1 + 3 + 3 = 7(\text{cm}),$$

$\therefore ABC$ 的周长为 7cm;

当 $m-1=3$ 时, 解得 $m=4$, $m+1=4+1=5$,

此时等腰三角形三边分别为 3, 3, 5,

$\because 3+3>5$,

$\therefore$ 此时能构成三角形,

$5+3+3=11(\text{cm})$,

$\therefore ABC$ 的周长为 11cm;

综上所述, ABC 的周长为 7cm 或 11cm.

31. 我们定义: 两根都为整数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0, a, b, c \text{ 均为整数})$ 称为“幸运方程”,

两整数根称为“幸运根”, 代数式 $\frac{4ac-b^2}{2a}$ 的值为该“幸运方程”的“幸运数”. 用 $F(a, b, c)$ 表示, 即

$F(a, b, c) = \frac{4ac-b^2}{2a}$. 若有另一个“幸运方程” $px^2+qx+r=0$ ($p \neq 0, p, q, r$ 均为整数) 的“幸运数”

为 $F(p, q, r)$, 若 $r \cdot F(a, b, c) = c \cdot F(p, q, r)$, 则称 $F(a, b, c)$ 与 $F(p, q, r)$ 互为“开心数”.

(1) 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+1)x+m=0$ 是一个“幸运方程”.

①当 $m=2$ 时, 该幸运方程的“幸运数”是_____;

②若该“幸运方程”的“幸运数”是 -2 , 则 m 的值为_____;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-3)x+m^2-4m-5=0$ (m 为整数, 且 $4 < m < 15$) 是“幸运方程”, 求 m 的值.

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+m+1=0$ 与 $x^2+(n-1)x-n=0$ (m, n 均为整数) 都是“幸运方程”, 且其“幸运数”互为“开心数”, 直接写出 n 的值.

【答案】(1) ① $-\frac{1}{2}$; ② -1 或 3

(2) 5 或 13 (3) 0

【解析】

【分析】(1) ①把 $m=2$ 代入方程 $x^2-(m+1)x+m=0$ 得到方程 $x^2-3x+2=0$, 根据“幸运数”的定义即可求解; ②根据“幸运数”的定义可得方程 $m^2-2m-3=0$, 解方程可求得 m 的值;

(2) 由 $x^2-(2m-3)x+m^2-4m-5=0$ 为“幸运方程”, 可得两根都为整数, 推出 $\Delta=4m+29$ 为完全

平方数, 再结合 m 为整数, 即可求出 m 的值;

(3) 根据 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 的解为整数, 得出 m 的值, 进而得出 $F(1, -m, m+1) = -\frac{1}{2}$, 再根据 $-n \cdot F(1, -m, m+1) = (m+1) \cdot F(1, n-1, -n)$ 列方程, 将 m 的值代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: ①当 $m = 2$ 时, $x^2 - (m+1)x + m = 0$ 为 $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$$F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{2a} = \frac{4 \times 1 \times 2 - (-3)^2}{2 \times 1} = -\frac{1}{2},$$

即该幸运方程的“幸运数”是 $-\frac{1}{2}$;

②当该“幸运方程”的“幸运数”是 -2 时,

$$F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{2a} = \frac{4m - [-(m+1)]^2}{2 \times 1} = -2,$$

整理得 $m^2 - 2m - 3 = 0$,

解得 $m_1 = -1$, $m_2 = 3$,

即 m 的值为 -1 或 3 ;

故答案为: ① $-\frac{1}{2}$; ② -1 或 3 .

【小问 2 详解】

解: $\because x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4m - 5 = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m-3)]^2 - 4(m^2 - 4m - 5) = 4m + 29,$$

$\because 4 < m < 15$,

$$\therefore 45 < 4m + 29 < 89,$$

$\because x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4m - 5 = 0$ 为“幸运方程”,

$\therefore$ 两根都为整数,

$\therefore \Delta = 4m + 29$ 为完全平方数,

$\therefore 4m + 29$ 为 49 或 64 或 81 ,

$\therefore m$ 的值为 5 或 $\frac{35}{4}$ 或 13 ,

$\because m$ 为整数,

$\therefore m$ 的值为 5 或 13 ;

【小问3 详解】

解: $\because x^2 - mx + m + 1 = 0$ 为“幸运方程”,

$\therefore$ 两根都为整数,

设方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 的两个根分别为 p, q ,

$$\text{则 } pq = m + 1, \quad p + q = m,$$

$$\therefore pq = p + q + 1,$$

$$\therefore pq - p - q = 1,$$

$$\therefore (p-1)(q-1) = 2,$$

$$\because p, q \text{ 都为整数}, \quad 2 = 1 \times 2 = 2 \times 1 = (-1) \times (-2) = (-2) \times (-1),$$

$$\text{当 } p-1=1, \quad q-1=2 \text{ 时}, \quad p=2, \quad q=3, \text{ 此时 } m=2+3=5,$$

$$\text{当 } p-1=2, \quad q-1=1 \text{ 时}, \quad p=3, \quad q=2, \text{ 此时 } m=3+2=5,$$

$$\text{当 } p-1=-1, \quad q-1=-2 \text{ 时}, \quad p=0, \quad q=-1, \text{ 此时 } m=0-1=-1,$$

$$\text{当 } p-1=-2, \quad q-1=-1 \text{ 时}, \quad p=-1, \quad q=0, \text{ 此时 } m=-1+0=-1,$$

综上所述, m 的值为 5 或 -1,

$$x^2 - mx + m + 1 = 0 \text{ 的“幸运数”为: } F(1, -m, m+1) = \frac{4 \times 1 \times (m+1) - (-m)^2}{2 \times 1} = \frac{-m^2 + 4m + 4}{2},$$

$$\text{当 } m=5 \text{ 时}, \quad F(1, -m, m+1) = F(1, -5, 5+1) = \frac{-5^2 + 4 \times 5 + 4}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{当 } m=-1 \text{ 时}, \quad F(1, -m, m+1) = F(1, 1, 0) = \frac{-(-1)^2 + 4 \times (-1) + 4}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{综上所述, } x^2 - mx + m + 1 = 0 \text{ 的“幸运数”为 } F(1, -m, m+1) = -\frac{1}{2};$$

$$x^2 + (n-1)x - n = 0 \text{ 的“幸运数”为: } F(1, n-1, -n) = \frac{4 \times 1 \times (-n) - (n-1)^2}{2 \times 1} = \frac{-n^2 - 2n - 1}{2} = -\frac{(n+1)^2}{2},$$

$$\because F(1, -m, m+1) \text{ 与 } F(1, n-1, -n) \text{ 互为“开心数”},$$

$$\therefore -n \cdot F(1, -m, m+1) = (m+1) \cdot F(1, n-1, -n),$$

$$\therefore -n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = (m+1) \cdot \left[-\frac{(n+1)^2}{2}\right],$$

$$\text{当 } m=5 \text{ 时, } \frac{n}{2} = -3(n+1)^2,$$

$$\text{解得 } n_1 = -\frac{2}{3}, \quad n_2 = -\frac{3}{2} \quad (\text{都不是整数, 舍去});$$

$$\text{当 } m=-1 \text{ 时, } \frac{n}{2} = 0,$$

$$\text{解得 } n=0,$$

综上所述, n 的值为 0.

【点睛】 本题考查了一元二次方程相关知识, 涉及解一元二次方程, 一元二次方程根与系数的关系等, 理解“幸运方程” “幸运数” “开心数” 的定义是解题的关键.