

初二年级第一学期数学阶段练习 (10)

(满分 100 分, 时间 50 分钟)

一、选择题 (每题 4 分, 共 16 分)

1. 下列各式中与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{20}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{24}$ D. $\sqrt{0.2}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键, 先将各项进行化简, 再利用同类二次根式的定义逐一判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项错误;

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 此项正确;

C、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项错误;

D、 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项错误;

故选: B.

2. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 6x - 7 = 0$, 则方程变形为 ()

- A. $(x-6)^2 = 43$ B. $(x+6)^2 = 43$ C. $(x-3)^2 = 16$ D. $(x+3)^2 = 16$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了配方法解一元二次方程. 使用配方法将方程转化为完全平方形式, 即可作答.

【详解】 解: $\because x^2 - 6x - 7 = 0$,

$$\therefore x^2 - 6x = 7,$$

$$\therefore \text{两边加 } 9 \text{ 得 } x^2 - 6x + 9 = 7 + 9,$$

$$\text{即 } (x-3)^2 = 16,$$

故选: C.

3. 下列给出的三条线段中, 不能构成直角三角形的是 ()

A. 4、8、 $4\sqrt{3}$

B. 4、8、 $4\sqrt{5}$

C. 7、24、25

D. 7、14、15

【答案】D

【解析】

【分析】根据勾股定理的逆定理对四个选项进行逐一判断即可.

【详解】解: A、 $\because 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 64 + 48 = 8^2$, $\therefore$ 能够成直角三角形, 故本选项可构成直角三角形;

B、 $\because 4^2 + 8^2 = 80 \neq (4\sqrt{5})^2$, $\therefore$ 不能够成直角三角形, 故本选项错误;

C、 $\because 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$, $\therefore$ 能够成直角三角形, 故本选项错误;

D、 $\because 7^2 + 14^2 = 245 \neq 15^2$, $\therefore$ 不能够成直角三角形, 故本选项正确.

故选: D.

【点睛】本题考查的是如果三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形就是直角三角形.

4. 已知下列命题中:

①有两条边分别相等的两个直角三角形全等;

②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等;

③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等;

④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】解: ①由于 SSA 不能判定三角形全等, 则有两边分别相等的两个直角三角形不一定全等, 故原命题是假命题;

②由于满足 ASA, 则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等, 故原命题是真命题;

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等, 故原命题是假命题;

④由于两等腰三角形顶角相等, 则他们的底角对应相等, 再结合底相等, 满足 ASA, 故原命题是真命题.

其中真命题的个数是 2 个.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点, 灵活应用相关知

识成为解答本题的关键.

二、填空题 (每题 4 分, 共 28 分)

5. 计算: $2\sqrt{3} \times 4\sqrt{0.5} =$ _____.

【答案】 $4\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘法, 根据 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$ 计算, 再利用二次根式的性质化简即可.

【详解】 解: $2\sqrt{3} \times 4\sqrt{0.5} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$

故答案为: $4\sqrt{6}$.

6. 已知 $a^2 + ab - 6b^2 = 0$, 求 $\frac{a-b}{a+b}$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$ 或 2

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程, 分式的求值. 通过因式分解方程 $a^2 + ab - 6b^2 = 0$ 得到 a 与 b 的关系, 再代入分式 $\frac{a-b}{a+b}$ 求值, 即可作答.

【详解】 解: 方程 $a^2 + ab - 6b^2 = 0$ 可因式分解为 $(a+3b)(a-2b) = 0$,

解得 $a = -3b$ 或 $a = 2b$ (其中 $b \neq 0$, 否则分式无意义).

当 $a = 2b$ 时, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2b-b}{2b+b} = \frac{b}{3b} = \frac{1}{3}$;

当 $a = -3b$ 时, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{-3b-b}{-3b+b} = \frac{-4b}{-2b} = 2$.

综上: $\frac{a-b}{a+b}$ 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 2;

故答案为: $\frac{1}{3}$ 或 2

7. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是 ____.

【答案】 $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【解析】

【分析】 由一元二次方程的定义可得 $m \neq 0$, 再利用一元二次方程根的判别式列不等式 $\Delta = (-2)^2 - 4m > 0$, 再解不等式即可得到答案.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } \Delta = (-2)^2 - 4m > 0,$$

$$\text{由 } \Delta = (-2)^2 - 4m > 0,$$

$$\text{可得 } 4m < 4,$$

$$\therefore m < 1,$$

$$\text{综上: } m < 1 \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\text{故答案为: } m < 1 \text{ 且 } m \neq 0.$$

【点睛】本题考查的是一元二次方程的定义及一元二次方程根的判别式，掌握利用一元二次方程根的判别式求解字母系数的取值范围是解题的关键。

8. 若直角三角形斜边上的高是 3，斜边上的中线是 6，则这个直角三角形的面积是 _____.

【答案】18

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求得斜边长为 12，再利用三角形的面积公式求解即可。

【详解】解：∵直角三角形斜边上的中线是 6，

∴斜边长为 12，

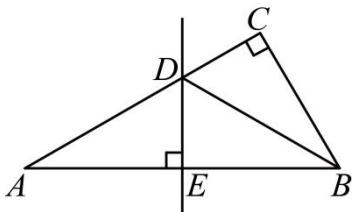
∴斜边上的高是 3，

$$\therefore \text{这个直角三角形的面积是 } \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18,$$

故答案为：18.

【点睛】本题考查直角三角形斜边中线性质的应用，熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解答的关键。

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 D ， $CD = 10\text{cm}$ ， $AD = 20\text{cm}$ ，则 $\angle A =$ _____.



【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】如图所示，连接 CE ，由线段垂直平分线的性质可得 $AD = BD = 20\text{cm}$ ， $AE = BE$ ，利用勾股定

理求出 $BC = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，进而求出 $AB = 20\sqrt{3}\text{cm}$ ，由直角三角形的性质得到 $CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，据此可证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形，得到 $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 。

【详解】解：如图所示，连接 CE ，

$\because DE$ 垂直平分 AB ，

$\therefore AD = BD = 20\text{cm}$ ， $AE = BE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中，由勾股定理得 $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20\sqrt{3}\text{cm}$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AE = BE$ ，

$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，

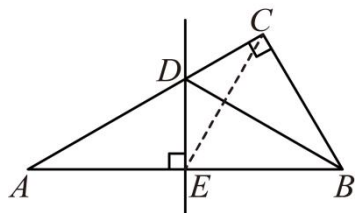
$\therefore CE = BE = BC$ ，

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

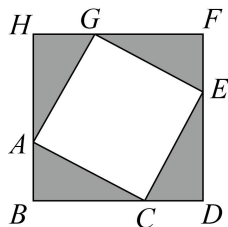
$\therefore \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

故答案为： 30° 。



【点睛】本题主要考查了线段垂直平分线的性质，勾股定理，三角形内角和定理，等边三角形的性质与判定，直角三角形的性质等等，证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形是解题的关键。

10. 在证明“勾股定理”时，可以将4个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形（如图所示， $AB < BC$ ）。如果小正方形的面积是25，大正方形的面积为49，那么 $\frac{BC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】首先求出小正方形的边长和大正方形的边长，利用勾股定理列方程，然后再求出 AB 和 BC 的长.

【详解】解：∵小正方形的面积是 25，

$$\therefore AC=5,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore \text{设 } AB=CD=x,$$

$$\therefore \text{大正方形的面积为 } 49,$$

$$\therefore BD=7,$$

$$\therefore BC+CD=7,$$

$$\therefore BC=7-x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中: } AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore x^2 + (7-x)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = 4, x_2 = 3,$$

$$\therefore AB < BC,$$

$$\therefore x < 7-x,$$

$$\therefore x < \frac{7}{2},$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore AB = 3, BC = 4,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

【点睛】此题主要考查了利用勾股定理列方程，解一元二次方程，三角形全等的性质，掌握勾股定理列出方程是解题的关键.

11. 我们规定：如果一个三角形一边上的高等于这条边，那么这个三角形叫做“等高底”三角形，这条边叫做这个三角形的“等底”. 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 与 l_2 之间的距离是 3，“等高底” $\triangle ABC$ 的“等底” BC 在直线 l_1 上 (点 B 在点 C 的左侧)，点 A 在直线 l_2 上， $AB = \sqrt{2}BC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 A 、 C 的对应点分别为点 A_1 、 C_1 ，那么 A_1C 的长为_____.

_____ l_2

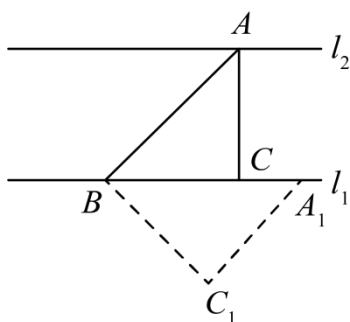
_____ l_1

【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}-3$

【解析】

【分析】 根据题意分情况画出相应图，然后根据旋转性质找到线段对应关系求解即可.

【详解】 解：当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

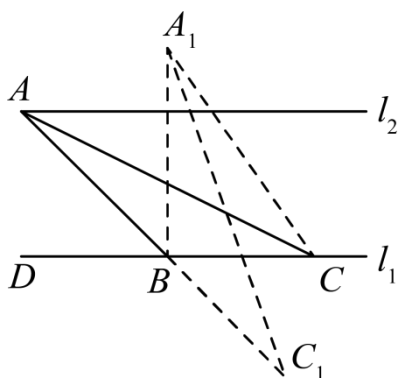
$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$A_1C = A_1B - BC = 3\sqrt{2} - 3;$$

当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ, \angle ABC = 135^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle ABA_1 = 45^\circ$, $A_1B = AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle A_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_1BC \text{ 中, } A_1C = \sqrt{A_1B^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2} - 3$.

【点睛】本题考查了旋转性质、勾股定理、二次根式的运算等知识，分情况讨论并画出相应图像是解题关键.

三、解答题 (共 56 分)

12. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}.$

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，二次根式的性质. 先结合二次根式的性质化简，再运算加减法，即可作答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{1}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12} \\ &= \frac{1 \times (\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2) \times (\sqrt{3}-2)} - |1-\sqrt{3}| + 2\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3} \\ &= 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

13. 设 m 是不小于 -1 的实数，关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 ,

(1) 若 $x_1^2 + x_2^2 = 6$, 求 m 值;

(2) 求 $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值.

【答案】 (1) $m = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$

(2) 10

【解析】

【分析】 (1) 先根据根的判别式求出 $-1 \leq m < 1$ ，再根据根与系数的关系化简求解即可；

(2) 根据根与系数的关系化简 $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 为 $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} = 2(m^2 - 3m + 1)$ ，再转化为二次函数求最值问题即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 ，

$$\therefore \Delta = 4(m-2)^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = -4m + 4 > 0,$$

解得： $m < 1$ ，

$$\therefore -1 \leq m < 1,$$

$$\because \text{方程 } x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -2(m-2), x_1 x_2 = m^2 - 3m + 3,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-2)^2 - 2(m^2 - 3m + 3) = 6,$$

整理得： $m^2 - 5m + 2 = 0$ ，

$$\text{解得： } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore -1 \leq m < 1,$$

$$\therefore m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解： } \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} = \frac{m(x_1^2 - x_1^2 x_2 + x_2^2 - x_2^2 x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{m[x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2)]}{1 + x_1 x_2 - (x_1 + x_2)},$$

$$\therefore \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} = \frac{m(2m^3 - 8m^2 + 8m - 2)}{1 + m^2 - 3m + 3 + 2m - 4} = \frac{m(2m^3 - 8m^2 + 8m - 2)}{m^2 - m}$$

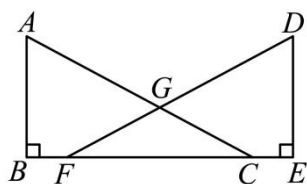
$$\therefore \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} = \frac{2m(m-1)(m^2 - 3m + 1)}{m(m-1)} = 2(m^2 - 3m + 1) = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} \quad (-1 \leq m < 1),$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $m = \frac{3}{2}$, $2 > 0$,

$\therefore$ 当 $m = -1$ 时, 式子取得最大值为 $2\left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 10$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系, 根的判别式, 因式分解, 二次函数求最值, 难度较大, 正确化简计算是解题的关键.

14. 如图, 点 B 、 F 、 C 、 E 在同一直线上, $AB \perp BE$, 垂足为 B , $DE \perp BE$, 垂足为 E , AC 、 DF 相交于点 G , 且 $AC = DF$, $BF = CE$. 求证: $FG = CG$.



【答案】 见详解

【解析】

【分析】 首先证明借助 HL 证明 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DEF$, 由全等三角形的性质可知 $\angle ACB = \angle DFE$, 然后由“等角对等边”即可证明 $FG = CG$.

【详解】 证明: $\because AB \perp BE$, $DE \perp BE$,

$$\therefore \angle B = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because BF = CE,$$

$$\therefore BF + FC = CE + FC,$$

$$\therefore BC = EF,$$

又 $\because AC = DF$,

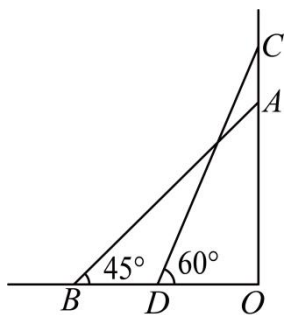
$$\therefore Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DEF (HL),$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\therefore FG = CG.$$

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定等知识, 熟练掌握相关性质和判定是解题关键.

15. 如图, 走廊上有一梯子以 45° 的倾斜角斜靠在墙上, 墙与地面垂直, 梯子影响了行人的行走, 工人将梯子挪动位置, 使其倾斜角变为 60° . 如果梯子的长为 4 米, 那么行走的通道拓宽了多少米? (结果保留根号)

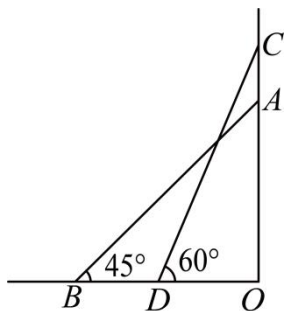


【答案】行走的通道拓宽了 $(2\sqrt{2}-2)$ 米

【解析】

【分析】此题主要考查勾股定理解三角形，在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方；也考查了含 30° 度角直角三角形的性质，在直角三角形中， 30° 度角所对的直角边长度为斜边的一半；根据勾股定理分别求出两次梯子距墙根的距离，求差得解.

【详解】解： $\because AB = CD = 4$ ， $\angle ABO = 45^\circ$ ，



$$\therefore AO = BO, \quad BO^2 + AO^2 = AB^2,$$

$$\therefore BO = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle CDO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCO = 30^\circ,$$

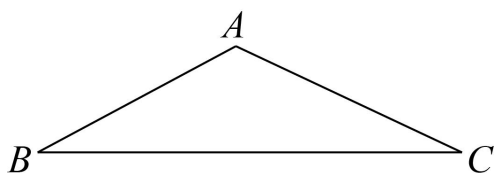
$$\therefore DO = \frac{1}{2}CD = 2$$

$$\text{则 } BD = BO - DO = 2\sqrt{2} - 2.$$

答：行走的通道拓宽了 $(2\sqrt{2}-2)$ 米.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B = 30^\circ$.

- (1) 在 BC 边上求作一点 N ，使得 $AN = BN$ ；（不要求写作法，但要保留作图痕迹）
- (2) 在 (1) 的条件下，求证： $CN = 2BN$.



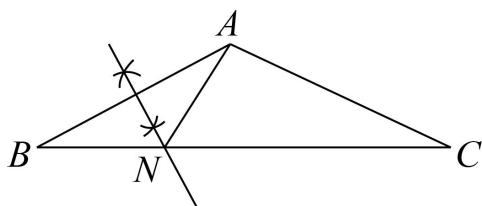
【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【详解】(1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 N ，点 N 即为所求；

(2) 根据等腰三角形的性质计算出 $\angle C$ 的度数，再计算出 $\angle CAN$ 的度数，然后根据在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，可得 $CN = 2AN$ ，进而得到 $CN = 2BN$ 。

【解答】(1) 解：如图，点 N 即为所求；



(2) 证明：连接 AN 。

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2\angle B = 120^\circ.$$

$$\because AN = BN,$$

$$\therefore \angle BAN = \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle NAC = \angle BAC - \angle NAB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

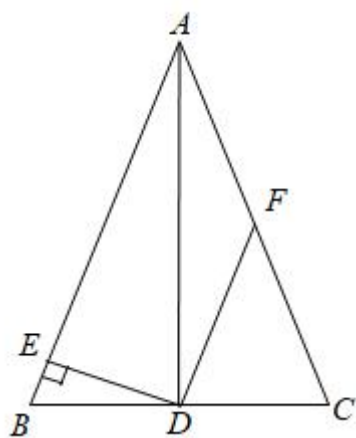
$$\therefore CN = 2AN.$$

$$\therefore CN = 2BN.$$

【点睛】此题主要考查了作图，等腰三角形的性质以及含 30° 度角的直角三角形，关键是正确画出图形，掌握在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半。

17. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， D 是 BC 的中点， $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \parallel AB$ 交 AC 于 F 。

求证： $DE = \frac{1}{2} DF$ 。



【答案】 答案见解析

【解析】

【分析】 利用等腰三角形三线合一的性质得知 AD 是 $\triangle ABC$ 的对称轴，利用三角形中位线定理推出 F 点是线段 AC 的中点，取 AB 的中点 G，利用三角形中位线定理推出 $DF=DG$ ， $\angle DGB=\angle BAC=30^\circ$ ，再利用含 30° 度角的直角三角形的性质即可证明结论.

【详解】 $\because AB=AC$ ，D 是 BC 的中点， $\angle BAC=30^\circ$ ，

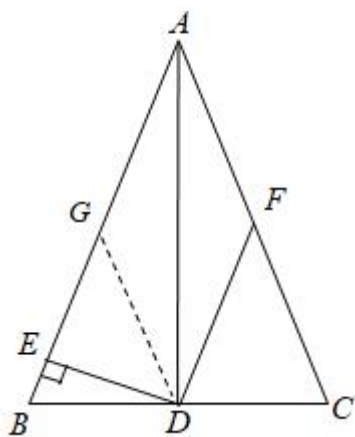
$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的对称轴， $AD \perp BC$ ，

$\therefore DF \parallel AB$ ，且 D 是 BC 的中点，

$\therefore F$ 点是线段 AC 的中点，

$\therefore DF=\frac{1}{2}AC$ ，

取 AB 的中点 G，连接 DG，



$\therefore DG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DG=\frac{1}{2}AC=DF$ ， $\angle DGB=\angle BAC=30^\circ$ ，

$\therefore DE \perp AB$ ，

$$\therefore \angle GED = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中, $\angle DGE = 30^\circ$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} DF.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质, 直角三角形斜边上的中线的性质, 三角形中位线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 作出辅助线证得 $DF = DG$, $\angle DGB = \angle BAC = 30^\circ$ 是解题的关键.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 D 、 E 在线段 AB 上.

(1) 如图 1, 若 $CD = CE$, 求证: $AD = BE$;

(2) 如图 2, 若 $\angle DCE = 45^\circ$, 求证: $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 如图 3, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $\angle BPC = 135^\circ$, 设 $AP = a$ 、 $BP = b$ 、 $CP = c$, 请直接写出 a , b , c 之间的数量关系.

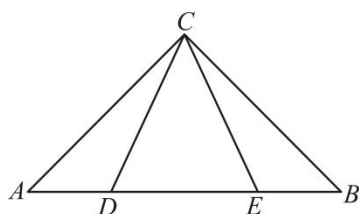


图1

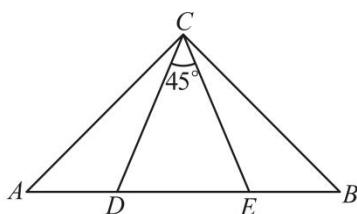


图2

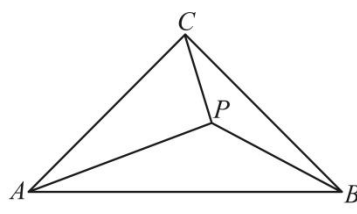


图3

【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析; (3) $a^2 = b^2 + 2c^2$, 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由 $CA = CB$ 得 $\angle A = \angle B$, 由 $CD = CE$ 得 $\angle CEA = \angle CDB$, 则 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 得 $AE = BD$, 即可转化为 $AD = BE$;

(2) 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 联结 EF , 则 $BF = AD$, 证明 $\triangle FCE \cong \triangle DCE$, 得 $FE = DE$, 再证明 $\angle EBF = 90^\circ$, 则 $FE^2 = BF^2 + BE^2$, 即可证得 $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 联结 PG , 则 $BG = AP$, $GC = PC$, $\angle PCG = 90^\circ$, 所以 $PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2$, 再证明 $\angle BPG = 90^\circ$, 则 $BG^2 = BP^2 + PG^2$, 可证得 $AP^2 = BP^2 + 2PC^2$, 即 $a^2 = b^2 + 2c^2$.

【详解】 解: (1) 证明: 如图 1, $\because CA = CB$,

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$$\because CD = CE,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\therefore AE - DE = BD - DE,$$

$$\therefore AD = BE.$$

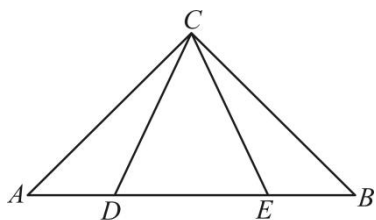


图1

(2) 证明: 如图 2, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 联结 EF ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad CA = CB,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle A = 45^\circ,$$

由旋转得 $CF = CD$, $\angle BCF = \angle ACD$,

$$\because \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle BCF + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCE,$$

$$\because CE = CE,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE \quad (SAS),$$

$$\therefore FE = DE,$$

$$\because \angle CBF = \angle A = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore FE^2 = BF^2 + BE^2,$$

$$\because BF = AD,$$

$$\therefore DE^2 = AD^2 + BE^2.$$

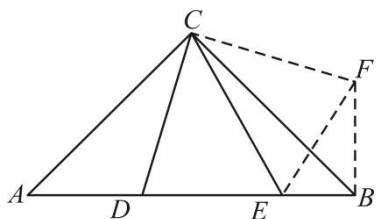


图2

$$(3) \quad a^2 = b^2 + 2c^2,$$

理由如下:

如图 3, 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 联结 PG ,

由旋转得 $GC = PC$, $\angle PCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CPG = \angle CGP = 45^\circ, \quad PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2,$$

$$\because \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BPG = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BG^2 = BP^2 + PG^2,$$

$$\therefore BG = AP,$$

$$\therefore AP^2 = BP^2 + 2PC^2,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 2c^2.$$

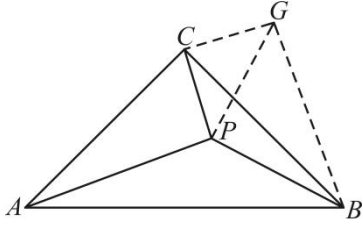


图3

【点睛】此题考查等腰三角形的性质、等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质、旋转的性质、勾股定理等知识，根据旋转的性质作辅助线是解题的关键.