

## 2025 学年八年级数学上学期 12 月自适应练习

### 一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列方程中是关于  $x$  的一元二次方程的是 ( )

A.  $x^2 = -2$

B.  $ax^2 + bx + c = 0$  (其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是常数)

C.  $x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$

D.  $(x-2)(x-4) = x^2 - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义（只含一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式方程），逐项判断即可。

【详解】解：A.  $x^2 = -2$ ，是整式方程，只含一个未知数  $x$ ，且最高次数为 2，故是一元二次方程；

B.  $ax^2 + bx + c = 0$ ， $a$ 、 $b$ 、 $c$  为常数，但  $a$  可能为 0，当  $a = 0$  时不是二次方程，故不一定是一元二次方程；

C.  $x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$ ，含有  $\frac{1}{x}$  项，不是整式方程，故不是一元二次方程；

D.  $(x-2)(x-4) = x^2 - 1$ ，化简为  $-6x + 9 = 0$ ，是一元一次方程，故不是一元二次方程，

故选：A.

2. 下列各式中，是最简二次根式的是 ( )

A.  $\sqrt{0.3}$

B.  $\sqrt{x+y^3}$

C.  $\sqrt{24}$

D.  $\sqrt{xy^3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的定义；根据被开方数为整数或整式，且不含能开得尽方的因数或因式，逐一判断各选项。

【详解】解：A、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}}$ ，被开方数含分母，不是最简；

B、 $\sqrt{x+y^3}$ ，被开方数为整式，且无平方因式或因数，故为最简；

C、 $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$ ，被开方数含平方因数4，不是最简；

D、 $\sqrt{xy^3} = \sqrt{xy \cdot y^2} = |y|\sqrt{xy}$ ，被开方数含平方因式 $y^2$ ，不是最简.

故选 B.

3. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ，点  $D$  是斜边  $AB$  上的中点，则  $CD$  为 ( )

A. 2

B. 4

C. 8

D. 不能确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上中线的性质.

根据直角三角形斜边上中线斜边的一半作答即可.

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ，点  $D$  为斜边  $AB$  上的中点，

$\therefore CD$  是斜边  $AB$  的中线，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

故选：A.

4. 某公司第一季度总共生产 80 万部 5G 手机. 已知 5G 手机的下载速度比 4G 手机每秒多 95MB，若下载一部 1000MB 的电影，5G 手机比 4G 手机快 190 秒，设 5G 手机的下载速度为  $x$ MB/s，则正确的方程是 ( )

A.  $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+95} = 190$

B.  $\frac{1000}{x-95} - \frac{1000}{x} = 190$

C.  $\frac{1000}{x+95} - \frac{1000}{x} = 190$

D.  $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x-95} = 190$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查根据实际问题列分式方程，根据“5G 手机比 4G 手机快 190 秒”列方程即可.

【详解】解：设 5G 手机下载速度为  $x$ MB/s，

则 4G 手机下载速度为  $(x-95)$ MB/s

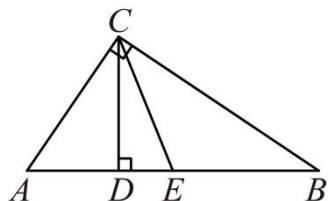
5G 下载时间为  $\frac{1000}{x}$  秒，

4G 下载时间为  $\frac{1000}{x-95}$  秒，

所以方程为  $\frac{1000}{x-95} - \frac{1000}{x} = 190$ ,

故选 B.

5. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ . 线段  $CD$ 、 $CE$  分别为  $\triangle ABC$  的高和中线, 下列说法中错误的是 ( )



A.  $\angle B = \angle ACD$

B.  $\angle BCE = \angle ACD$

C.  $2CE = AB$

D.  $2AC = AB$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的高和中线的性质, 熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键; 根据三角形高和中线的性质, 结合图形对选项一一判断即可求解.

【详解】 解: 线段  $CD$ 、 $CE$  分别为  $\triangle ABC$  的高和中线,

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$\therefore \angle B = \angle ACD$ , 故 A 选项正确, 不符合题意;

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$ , 故 B 选项正确, 不符合题意;

$$\because CE = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore AB = 2CE$ , 故选项 C 正确, 不符合题意;

根据题中条件无法推出  $AC = AE = CE$ , 故无法推出  $2AC = AB$ , 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

6. 下列命题中: ①若  $a$ 、 $c$  异号, 则一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  一定有实数根; ②若  $b = a + c$ ,

则一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  一定有两个实数根; ③等腰三角形一腰上的高与另一腰所成的夹角

为  $50^\circ$ ，则这个等腰三角形的顶角度数为  $40^\circ$ ；④一元二次方程  $-x^2 + 3x + 4 = 0$ ，由根与系数的关系，可得  $x_1 + x_2 = 3$ ， $x_1 x_2 = -4$ 。正确的个数是（ ）

- A. 1个                      B. 2个                      C. 3个                      D. 4个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系、一元二次方程根的判别式、等腰三角形性质，需注意分类讨论。

当  $a$ 、 $c$  异号时， $\Delta > 0$ ，则根据根的判别式的意义可对①进行判断；当  $b = a + c$  时，则  $\Delta = (a - c)^2 \geq 0$ ，则根据根的判别式的意义可对②进行判断。根据等腰三角形的性质对③进行判断；根据根与系数的关系即可判断④。

【详解】解：对于一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

当  $a$ 、 $c$  异号时， $ac < 0$ ，所以  $\Delta > 0$ ，所以此时方程  $ax^2 + bx + c = 0$  一定有实数根，所以①正确；

若  $b = a + c$  时， $\Delta = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2 \geq 0$ ，则方程  $ax^2 + bx + c = 0$  一定有两实数根，所以②正确；

等腰三角形一腰上的高与另一腰夹角  $50^\circ$ ，顶角可能为  $40^\circ$ （锐角）或  $140^\circ$ （钝角），不唯一，故③错误；

一元二次方程  $-x^2 + 3x + 4 = 0$ ，由根与系数的关系，可得  $x_1 + x_2 = -\frac{3}{-1} = 3$ ， $x_1 x_2 = \frac{4}{-1} = -4$ 。故④正确；

$\therefore$  正确的结论有 3 个，

故选：C。

## 二、填空题：（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

7. 如果代数式  $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$  有意义，则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】本题考查代数式有意义，根据二次根式的被开方数为非负数，分式的分母不为 0，进行求解即可。

【详解】解：由题意，得： $x - 2 > 0$ ，

$\therefore x > 2$ ；

故答案为： $x > 2$

8. 化简： $\sqrt{25ab^2} (a \geq 0, b > 0) =$ \_\_\_\_\_。

【答案】  $5b\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简，利用算术平方根的性质，将根式内的乘积分解为各因数的算术平方根的乘积，并根据条件  $b > 0$  简化表达式.

【详解】 解：因为  $b > 0$ ，所以  $\sqrt{b^2} = b$ ，

$$\text{则 } \sqrt{25ab^2} = \sqrt{25} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b^2} = 5 \times \sqrt{a} \times b = 5b\sqrt{a},$$

故答案为  $5b\sqrt{a}$ .

9. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + mx - 6 = 0$  的一个根为 2，则另一个根是\_\_\_\_\_.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查已知一元二次方程的一个根，求参数的值以及另一个根，将已知根代入到一元二次方程是解题的关键. 将一元二次方程已知的根  $x = 2$  代入到一元二次方程中，可求得  $m$  的值，将  $m$  的值代入一元二次方程解方程，即可求得另一个根.

【详解】 解：∵  $x$  的一元二次方程  $x^2 + mx - 6 = 0$  的一个根为 2，

$$\therefore 2^2 + 2m - 6 = 0,$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{方程为 } x^2 + x - 6 = 0,$$

$$\text{用因式分解法可得 } (x-2)(x+3) = 0,$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } x+3=0,$$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -3,$$

∴ 另一个根是 -3.

故答案为：-3.

10. 在实数范围内因式分解：  $-3x^2 + 2x + 2 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $-3\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查实数范围内的因式分解，配方法的应用，首先提出 -3，然后利用配方法和平方差公式写

成因式分解的形式.

【详解】解:  $-3x^2 + 2x + 2$

$$= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2\right]$$

$$= -3\left(x - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$= -3\left(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right).$$

故答案为:  $-3\left(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right).$

11. 某校八年级举行篮球比赛, 每个班级都要和其他班级比赛一次, 且两个班级之间只比赛一次, 结果一共进行了 21 场比赛, 设八年级共有  $x$  个班级, 那么列出方程是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2}x(x-1) = 21$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的应用, 每个班级需与其他  $(x-1)$  个班级比赛, 但每场比赛被计算了两次, 因此总比赛场数为  $\frac{1}{2}x(x-1)$ , 根据总场数为 21, 列出方程即可.

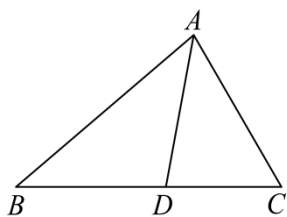
【详解】 解: 设八年级共有  $x$  个班级,

根据题意, 每两个班级之间进行一场比赛, 总比赛场数为  $\frac{x(x-1)}{2}$ ;

因此, 方程为  $\frac{1}{2}x(x-1) = 21$ ,

故答案为:  $\frac{1}{2}x(x-1) = 21$ .

12. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $\angle BAC$  的平分线,  $AB = 12\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ , 则  $CD : BD =$ \_\_\_\_\_.



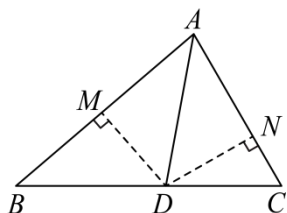
【答案】 5:6

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的性质，通过高相等，构建线段比例之间的关系是解题关键.

过点  $D$  分别向  $AB$ ， $AC$  作垂线，根据角平分线的性质定理，得到垂线段相等，从而利用垂线段相等，得到  $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = AB : AC$ ，再利用  $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = BD : CD$  求解即可.

【详解】 解：如图，过点  $D$  分别作  $DM \perp AB$ ， $DN \perp AC$ ，垂足分别为  $M$ ， $N$ ，



$\because AD$  是  $\angle BAC$  的平分线，

$\therefore DM = DN$ ，

设点  $A$  到直线  $BC$  的距离为  $h$ ，

$$\text{则 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} DM \cdot AB = \frac{1}{2} h \cdot BD, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} DN \cdot AC = \frac{1}{2} h \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{h \cdot CD}{h \cdot BD} = \frac{DN \cdot AC}{DM \cdot AB}, \quad \text{即 } \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

故答案为：5:6.

13. 已知  $x_1$ 、 $x_2$  是一元二次方程  $2x^2 - x - 8 = 0$  的两个实数根，则  $x_1^2 + x_2^2$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{33}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是掌握如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$

的两根为  $x_1$ ， $x_2$ ，则  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  .

根据一元二次方程根与系数的关系，先求出两根之和与两根之积，再通过恒等式

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$  计算所求值.

【详解】解：对于一元二次方程  $2x^2 - x - 8 = 0$ ，其中  $a = 2$ ， $b = -1$ ， $c = -8$ ，

根据根与系数的关系，有：

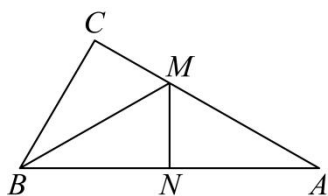
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{2} = -4,$$

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times (-4) = \frac{1}{4} + 8 = \frac{1}{4} + \frac{32}{4} = \frac{33}{4},$$

故答案为：  $\frac{33}{4}$  .

14. 如图，已知在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $MN$  是  $AB$  的中垂线， $\angle A = 30^\circ$ ， $AM = 20\text{cm}$ ，则  $CM =$  \_\_\_\_\_  $\text{cm}$  .



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质，含  $30^\circ$  度角的直角三角形的性质，掌握垂直平分线的性质是解题的关键.

根据垂直平分线的性质可得  $BM = AM = 20\text{cm}$ ，进而根据含  $30^\circ$  度角的直角三角形的性质即可求得  $CM$  的长.

【详解】解：在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$\because MN$  是  $AB$  的中垂线，

$$\therefore BM = AM = 20\text{cm},$$

$$\therefore \angle MBA = \angle A = 30^\circ,$$

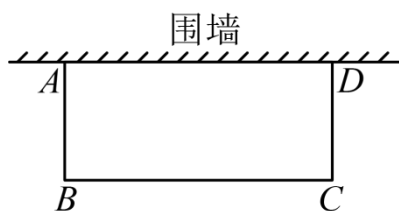
$$\therefore \angle CBM = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2} BM = 10(\text{cm}),$$

故答案为： 10 .

15. 小明家打算利用一面长 15 米的院墙，用铝合金靠墙搭建一个矩形遮阳棚辅助区域. 如果用 40 米长的铝合金框架搭建遮阳棚（靠墙一侧无需框架），且要求遮阳棚的面积为 150 平方米，则遮阳棚垂直于院墙的边

长为\_\_\_\_\_米.



【答案】 15

【解析】

【分析】 设未知数，根据面积公式建立等量关系求解即可.

本题主要考查一元二次方程的应用，找出等量关系是解题关键.

【详解】 解： 设  $AB = CD = x$  米， 则  $BC = (40 - 2x)$  米，

$$\text{则 } x(40 - 2x) = 150$$

$$\text{解得 } x = 5 \text{ 或 } x = 15$$

$\because$  院墙长 15 米，

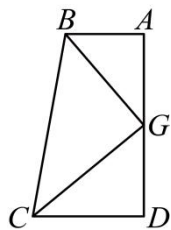
则  $x = 5$  (舍去)

则遮阳棚垂直于院墙的边长为 15 米.

故答案为： 15.

16. 如图， 已知：  $AB \parallel CD$ ，  $\angle A = 90^\circ$ ，  $G$  为线段  $AD$  的中点，  $BG$  平分  $\angle ABC$ ，  $AB = 2$ ，  $CD = 3$ ，

则  $CB =$ \_\_\_\_\_.



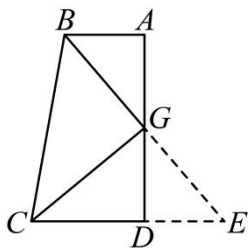
【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定，构造全等三角形，将  $AB$ 、 $CB$ 、 $CD$  建立联系是解题关键.

延长  $BG$ ，  $CD$ ， 利用  $G$  为 midpoint， 利用平行线的性质可证明  $\triangle ABG \cong \triangle DEG$ ， 再根据全等三角形性质， 通过线段和差求解即可.

【详解】 解： 如图， 延长  $BG$ ，  $CD$ ， 相交于点  $E$ ，



$\because AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle ABG = \angle DEG$ ,  $\angle A = \angle EDG$ ,

又  $G$  为线段  $AD$  的中点,

$\therefore AG = DG$ ,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle DEG (AAS)$ ,

$\therefore AB = DE$ ,  $\angle ABG = \angle DEG$ ,

$\because BG$  平分  $\angle ABC$ ,

$\therefore \angle CBE = \angle ABG = \angle DEG$ ,

$\therefore CB = CE$ ,

$\because AB = 2$ ,  $CD = 3$ ,

$\therefore CB = CE = CD + DE = CD + AB = 3 + 2 = 5$ .

故答案为: 5.

17. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程称为“差 1 方程”. 例如  $x^2 + x = 0$  是“差 1 方程”. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - (m-1)x - m = 0$  ( $m$  是常数) 是“差 1 方程”, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_

**【答案】** -2 或 0 或 -2

**【解析】**

**【分析】** 本题考查根与系数的关系. 设方程的两个根为  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 由题意, 得:

$x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$ ,  $x_2 - x_1 = 1$ , 利用完全平方公式的变形式进行计算即可.

**【详解】** 解: 设方程的两个根为  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 由题意, 得:  $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$ ,  $x_2 - x_1 = 1$ ,

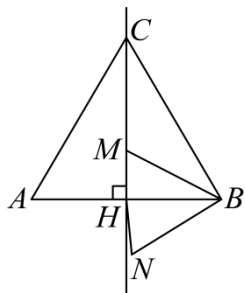
$\therefore (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (m-1)^2 + 4m = 1$ ,

解得:  $m = -2$  或  $m = 0$ ,

故答案为: -2 或 0.

18. 如图, 边长为 8 的等边三角形  $ABC$  中,  $M$  是高  $CH$  所在直线上的一个动点, 连接  $MB$ , 将线段  $BM$  绕

点  $B$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $BN$ ，连接  $HN$ ．则在点  $M$  运动过程中，线段  $HN$  长度的最小值是\_\_\_\_\_．

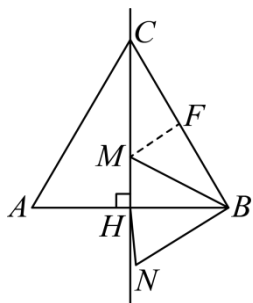


【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定和性质，含  $30^\circ$  度角的直角三角形，作辅助线构造全等三角形是解题关键．取  $BC$  的中点  $F$ ，连接  $MF$ ，根据等边三角形的性质和旋转的性质，可证  $\triangle BHN \cong \triangle BFM$  (SAS)，得到  $HN = MF$ ，由垂线段最短可知，当  $MF \perp AB$  时， $MF$  有最小值，此时  $HN$  有最小值，再结合  $30^\circ$  度角所对的直角边等于斜边一半求解即可．

【详解】 解：如图，取  $BC$  的中点  $F$ ，连接  $MF$ ，



$\because$  等边三角形  $ABC$  的边长为 8，

$$\therefore BC = AB = 8, \quad \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$$

$\because CH \perp AB$ ，

$$\therefore AH = BH = \frac{1}{2}AB = 4, \quad \angle BAH = 30^\circ,$$

$\because F$  是  $BC$  的中点，

$$\therefore CF = BF = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore BH = BF,$$

$\because$  线段  $BM$  绕点  $B$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $BN$ ，

$$\therefore BM = BN, \quad \angle MBN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle MBN,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABM = \angle MBN, \quad \text{即 } \angle CBM = \angle HBM,$$

在  $\triangle BHN$  和  $\triangle BFM$  中,

$$\begin{cases} BH = BF \\ \angle HBN = \angle FBM, \\ BN = BM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BHN \cong \triangle BFM \text{ (SAS)}$$

$$\therefore HN = MF,$$

由垂线段最短可知, 当  $MF \perp AB$  时,  $MF$  有最小值, 此时  $HN$  有最小值,

$$\because \angle MFC = 90^\circ, \angle BAH = 30^\circ,$$

$$\therefore MF = \frac{1}{2}CF = 2,$$

$$\therefore \text{线段 } HN \text{ 长度的最小值是 } 2,$$

故答案为: 2.

### 三、解答题: (本大题共 8 题, 共 46 分)

19. 计算:  $a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

【答案】  $\frac{9}{2}a\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行化简, 然后运算即可.

【详解】 解: 原式  $= a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

$$= 2a\sqrt{2a} - a^2\sqrt{\frac{1}{2a}} + 3a\sqrt{2a}$$

$$= 5a\sqrt{2a} - \frac{a^2}{2a}\sqrt{2a}$$

$$= 5a\sqrt{2a} - \frac{a}{2}\sqrt{2a}$$

$$= \frac{9}{2}a\sqrt{2a}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的性质和二次根式的加减运算, 掌握二次根式的性质是解题关键.

20. 解方程:  $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1.$

【答案】  $x = -4$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程；先去分母，然后解一元二次方程，最后进行检验即可.

【详解】 解:  $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$

$$2x^2 - 8 = x(x-2)$$

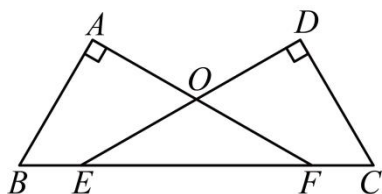
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

解得  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$

经检验,  $x = 2$  是增根, 应舍去.

故原方程的解为  $x = -4$ .

21. 如图, 已知  $AB \perp AF$ ,  $CD \perp DE$ ,  $E, F$  在线段  $BC$  上,  $DE$  与  $AF$  交于点  $O$ , 且  $AB = CD$ ,  $BE = CF$ , 求证:  $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle DCE$ .



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 此题考查了直角三角形全等的判定, 解题关键是由  $BE = CF$  推出  $BF = CE$ , 利用 HL 进行判定.

【详解】 证明:  $\because BE = CF$ ,

$$\therefore BE + EF = CF + EF, \text{ 即 } BF = CE,$$

$$\because AB \perp AF, CD \perp DE,$$

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

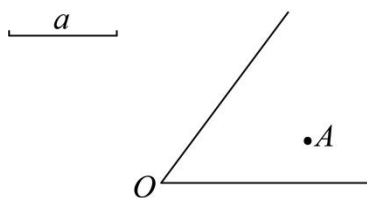
$\therefore \triangle ABF$  与  $\triangle DCE$  都为直角三角形,

在  $\text{Rt}\triangle ABF$  和  $\text{Rt}\triangle DCE$  中,

$$\begin{cases} BF = CE \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle DCE (\text{HL}).$$

22. 已知:  $\angle O$ 、点  $A$  及线段  $a$  (如图), 求作: 点  $P$ , 使点  $P$  到  $\angle O$  的两边的距离相等, 且  $PA = a$ . (要求尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法).

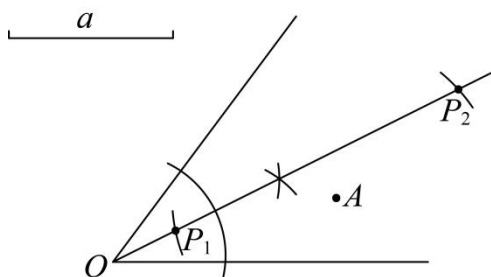


【答案】答案见解析

【解析】

【分析】先利用尺规作图作出  $\angle O$  的平分线，再以点 A 为圆心，线段 a 的长度为半径画弧，与角平分线的交点即为所求.

【详解】解：如图所示，点  $P_1$  和点  $P_2$  即为所求.



【点睛】考查作图-复杂作图，解题的关键是熟练掌握角平分线的尺规作图和角平分线的性质.

23. 公安交警部门提醒市民，骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定，某头盔经销商统计了某品牌头盔4月份到6月份的销量，该品牌头盔4月份销售150个，6月份销售216个，且从4月份到6月份销售量的月增长率相同.

- (1) 求该品牌头盔销售量的月增长率；
- (2) 若此种头盔的进价为30元/个，测算在市场中，当售价为40元/个时，月销售量为600个，若在此基础上售价每上涨1元/个，则月销售量将减少10个，为使月销售利润达到10000元，而且尽可能让顾客得到实惠，则该品牌头盔的实际售价应定为多少元/个？

【答案】(1) 该品牌头盔销售量的月增长率为20%

(2) 该品牌头盔的实际售价应定为50元/个

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的实际应用，找准等量关系，正确的列出方程，是解题的关键：

- (1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为  $x$ ，根据4月份销售150个，6月份销售216个，列出方程进行求解即可；
- (2) 设该品牌头盔的实际售价应定为  $m$  元/个，根据总利润等于单件利润乘以销量，列出方程进行求解即可.

【小问1详解】

解：设该品牌头盔销售量的月增长率为  $x$ ，由题意，得： $150(1+x)^2 = 216$ ，

解得:  $x = 0.2 = 20\%$  或  $x = -2.2$  (舍去);

答: 该品牌头盔销售量的月增长率为  $20\%$ ;

【小问 2 详解】

设该品牌头盔的实际售价应定为  $m$  元/个, 由题意, 得:

$$(m - 30)[600 - 10(m - 40)] = 10000,$$

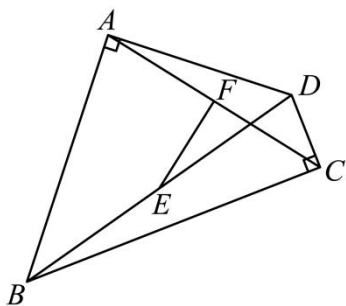
解得:  $m_1 = 50, m_2 = 80$ ,

$\therefore$  尽可能让顾客得到实惠,

$\therefore m = 50$ ;

答: 该品牌头盔的实际售价应定为  $50$  元/个.

24. 如图, 四边形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$  和  $AC$  的中点.



(1) 求证:  $EF \perp AC$ ;

(2) 若  $\angle ABD = 30^\circ$ ,  $AD = 3$ , 求  $BD$  的长.

【答案】(1) 见详解;

(2) 6

【解析】

【分析】本题考查斜边上的中线, 等腰三角形的判定和性质, 熟练掌握相关知识点, 是解题的关键:

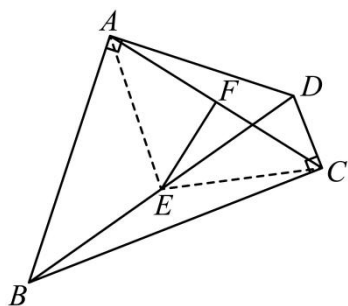
(1) 利用直角三角形斜边中线以及等腰三角形的性质可以证明结论成立;

(2) 利用直角三角形的斜边上的中线的性质和等边三角形的判定与性质得到  $AE = ED = \frac{1}{2}DB$ ,

$\angle ADE = 60^\circ$ ,  $\triangle ADE$  是等边三角形, 可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 连接  $AE$ 、 $CE$ , 如图所示:



Q  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$  和  $AC$  的中点,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle BAD$  中  $AE = \frac{1}{2}DB$ , 在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中  $CE = \frac{1}{2}DB$ ,

$\therefore AE = CE$ ,

$\because F$  是  $AC$  的中点,

$\therefore EF \perp AC$ ;

【小问 2 详解】

解: Q  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$  和  $AC$  的中点,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle BAD$  中  $AE = ED = \frac{1}{2}DB$ ,

$\because \angle ABD = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle ADE = 60^\circ$ ,

$\therefore ADE$  是等边三角形,

$\therefore AD = AE = DE = 3$

$\therefore BD = 2DE = 6$

25. 【综合与探究】

已知  $x_1$ ,  $x_2$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$  的两个不相等的实数根.

(1) 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7$ , 求  $m$  的值;

(3) 已知等腰  $ABC$  的一边长为 7, 若  $x_1$ ,  $x_2$  恰好是  $ABC$  的另外两边长, 求这个三角形的周长.

【答案】(1)  $m > 2$ ;

(2) 3;

(3) 17.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，根与系数的关系，等腰三角形的定义，三角形三边关系等知识点，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 利用一元二次方程根的判别式即可求解;

(2) 利用一元二次方程根与系数的关系即可求解;

(3) 由题意得  $x_1 \neq x_2$  时，故只能取  $x_1 = 7$  或  $x_2 = 7$ ，即 7 是方程的一个根，然后代入方程求出  $m$  的值，再通过三角形三边关系进行判断即可.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$  的两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4(m^2 + 5)$$

$$= 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 20$$

$$= 8m - 16 > 0,$$

$$\therefore m > 2;$$

【小问 2 详解】

解:  $\because x_1, x_2$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$  的两个不相等的实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7,$$

$$\therefore x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 6,$$

$$\therefore m^2 + 5 - 2(m+1) = 6, \text{ 整理得: } m^2 - 2m - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = 3, \quad m_2 = -1,$$

由 (1) 得  $m > 2$ ,

$$\therefore m = 3;$$

【小问 3 详解】

解: 由题意得  $x_1 \neq x_2$  时,

$\therefore$  只能取  $x_1 = 7$  或  $x_2 = 7$ ，即 7 是方程的一个根,

$$\text{将 } x = 7 \text{ 代入得: } 49 - 14(m+1) + m^2 + 5 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 4 \text{ 或 } m = 10,$$

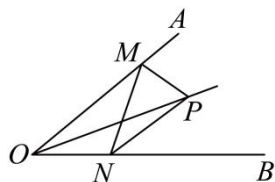
当  $m=4$  时, 得  $x^2-10x+21=0$ , 方程的另一个根为 3, 此时三角形三边分别为 7、7、3, 周长为 17;

当  $m=10$  时, 得  $x^2-22x+105=0$ , 方程的另一个根为 15, 此时不能构成三角形,

故三角形的周长为 17.

26. 学习完角平分线, 小希同学总结了学习心得: “对称是一种解题方法, 即分析问题时我们要善于观察并利用问题自身条件的某些对称性.” 结合以上内容解决问题:

已知在  $\triangle OMN$  中, 点  $A, B$  分别在  $OM, ON$  的延长线上,  $OP$  平分  $\angle AOB$ ,  $MP$  平分  $\angle AMN$ .



(1) 求证:  $NP$  平分  $\angle MNB$ ;

(2) 若  $\angle OMN = 28^\circ$ , 则  $\angle OPN =$ \_\_\_\_\_.

(3) 在  $\triangle OMN$  中, 作  $\angle OMN$  的平分线交  $OP$  于点  $H$ , 若  $MN=10$ , 且  $S_{\triangle PMN}=20$ ,  $S_{\triangle OMN}=30$ , 求点  $H$  到射线  $OB$  的距离.

**【答案】** (1) 见解析 (2)  $14^\circ$

(3) 点  $H$  到射线  $OB$  的距离为  $\frac{12}{7}$ .

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了三角形的角平分线. 添加垂线, 熟练掌握角平分线的判定与性质, 三角形面积公式求三角形面积, 是解题的关键.

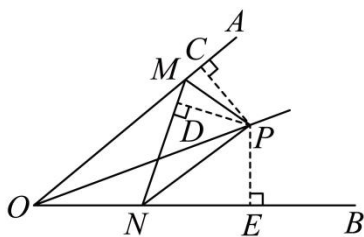
(1) 过点  $P$  作  $PC \perp OA$ , 垂足为  $C$ , 过点  $P$  作  $PD \perp MN$ , 垂足为  $D$ , 过点  $P$  作  $PE \perp OB$ , 垂足为  $E$ , 先利用角平分线的性质定理可得  $PC=PD$ ,  $PD=PE$ , 再利用角平分线判定定理, 即可解答;

(2) 根据角平分线的定义求得  $\angle PMN = \frac{1}{2} \angle AMN = 76^\circ$ , 在  $\triangle OPN$  中, 利用三角形内角和定理求得  $\angle OPN = 180^\circ - \angle PON - \angle PNO$ , 据此, 进行计算即可解答;

(3) 根据等积法求得点  $P$  到  $MN$  的距离  $h = \frac{2S_{\triangle PMN}}{MN} = \frac{2 \times 20}{10} = 4$ , 利用面积法求得  $OM + ON = 25$ , 再利用角平分线的定义结合面积法, 即可解答.

**【小问 1 详解】**

证明: 如图, 过点  $P$  作  $PC \perp OA$ , 垂足为  $C$ , 过点  $P$  作  $PD \perp MN$ , 垂足为  $D$ , 过点  $P$  作  $PE \perp OB$ , 垂足为  $E$ ,



$\because MP$  平分  $\angle AMN$ ,  $PC \perp OA$ ,  $PD \perp MN$ ,

$\therefore PC = PD$ ,

$\because OP$  平分  $\angle AOB$ ,  $PC \perp OA$ ,  $PE \perp OB$ ,

$\therefore PC = PE$ ,

$\therefore PD = PE$ ,

$\therefore NP$  平分  $\angle MNB$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because OP$  平分  $\angle AOB$ ,  $MP$  平分  $\angle AMN$ ,  $NP$  平分  $\angle MNB$ ,

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$ ,  $\angle AMP = \angle PMN$ ,  $\angle MNP = \angle PNB$ ,

在  $\triangle OMN$  中,  $\angle OMN = 28^\circ$ , 则  $\angle AMN = 180^\circ - 28^\circ = 152^\circ$ ,

在  $\triangle PMN$  中,  $\angle PMN = \frac{1}{2} \angle AMN = 76^\circ$ ,  $\angle MNP = \frac{1}{2} \angle MNB$ ,

在  $\triangle OPN$  中,  $\angle OPN = 180^\circ - \angle PON - \angle PNO$ ,

$\because \angle PON = \frac{1}{2} \angle AOB$ ,  $\angle PNB = \frac{1}{2} \angle MNB$ ,

$\therefore \angle OPN = \angle PNB - \angle PON = \frac{1}{2} \angle MNB - \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle OMN = \frac{1}{2} \times 28^\circ = 14^\circ$ ;

故答案为:  $14^\circ$ ;

【小问 3 详解】

解:  $\because S_{\triangle PMN} = 20$ ,  $MN = 10$ ,

$\therefore P$  到  $MN$  的距离  $h = \frac{2S_{\triangle PMN}}{MN} = \frac{2 \times 20}{10} = 4$ ,

$\because MP$  平分  $\angle AMN$ ,  $OP$  平分  $\angle AOB$ ,  $NP$  平分  $\angle MNB$ ,

$\therefore$  点  $P$  到  $OM$ ,  $MN$ ,  $OB$  的距离相等, 即距离都是 4,

$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 4OM + \frac{1}{2} \times 4ON - \frac{1}{2} \times 4MN = 30$ ,

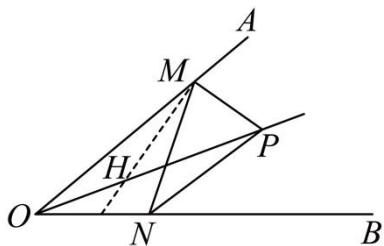
$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 4OM + \frac{1}{2} \times 4ON - \frac{1}{2} \times 4MN = 30$ ,

$\therefore OM + ON = 25$ ,

$\therefore OM + ON + MN = 35$ ,

$\because PH$  是  $\angle OMN$  的平分线,  $OP$  平分  $\angle AOB$ ,

$\therefore$  点  $H$  到  $OM$ ,  $MN$ ,  $OB$  的距离相等, 设为  $x$ ,



$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times OM \cdot x + \frac{1}{2} \times ON \cdot x + \frac{1}{2} \times MN \cdot x = 30,$$

$$\text{即 } (OM + ON + MN) \cdot x = 60,$$

$$\therefore x = \frac{12}{7},$$

即点  $H$  到射线  $OB$  的距离为  $\frac{12}{7}$ .