

2024 学年八年级第一学期数学学科期末考查试卷

(时间: 90 分钟 总分: 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本考查试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分) 【每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列命题中, 是真命题的是 ()

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| A. 三角形的一个外角大于任何一个内角 | B. 有且只有一条直线与已知直线垂直 |
| C. 0 的平方根、算术平方根和立方根都是 0 | D. 两边和一角对应相等的两个三角形全等 |

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了命题与定理、全等三角形的判定、三角形的三边关系以及外角等知识点, 正确掌握相关定理是解题关键.

根据全等三角形的判定方法、三角形的三边关系、三角形的外角相关知识逐项判定即可.

- 【详解】 解: A. 三角形一个外角大于它不相邻的任何一个内角, 故此命题是假命题, 不符合题意;
- B. 同一平面内, 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直, 故此命题是假命题, 不符合题意;
- C. 0 的平方根、算术平方根和立方根都是 0, 故此命题为真命题, 符合题意;
- D. 两边对应相等, 且两边的夹角相等, 则这两个三角形全等, 故此命题是假命题, 不符合题意.

故选: C.

2. 下列属于一元二次方程的是 ()

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| A. $x^2 - 3x + y = 0$ | B. $x^2 + 2x = \frac{1}{x}$ |
| C. $x^2 + 5x = 0$ | D. $x(x^2 - 4x) = 3$ |

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义进行分析, 即可求解. 一元二次方程定义: 只含有一个未知数, 并且未知数项的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程. 本题考查了一元二次方程的定义, 掌握一元二次方

程的定义是解题的关键.

【详解】解: A、 $x^2 - 3x + y = 0$ 含有两个未知数, 不是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

B、 $x^2 + 2x = \frac{1}{x}$ 不是整式方程, 不是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

C、 $x^2 + 5x = 0$ 是一元二次方程, 故该选项符合题意;

D、 $x(x^2 - 4x) = x^3 - 4x^2 = 3$ 的次数是 3, 不是一元二次方程, 故该选项不符合题意;

故选: C

3. 下列各函数中, y 是 x 的正比例函数的是 ()

A. $y = \frac{x}{3}$

B. $y = 2x^2$

C. $y = x - 1$

D. $y = \frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数的定义, 一般地, 形如 $y = kx (k \neq 0)$ 的函数叫做正比例函数, 据此可得答案.

【详解】解: A、 $y = \frac{x}{3}$, y 是 x 的正比例函数, 故该选项符合题意;

B、 $y = 2x^2$, y 不是 x 的正比例函数, 故该选项不符合题意;

C、 $y = x - 1$, y 不是 x 的正比例函数, 故该选项不符合题意;

D、 $y = \frac{1}{x}$, y 不是 x 的正比例函数, 故该选项不符合题意;

故选: A.

4. 下列条件中, 能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 ()

A. $a:b:c = 3:4:5$

B. $\angle A:\angle B:\angle C = 3:4:5$

C. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

D. $a = 2, b = 1, c = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的判定, 掌握直角三角形的性质, 勾股定理逆定理的运用是解题的关键. 根据直角三角形的性质, 勾股定理逆定理的运用进行判定即可.

【详解】解: A、设 $a = 3x, b = 4x, c = 5x$,

$$\therefore (3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2,$$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$ ，能判定是直角三角形，符合题意；

B、 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{5}{3+4+5} = 75^\circ$ ，不能判定是直角三角形，不符合题意；

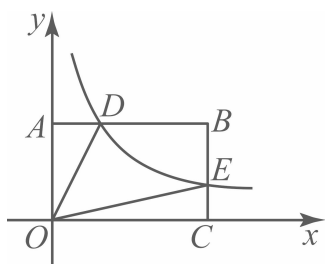
C、 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，不能判定是直角三角形，不符合题意；

D、 $\because 1^2 + 1^2 \neq 2^2$ ，即 $b^2 + c^2 \neq a^2$ ，

$\therefore$ 不能判定是直角三角形，不符合题意；

故选：A。

5. 如图，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像交矩形 $OABC$ 的边 AB 于点 D ，交边 BC 于点 E ，且 $BE = 2EC$ 。若四边形 $ODBE$ 的面积为 6，则 k 值为（ ）



A. 1

B. 2

C. 3

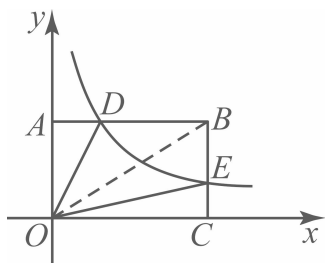
D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质、三角形面积的计算、反比例函数的图象与解析式的求法，连接 OB ，由矩形的性质和已知条件得出 $S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} ODBE} = 3$ ，再求出 $\triangle OCE$ 的面积，即可得出 k 的值，熟练掌握矩形的性质和反比例函数解析式的求法是解决问题的关键。

【详解】连接 OB ，如图所示：



$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore \angle OAD = \angle OCE = \angle DBE = 90^\circ$ ， $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC}$ ，

$\therefore D、E$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OCE},$$

$$\therefore S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} ODBE} = 3,$$

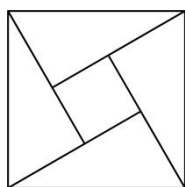
$$\therefore BE = 2EC,$$

$$\therefore S_{\triangle OCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle OBE} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} |k|, \text{ 由 } k > 0,$$

$$\therefore k = 3,$$

故选: C.

6. 如图, 该图由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形, 设直角三角形较长直角边长为 a , 较短直角边长为 b . 若 $ab = 12$, 大正方形面积为 30, 则小正方形边长为 ()



A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{6}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据已知条件易得, 中间小正方形的边长为 $(a-b)$, 然后根据直角三角形的面积和正方形的面积可建立关于 $(a-b)$ 的等量关系式, 求解即可.

【详解】解: 由题意可知: 中间小正方形的边长为 $(a-b)$,

$$\therefore \text{每一个直角三角形的面积为: } \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

从图形中可得, 大正方形的面积是 4 个直角三角形的面积与中间小正方形的面积之和, 且大正方形面积为 30,

$$\therefore 4 \times \frac{1}{2} ab + (a-b)^2 = 30,$$

$$\therefore (a-b)^2 = 30 - 4 \times \frac{1}{2} ab = 30 - 4 \times 6 = 6,$$

$$\therefore a-b > 0,$$

$$\therefore a-b = \sqrt{6}.$$

故选: C.

【点睛】本题考查等积变换, 求代数式的值, 算术平方根的应用. 根据题意建立等量关系式是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 化简： $\sqrt{8x^3y^2} (y > 0) =$ _____.

【答案】 $2xy\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】 本题考查了运用二次根式性质化简，因为 $y > 0$ ，则 $\sqrt{8x^3y^2} = 2xy\sqrt{2x}$ ，即可作答.

【详解】 解： $\because y > 0$,

$$\therefore \sqrt{8x^3y^2} = 2xy\sqrt{2x},$$

故答案为： $2xy\sqrt{2x}$

8. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 5x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了对一个多项式进行因式分解的能力，当要求在实数范围内进行分解时，分解的结果一般分到出现无理数为止.

【详解】 解： $2x^2 - 5x - 1$

$$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 1$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{8}$$

$$= (\sqrt{2})^2 \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{66}}{4}\right)^2$$

$$= \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{66}}{4}\right] \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{\sqrt{66}}{4}\right]$$

$$= \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{66}-5\sqrt{2}}{4}\right) \left(\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{66}}{4}\right),$$

$$= 2 \left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4} \right) \left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4} \right),$$

故答案为: $2 \left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4} \right) \left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4} \right).$

9. 已知函数 $y = (1-m)x^{m^2}$ 是正比例函数, 则 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义, 一般地, 形如 $y = kx (k \neq 0)$ 的函数叫做正比例函数, 据此可

得 $\begin{cases} m^2 = 1 \\ 1-m \neq 0 \end{cases}$, 解之即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = (1-m)x^{m^2}$ 是正比例函数,

$$\therefore \begin{cases} m^2 = 1 \\ 1-m \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore m = -1,$$

故答案为: -1.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的根的判别式的值为 -4 , 则 m 的值为 _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式, 利用根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = -4$, 建立关于 m 的方程求得 m 的值是解题的关键.

【详解】 解: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4m = -4,$

解得: $m = 5,$

故答案为: 5.

11. 已知三角形的三边长为 1、2、 $\sqrt{3}$, 则它的最小角为 _____ 度.

【答案】 30

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理的逆定理, 等边三角形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 先利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, 再证明 $\triangle ABD \cong \triangle ABC (SAS)$ 得到

$AC = AD = CD = 2$ ，则可证明 $\triangle ADC$ 是等边三角形，得到 $\angle CAB = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，据此可得答案.

【详解】解：如图所示， $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 1$ ， $AC = 2$ ，点 D 是 CB 延长线上一点，且 $BD = BC = 1$ ，

$$\therefore AB^2 + BC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 = AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AB = AB, BD = BC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ABC (\text{SAS}),$$

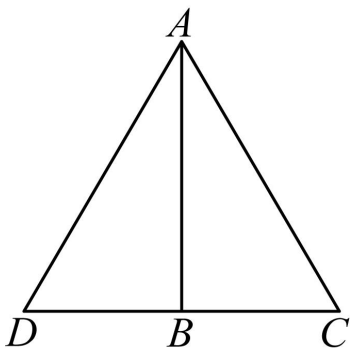
$$\therefore AC = AD = CD = 2,$$

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle CAB = 30^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore$ 三角形的三边长为 1、2、 $\sqrt{3}$ ，则它的最小角为 30° ，

故答案为：30.



12. 已知等腰直角三角形斜边上的高为方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根，那么这个直角三角形斜边的长是 _____.

【答案】12

【解析】

【详解】此题考查了解一元二次方程 - 因式分解法，等腰三角形的性质，以及直角三角形斜边上的中线性，求出已知方程的解，确定出等腰直角三角形斜边上的高，利用三线合一得到此高为斜边上的中线，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即可求出斜边的长，熟练掌握性质是解题的关键.

【解答】解：方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$ ，

$$(x-6)(x+1) = 0,$$

解得： $x = 6$ 或 $x = -1$ （舍去），

$\therefore$ 等腰直角三角形斜边上的高为 6，即为斜边上的中线，

则这个直角三角形斜边的边长为12,

故答案为: 12.

13. 在直角坐标平面内点 $A(2, -1)$ 与点 $B(-2, -3)$ 的距离等于_____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查两点间的距离公式: 设有两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则这两点间的距离为

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, 直接利用两点间的距离公式求解, 熟练掌握两点间的距离公式是解此题的关键.

【详解】 解: $\because A(2, -1)$ 、 $B(-2, -3)$,

$\therefore$ 点 A 和点 B 的距离 $= \sqrt{[2 - (-2)]^2 + [-1 - (-3)]^2} = 2\sqrt{5}$,

故答案为: $2\sqrt{5}$.

14. 函数 $y = 2x + \frac{x}{x+1}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【分析】 本题考查了函数自变量的取值方法, 分式有意义的条件, 解不等式, 理解分式有意义的条件, 函数自变量的取值方法是解题的关键.

根据分式的性质确定函数自变量的取值范围即可.

【详解】 解: $\because x+1 \neq 0$,

$\therefore x \neq -1$,

$\therefore$ 函数 $y = 2x + \frac{x}{x+1}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq -1$,

故答案为: $x \neq -1$.

15. 如果函数 $f(x) = \frac{2}{x+1}$, 那么 $f(\sqrt{2}-1) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了自变量和函数值以及分母有理化, 因为 $f(x) = \frac{2}{x+1}$, 所以

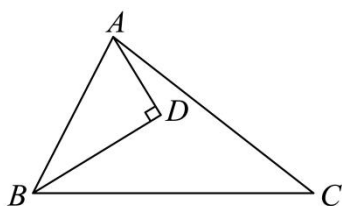
$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{2}{\sqrt{2}-1+1} = \sqrt{2}, \text{ 即可作答.}$$

【详解】解： $\because f(x) = \frac{2}{x+1},$

$$\therefore f(\sqrt{2}-1) = \frac{2}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

故答案为： $\sqrt{2}$.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $AD \perp BD$ ， $\angle DAC = 20^\circ$ ， $\angle C = 38^\circ$ ，那么 $\angle BAD =$ _____ $^\circ$.

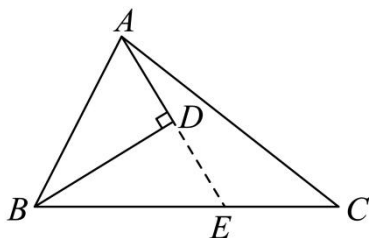


【答案】58

【解析】

【分析】本题考查三角形外角性质，等角的余角相等，解题的关键是掌握外角的性质.

【详解】解：延长 AD 交 BC 于点 E ，



$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD,$$

$\because AD \perp BD$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle BED = \angle DAC + \angle C = 20^\circ + 38^\circ = 58^\circ,$$

故答案为：58.

17. 如果点 $M(-1, y_1)$ 、点 $N\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ 都在函数 $y = \frac{2+m}{x}$ 的图像上，且 $y_1 < y_2$ ，那么 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m < -2$

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数图象和性质，根据题意可得在每个象限内 y 随 x 增大而增大，据此可得 $2+m<0$ ，则 $m<-2$ 。

【详解】解：∵点 $M(-1, y_1)$ 、点 $N(-\frac{1}{2}, y_2)$ 都在函数 $y = \frac{2+m}{x}$ 的图象上，且 $y_1 < y_2$ ，

∴在每个象限内 y 随 x 增大而增大，

∴ $2+m<0$ ，

∴ $m<-2$ ，

故答案为： $m<-2$ 。

18. 已知点 D 、 E 分别是等边 ABC 边 AB 、 AC 上的动点，将 ADE 沿直线 DE 翻折，使点 A 恰好落在边 BC 上的点 P 处，如果 $\triangle BPD$ 是直角三角形，且 $BP=2$ ，那么 EC 的长是_____。

【答案】 $\sqrt{3}+1$ 或 $2\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】分两种情况讨论，一是 $\angle BPD=90^\circ$ ，由等边三角形的性质得 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$ ，得到 $\angle BDP=30^\circ$ ，则 $BD=2BP=4$ ，由勾股定理求出 PD ，由翻折得 $AD=PD=2\sqrt{3}$ ， $\angle A=\angle DPE=60^\circ$ ，则 $BC=AB=2\sqrt{3}+4$ ， $\angle CPE=30^\circ$ ，再根据线段的和差求出 $CP=2\sqrt{3}+2$ ，最后由 $EC=\frac{1}{2}CP$ 即可求解；二是 $\angle BDP=90^\circ$ ，则 $\angle BPD=30^\circ$ ，从而求出 BD ，根据勾股定理得 $AD=PD=\sqrt{BP^2+BD^2}$ ，进而求出 BC ，则据线段的和差求出 CP ，最后根据 $EC=2CP$ 即可求解。

【详解】解：如图1， $\triangle BPD$ 是直角三角形，且 $\angle BPD=90^\circ$ ，

∵ ABC 是等边三角形， $BP=2$ ，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$ ，

∴ $\angle BDP=30^\circ$ ，

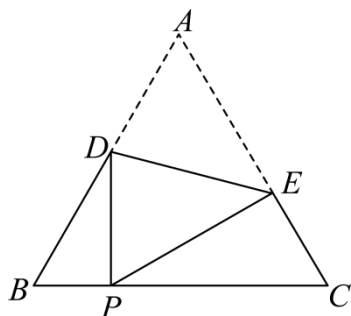


图1

∴ $BD=2BP=4$ ，

$$\therefore PD = \sqrt{BD^2 - BP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

由翻折得 $AD = PD = 2\sqrt{3}$, $\angle A = \angle DPE = 60^\circ$,

$$\therefore BC = AB = AD + BD = 2\sqrt{3} + 4, \quad \angle CPE = 180^\circ - \angle BPD - \angle DPE = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = BC - BP = 2\sqrt{3} + 4 - 2 = 2\sqrt{3} + 2, \quad \angle CEP = 180^\circ - \angle C - \angle CPE = 90^\circ,$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3} + 1;$$

如图 2, $\triangle BPD$ 是直角三角形, 且 $\angle BDP = 90^\circ$, 则 $\angle BPD = 30^\circ$,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BP = 1,$$

$$\therefore AD = PD = \sqrt{BP^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = AB = BD + AD = 1 + \sqrt{3},$$

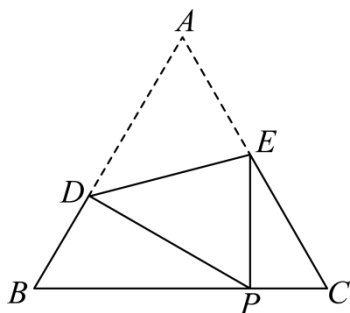


图2

$$\therefore CP = BC - BP = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore \angle CPE = 180^\circ - \angle BPD - \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEP = 30^\circ,$$

$$\therefore EC = 2CP = 2 \times (\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - 2,$$

故答案为: $\sqrt{3} + 1$ 或 $2\sqrt{3} - 2$.

【点睛】此题重点考查等边三角形的性质、轴对称的性质、直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半、勾股定理等知识, 正确地求出 CP 的长是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\sqrt{27x} + 3\sqrt{\frac{x}{3}} + 2x\sqrt{\frac{3}{x}}$.

【答案】 $6\sqrt{3x}$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的加减法，熟练掌握运算是解题的关键.

把二次根式化简成最简二次根式后，再合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{27x} + 3\sqrt{\frac{x}{3}} + 2x\sqrt{\frac{3}{x}} \\ &= 3\sqrt{3x} + \sqrt{3x} + 2\sqrt{3x} \\ &= 6\sqrt{3x}. \end{aligned}$$

20. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1, x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$$

【解析】

【分析】本题考查了运用配方法解一元二次方程，先把二次项系数化1，得 $x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$ ，再把常数项移到等号的右边，即 $x^2 - 2x = \frac{1}{2}$ ，再配方，最后开方，即可作答.

【详解】解: $\because 2x^2 - 4x - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1,$$

$$\text{则 } (x-1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x-1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1, x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 1.$$

21. 已知 $y = y_1 + y_2$ ，并且 y_1 与 $(x-2)$ 成正比例， y_2 与 x 成反比例，当 $x = -1$ 时， $y = 3$ ；当 $x = 4$ 时， $y = \frac{7}{4}$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式:

(2) 求 $x = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ 时的函数值.

$$\text{【答案】 (1) } y = 2x - \frac{9}{x} - 4$$

$$(2) -\sqrt{5}-5\sqrt{2}-4$$

【解析】

【分析】 本题主要考查正比例函数，反比例函数，函数值的计算，掌握正比例、反比例函数的计算是解题的关键.

(1) 设 $y_1 = k_1(x-2) (k_1 \neq 0)$, $y_2 = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$, 则 $y = k_1(x-2) + \frac{k_2}{x}$, 把 $x = -1$ 时, $y = 3$; 当 $x = 4$ 时, $y = \frac{7}{4}$, 代入计算即可求解;

(2) 把 $x = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ 代入 (1) 中函数解析式计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y_1$ 与 $(x-2)$ 成正比例, y_2 与 x 成反比例,

$$\therefore \text{设 } y_1 = k_1(x-2) (k_1 \neq 0), y_2 = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0),$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = k_1(x-2) + \frac{k_2}{x},$$

$$\because \text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = 3; \text{ 当 } x = 4 \text{ 时, } y = \frac{7}{4},$$

$$\therefore \begin{cases} 3 = k_1(-1-2) + \frac{k_2}{-1} \\ \frac{7}{4} = k_1(4-2) + \frac{k_2}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -9 \end{cases},$$

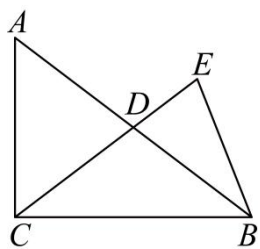
$$\therefore y = 2(x-2) - \frac{9}{x} = 2x - \frac{9}{x} - 4;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 当 } x = \sqrt{5} - \sqrt{2} \text{ 时, } y = 2 \times (\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \frac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - 4 = -\sqrt{5} - 5\sqrt{2} - 4.$$

22. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 8$, 点 D 是 AB 边中点, 延长 CD 至点 E , 使得

$DE = \frac{1}{2}CD$. 连接 BE , 当 $BE = 2\sqrt{3}$ 时, 求 $\angle DBE$ 的度数.



【答案】 30°

【解析】

【分析】根据题意可得 $\triangle BDE$ 是直角三角形， $\angle E = 90^\circ$ ，在 $Rt\triangle BCE$ 中，由勾股定理可得 $BC = 4\sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中，可得 $AC = 4$ ，则 $\triangle ACD$ 是等边三角形，所以 $\angle ADC = \angle BDE = 60^\circ$ ，由三角形内角和定理即可求解。

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ，点 D 是 AB 边中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4 = AD = BD,$$

$$\because DE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\text{在 } \triangle BDE \text{ 中, } DE = 2, BE = 2\sqrt{3}, BD = 4,$$

$$\because 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2, \text{ 即 } DE^2 + BE^2 = BD^2,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 是直角三角形, } \angle E = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCE \text{ 中, } CE = CD + DE = 4 + 2 = 6, BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4,$$

$$\therefore AC = CD = AD = 4,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle A = \angle ADC = 60^\circ,$$

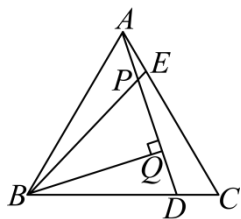
$$\therefore \angle ADC = \angle BDE = 60^\circ,$$

$$\because \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 30^\circ.$$

【点睛】本题主要考查的直角三角形斜边中线等于斜边的一半，勾股定理及其逆定理的运用，等边三角形的判定和性质，三角形内角和定理，掌握勾股定理及其逆定理，证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形是解题的关键。

23. 如图, 在等边 ABC 中, 点 D , E 分别在边 BC , AC 上, 且 $AE = CD$, BE 与 AD 相交于点 P , $BQ \perp AD$ 于点 Q .



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CAD$;

(2) 求 $\angle PBQ$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) $\angle PBQ = 30^\circ$

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质与判定, 等边三角形的性质等知识, 解题的关键是:

(1) 根据全等三角形的判定定理即可求出答案.

(2) 根据 $\triangle ABE \cong \triangle CAD$, 可知 $\angle CAD = \angle ABE$, 由于 $\angle BPQ = \angle ABE + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = \angle BAE = 60^\circ$. 从而可知 $\angle PBQ = 30^\circ$.

【小问 1 详解】

证明: 在等边三角形 ABC 中, $AB = AC$, $\angle BAE = \angle C = 60^\circ$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle C, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAD (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle ABE \cong \triangle CAD$,

$$\therefore \angle CAD = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle ABE + \angle BAP$$

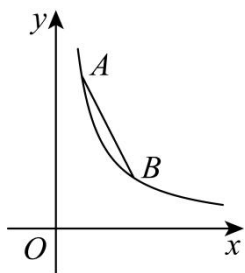
$$= \angle CAD + \angle BAP$$

$$= \angle BAE = 60^\circ.$$

$\because BQ \perp AD$,

$$\therefore \angle PBQ = 30^\circ.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(1, 6)$ 、 $B(3, m)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上的两点, 连接 AB .



- (1) 求反比例函数的解析式;
- (2) 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P , 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$

(2) $(-6, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式, 反比例函数图像上点的坐标特征, 线段垂直平分线的性质, 熟练掌握待定系数法以及线段垂直平分线的性质是解题的关键.

- (1) 利用待定系数法求得即可;
- (2) 由反比例函数的解析式求得点 B 的坐标, 设 P 点的坐标为 $(x, 0)$, 根据垂直平分线的性质得出 $PA = PB$, 即可得出 $(x-1)^2 + 6^2 = (x-3)^2 + 2^2$, 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: $\because A(1, 6)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上的点,

$$\therefore k = 1 \times 6 = 6,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{6}{x};$$

【小问 2 详解】

把 $B(3, m)$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得, $m = \frac{6}{3} = 2,$

$$\therefore B(3, 2),$$

设 P 点的坐标为 $(x, 0),$

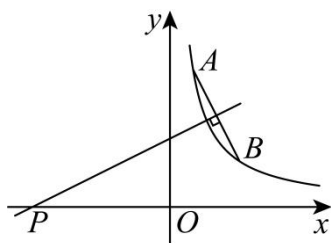
$\because$ 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 $P,$

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore (x-1)^2 + 6^2 = (x-3)^2 + 2^2,$$

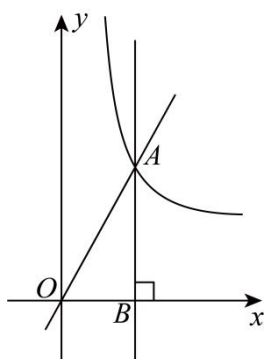
解得 $x = -6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-6, 0)$.



25. 如图, 在直角坐标平面内, 一个正比例函数 $y = kx$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ 图像在第一象限内的

交点为点 A , 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴, 垂足为点 B , $AB = 3$.



(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 在直线 AB 上是否存在点 C , 使点 C 到直线 OA 的距离等于它到点 B 的距离? 若存在, 求点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 已知点 P 在直线 AB 上, 如果 $\triangle AOP$ 是等腰三角形, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \sqrt{3}x$;

(2) 存在, 点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$;

(3) $P(\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$ 或 $(\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$ 或 $(\sqrt{3}, 1)$

【解析】

【分析】 (1) 反比例函数 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ 经过点 A , 将 $y = 3$ 代入 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$, 得 $x = \sqrt{3}$, 可得 $A(\sqrt{3}, 3)$, 再将点

A 代入正比例函数的解析式为 $y = kx$, 即可得出答案;

(2) 设点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, y)$, 则 $AC = |3 - y|$, $OB = \sqrt{3}$, $BC = |y|$, 根据勾股定理求得 $OA = 2\sqrt{3}$, 根

据 $\triangle AOC$ 的面积求出 $CG = \frac{1}{2}|3-y|$ ，再由 $CG = CB$ 即可列出方程，求解即可；

(3) 由 $OA = 2\sqrt{3}$ ，分 $AO = AP$ ， $OA = OP$ ， $PA = PO$ 三种情形，分别得出答案.

【小问 1 详解】

解： $\because AB = 3$ ，

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 3，

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ 经过点 A ，

当 $y = 3$ 时， $3 = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ ，

$\therefore x = \sqrt{3}$ ，

$\therefore A(\sqrt{3}, 3)$ ，

$\because$ 正比例函数 $y = kx$ 经过点 A ，

$\therefore 3 = \sqrt{3}k$ ，

解得 $k = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 正比例函数的解析式为： $y = \sqrt{3}x$ ；

【小问 2 详解】

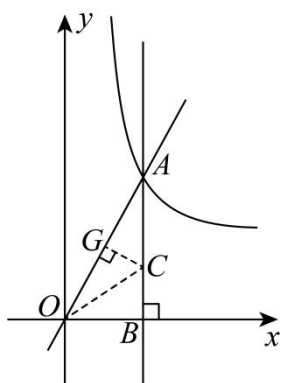
解： $\because AB \perp x$ 轴于点 B ，设点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, y)$ ，

$\therefore A(\sqrt{3}, 3)$ ， $B(\sqrt{3}, 0)$ ，

$\therefore AC = |3-y|$ ， $OB = \sqrt{3}$ ， $BC = |y|$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ ，

过点 C 作 $CG \perp OA$ 于 G ，连接 CO ，



$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot CG = \frac{1}{2} AC \cdot BO,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}CG = \frac{1}{2}|3-y| \times \sqrt{3},$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}|3-y|,$$

$\therefore$ 点 C 到直线 OA 的距离等于它到点 B 的距离, 即 $CG = CB$,

$$\therefore \frac{1}{2}|3-y| = |y|,$$

$$\therefore y = 1 \text{ 或 } y = -3,$$

综上所述, 满足要求的点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$;

【小问 3 详解】

解: 分三种情况讨论:

①当 $AO = AP = 2\sqrt{3}$ 时,

$$\therefore A(\sqrt{3}, 3),$$

$$\therefore P(\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}) \text{ 或 } (\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3});$$

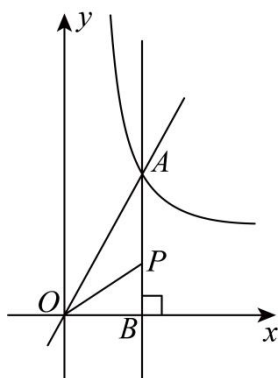
②当 $OA = OP$ 时,

$$\therefore OB \perp AP,$$

$$\therefore BP = AB = 3,$$

$$\therefore P(\sqrt{3}, -3);$$

③当 $PA = PO$ 时, 设 $P(\sqrt{3}, n)$,



$$\therefore PB = n, PO = AP = 3 - n,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle PBO \text{ 中, } BO^2 + PB^2 = PO^2,$$

$$\therefore (\sqrt{3})^2 + n^2 = (3 - n)^2,$$

解得 $n = 1$,

$$\therefore P(\sqrt{3}, 1).$$

综上所述: $P(\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$ 或 $(\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$ 或 $(\sqrt{3}, 1)$.

【点睛】 本题主要考查反比例函数与正比例函数的交点问题, 待定系数法求函数解析式, 三角形的面积, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 运用分类讨论思想是解题的关键.

26. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在线段 BC 上, 点 F 在射线 AD 上, 连接 CF , 作 $BE \parallel CF$ 交射线 AD 于 E , $\angle CFA = \angle BAC = \alpha$.

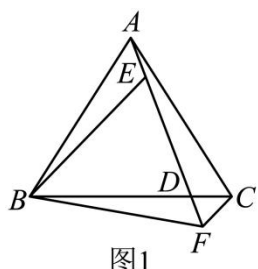


图1

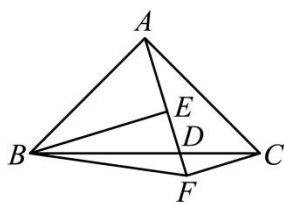


图2

(1) 如图 1, 当 $\alpha = 65^\circ$ 时, $\angle ABE = 15^\circ$ 时, 求 $\angle BAE$ 的大小;

(2) 当 $\alpha = 90^\circ$, $AB = AC = 8$ 时,

①如图 2, 连接 BF , 当 $BF = BA$, 求 CF 的长;

②若 $AD = 5\sqrt{2}$, 求 AE 的长.

【答案】 (1) $\angle BAE = 50^\circ$

$$(2) \text{ ① } CF = \frac{8\sqrt{5}}{5}; \text{ ② } AE = \frac{4\sqrt{2}}{5} \text{ 或 } \frac{28}{5}\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质求解 $\angle BED = 65^\circ$ ，再利用三角形的外角的性质可得答案；

(2) ①证明 $\triangle BEF \cong \triangle AFC$ ，可得 $FC = EF = AE = \frac{1}{2}AF$ ，再利用勾股定理求解即可；②如图，过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M，当 D 在 M 的右边时，利用勾股定理求出 DM，可得 BD，用等面积法可得 BE，可得 DE，根据 $AE = AD - DE$ ，从而可得答案；当 D 在 M 的左边时，如图，同理可得 $AM = 4\sqrt{2}$ ， $DM = 3\sqrt{2}$ ， $CD = 7\sqrt{2}$ ， $CF = \frac{28}{5}\sqrt{2}$ ，证明 $\triangle BAE \cong \triangle ACF$ ，即可得到 AE。

【小问 1 详解】

解： $\because BE \parallel CF$ ， $\angle CFA = \angle BAC = \alpha = 65^\circ$ ，

$$\therefore \angle BED = 65^\circ,$$

$$\because \angle BED = \angle ABE + \angle BAE, \quad \angle ABE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 65^\circ - 15^\circ = 50^\circ;$$

【小问 2 详解】

解：① $\because BF = BA$ ， $AB = AC$ ，

$$\therefore BF = AC,$$

$$\because BE \parallel CF, \quad \angle CFA = \angle BAC = \alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp AF, \quad AE = EF, \quad \angle ABE = \angle FBE, \quad \angle BEF = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ = \angle BAE + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CAF,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle FBE,$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle AFC (\text{AAS}),$$

$$\therefore EF = FC,$$

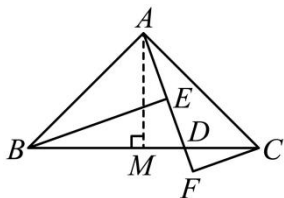
$$\therefore FC = EF = AE = \frac{1}{2}AF,$$

$$\because AB = AC = 8,$$

$$\therefore CF^2 + (2CF)^2 = 64,$$

$$\text{解得: } CF = \frac{8\sqrt{5}}{5} \quad (\text{负根舍去});$$

②如图，过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M，当 D 在 M 的右边时，



$$\because \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC = 8,$$

$$\therefore BC = 8\sqrt{2}, \quad AM = MC = BM = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AD = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = 3\sqrt{2},$$

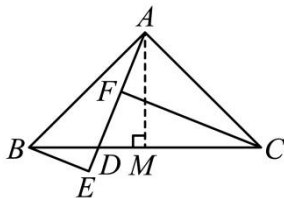
$$\therefore BD = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AM}{\frac{1}{2}AD} = \frac{28}{5}\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \frac{21\sqrt{2}}{5},$$

$$\therefore AE = AD - DE = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

当 D 在 M 的左边时, 如图,



$$\text{同理可得: } AM = 4\sqrt{2}, \quad DM = 3\sqrt{2}, \quad CD = 7\sqrt{2},$$

$$\therefore CF = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot AM}{\frac{1}{2}AD} = \frac{28}{5}\sqrt{2},$$

$$\text{由 (1) 得: } \angle ABE = \angle CAF,$$

$$\text{而 } \angle AEB = \angle AFC = 90^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ACF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = CF = \frac{28\sqrt{2}}{5};$$

综上: $AE = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 或 $\frac{28}{5}\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查的是三角形的外角的性质, 等腰直角三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理的应用, 二次根式的混合运算, 熟练掌握知识点是解本题的关键.