

2024 学年第一学期八年级数学期末练习卷

完卷时间：100 分钟 总分：100 分

说明：本张试卷第 24 题为几何证明题，需要写本学期所学的理由，其余题目则不用写。

一、选择题：（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{x}{2}}$

B. $\sqrt{8}$

C. $\sqrt{a^2+4}$

D. $\sqrt{3a^3b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的概念，属于简单题，熟悉概念是解题关键。

根据最简二次根式概念即可解题。

【详解】解：A. $\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}$ ，故 A 不符合题意；

B. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，故 B 不符合题意；

C. $\sqrt{a^2+4}$ 是最简二次根式，故 C 符合题意；

D. $\sqrt{3a^3b} = a\sqrt{3ab}$ ，故 D 不符合题意。

故选：C。

2. 下列关于 x 的方程中，一定属于一元二次方程的是（ ）

A. $x^2+9=0$

B. $ax^2-2x+3=0$

C. $x^2+2y+6=0$

D. $\frac{1}{x^2}=3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程。根据一元二次方程的定义逐个判断即可。

【详解】解：A、 $x^2+9=0$ 属于一元二次方程，故 A 选项符合题意；

B、 $ax^2-2x+3=0$ 中若 $a=0$ ，不属于一元二次方程，故 B 选项不符合题意；

C、 $x^2+2y+6=0$ 中有含两个未知数 x 、 y ，不属于一元二次方程，故 C 选项不符合题意；

D、 $\frac{1}{x^2} = 3$ 不是整式方程，不属于一元二次方程，故 D 选项不符合题意；

故选：A.

3. 用配方法解方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ ，下列配方正确的是 ()

- A. $(x-2)^2 = 6$ B. $(x+2)^2 = 6$ C. $(x-2)^2 = 2$ D. $(x+2)^2 = 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了用配方法解一元二次方程，熟练掌握用配方法解一元二次方程是解题的关键.
先把常数项移到等号右边，等号两边同时加上一次项系数一半的平方，最后配方即可.

【详解】解： $x^2 - 4x + 2 = 0$,

$$x^2 - 4x = -2,$$

$$x^2 - 4x + 4 = -2 + 4,$$

$$(x-2)^2 = 2,$$

故选：C.

4. 若反比例函数 $y = \frac{5-k}{x}$ 的图象分布在第二、四象限，则 k 的取值范围是 ()

- A. $k < 5$ B. $k > -5$ C. $k < -5$ D. $k > 5$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质，求不等式的解集，掌握反比例函数图象经过的象限确定反比例系数的符号是解题的关键.

根据反比例函数 $y = \frac{5-k}{x}$ 的图象分布在第二、四象限，可得 $5-k < 0$ ，由此即可求解.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{5-k}{x}$ 的图象分布在第二、四象限，

$$\therefore 5-k < 0,$$

解得， $k > 5$.

故选：D.

5. ABC 的三条边分别为 a ， b ， c ，下列条件不能判断 ABC 是直角三角形的是 ()

- A. $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{2}$ B. $b^2 = (a+c)(a-c)$
C. $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$ D. $\angle A = \angle B + \angle C$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理、勾股定理的逆定理等知识，熟练掌握勾股定理的逆定理的应用是解题关键。根据勾股定理的逆定理及三角形内角和定理对各选项进行逐一判断即可。

【详解】解：A、 $\because a^2 + c^2 = 3 = b^2$,

$\therefore$ 此三角形是直角三角形，故本选项不符合题意；

B、 $\because b^2 = (a+c)(a-c) = a^2 - c^2$,

$\therefore b^2 + c^2 = a^2$,

$\therefore$ 此三角形是直角三角形，故本选项不符合题意；

C、设 $\angle A = 3x$ ，则 $\angle B = 4x$ ， $\angle C = 5x$ ，

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore 3x + 4x + 5x = 180^\circ$ ，解得 $x = 15^\circ$

$\therefore \angle A = 3x = 45^\circ$ ， $\angle B = 4x = 60^\circ$ ， $\angle C = 5x = 75^\circ$ ，

$\therefore$ 此三角形不是直角三角形，故本选项符合题意；

D、 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle A = \angle B + \angle C$ ，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 此三角形是直角三角形，故本选项不符合题意。

故选：C。

6. 下列命题是真命题的个数为 ()

- ①互为补角的两个角都是锐角
- ②能够被2整除的数叫做偶数
- ③相等的角是对顶角
- ④在同一平面内，平行于同一条直线的两条直线平行
- ⑤两条直线被第三条直线所截，内错角相等

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了命题的真假，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行判断求解。根据补角，对顶角的性质，平行公理和平行线的性质逐一判断即可。

【详解】解：A、①互为补角的两个角不一定是锐角，故此说法错误，是假命题；

②能够被2整除的数叫做偶数，故此说法正确，是真命题；

③相等的角不一定是对顶角，故此说法错误，是假命题；

④在同一平面内，平行于同一条直线的两条直线平行，故此说法正确，是真命题；

⑤两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等，故此说法错误，是假命题。

综上所述，是真命题的个数为2。

故选：A。

二、填空题：（本大题共12小题，每小题2分，满分24分）

7. 使 $\sqrt{2x-8}$ 有意义的 x 的取值范围是_____。

【答案】 $x \geq 4$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，解题关键是理解二次根式有意义的条件：被开方数非负。根据二次根式有意义的条件可得关于 x 的不等式，求解即可获得答案。

【详解】解：若 $\sqrt{2x-8}$ 有意义，

则有 $2x-8 \geq 0$ ，解得 $x \geq 4$ 。

故答案为： $x \geq 4$ 。

8. 已知 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ，那么 $f(\sqrt{2}) =$ _____。

【答案】 $2\sqrt{2}-2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的计算，熟练掌握运算是解题的关键。

把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ 计算即可。

【详解】解：把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ 得，

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}-2,$$

故答案为： $2\sqrt{2}-2$ 。

9. 一元二次方程 $x^2 = 2x$ 的根是_____。

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握直接开平方法，因式分解法，配方法和公式法是解题的关键.

本题由因式分解法求解即可.

【详解】 解: $x^2 = 2x$,

$$\therefore x^2 - 2x = 0,$$

$$\therefore x(x-2) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0,$$

解得: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

10. 在实数范围内因式分解 $x^2 - 6x + 2 =$ _____.

【答案】 $(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

首先利用完全平方公式变形，然后利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 $x^2 - 6x + 2$

$$= x^2 - 6x + 9 - 7$$

$$= (x-3)^2 - 7$$

$$= (x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}).$$

故答案为: $(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$.

11. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，且 $0 < x_1 < x_2$ ，那么 y_1 _____ y_2 (填“>”或“=”或“<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】由反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 可知，在同一个象限内， y 随 x 的增大而减小即可得答案.

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中 $k = 2 > 0$,

∴ 在同一个象限内， y 随 x 的增大而减小，

∴ 点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，且 $0 < x_1 < x_2$,

∴ $y_1 > y_2$,

故答案为：>.

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象上的点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，利用反比例函数的性质解答.

12. “全等三角形的对应边相等”的逆命题是_____.

【答案】对应边相等的两个三角形全等

【解析】

【分析】本题考查逆命题，将原命题的条件和结论互换，即可得出结果.

【详解】解：“全等三角形的对应边相等”的逆命题是对应边相等的两个三角形全等；

故答案为：对应边相等的两个三角形全等

13. 经过已知点 P 和点 Q 的圆的圆心的轨迹_____.

【答案】线段 PQ 的垂直平分线

【解析】

【分析】本题主要考查了线段垂直平分线的判定，由于该圆圆心到点 P 和到点 Q 的距离相等，则到线段两端的距离相等的点在线段的垂直平分线上，据此可得经过定点 P, Q 的圆的圆心的轨迹是线段 PQ 的垂直平分线.

【详解】解：∵ 一个圆经过定点 P, Q ,

∴ 该圆圆心到点 P 和到点 Q 的距离相等，

∴ 该圆的圆心在线段 PQ 的垂直平分线上，

∴ 经过定点 P, Q 的圆的圆心的轨迹是线段 PQ 的垂直平分线，

故答案为：线段 PQ 的垂直平分线.

14. 若 $x^{|m-1|} - x - 5 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值为_____.

【答案】3 或 -1

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程，只有一个未知数，且未知数最高次数为 2 的整式方程叫做一元二次方程。根据一元二次方程的定义，可知 $|m-1|=2$ ，由此即可求得 m 的值。

【详解】 解：由题意可知， $|m-1|=2$ ，

解得 $m=3$ 或 $m=-1$ 。

故答案为：3 或 -1。

15. 已知在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(3,0)$ ，点 B 在 y 轴上且 $AB=2\sqrt{3}$ ，则点 B 的坐标为_____。

【答案】 $(0,\sqrt{3})$ ， $(0,-\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 此题考查了勾股定理，坐标系中两点之间的距离，

设 $B(0,m)$ ，根据题意得到 $\sqrt{(3-0)^2+(m-0)^2}=2\sqrt{3}$ ，进而求解即可。

【详解】 $\because$ 点 B 在 y 轴上

$\therefore$ 设 $B(0,m)$

$\because$ 点 A 的坐标为 $(3,0)$ ， $AB=2\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{(3-0)^2+(m-0)^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore m^2+9=12$

$\therefore m=\pm 3$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$ ， $(0,-\sqrt{3})$ 。

故答案为： $(0,\sqrt{3})$ ， $(0,-\sqrt{3})$ 。

16. 读诗词，列方程：大江东去浪淘尽，千古风流人物：而立之年督东吴，早逝英年两位数，十位恰小个位三，个位平方与寿符。（诗词大意：周瑜英年早逝，逝世时的年龄是一个两位数，十位数字比个位数字小 3，个位数字的平方刚好是周瑜逝世时的年龄），设周瑜逝世时的年龄的个位数字为 x ，则列得方程为_____

【答案】 $10(x-3)+x=x^2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程解实际问题，根据题意，十位数字为 $(x-3)$ ，周瑜逝世的年龄为

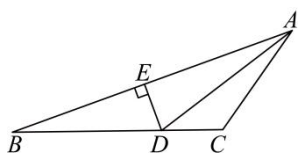
$10(x-3)+x$ ，且个位数字的平方刚好是周瑜逝世的年龄，即 x^2 ，由此列式即可求解。

【详解】解：个位数字为 x ，则十位数字为 $(x-3)$ ，

$$\therefore 10(x-3) + x = x^2,$$

故答案为： $10(x-3) + x = x^2$.

17. 如图， AD 是 $\triangle BAC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， $S_{\triangle ABC} = 16$ ， $DE = 2$ ， $AB = 12$ ，则边 AC 的长是_____.



【答案】4

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质，解题关键是明确角平分线上的点到角两边的距离相等，做出辅助线，利用面积求解即可.

【详解】解：作 $DF \perp AC$ 于点 F ，

$\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ，

$$\therefore DF = DE = 2,$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12,$$

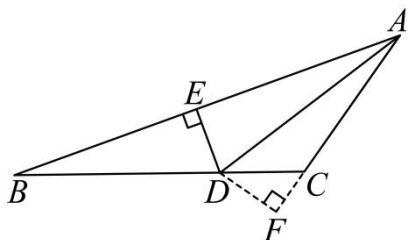
$$\because S_{\triangle ABC} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times AC \times DF = 4,$$

$$\because DF = DE = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

故答案为：4.



18. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 12\sqrt{2}$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AF 在 $\angle BAC$ 内部，且 $AF = AB$ ，分别将 AB ， AC 向 AF 对折，使得 AB ， AC 都与 AF 重合，折痕 AD ， AE 分别交 BC 于点 D ， E ．若 $DE = 10$ ，则 AD 的长为_____.

【答案】 $6\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，等腰三角形的知识，解题的关键是过点 A 作 $AG \perp BC$ 交 BC 于点 G ，根据勾股定理，求出 BC ，再根据等腰三角形三线合一，可 $BG = CG = AG = \frac{1}{2}BC$ ，设 $BD = x$ ，则 $EC = 14 - x$ ，由折叠可得： $EC = EF = 14 - x$ ， $DF = BD = x$ ，根据勾股定理，可得 $DE^2 = DF^2 + EF^2$ ，解出 x ，分类讨论 $BD = 6$ ； $BD = 8$ ，根据勾股定理，进行计算，即可.

【详解】 解： 过点 A 作 $AG \perp BC$ 交 BC 于点 G ，

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } AB = AC = 12\sqrt{2}, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 12\sqrt{2} = 24,$$

$$\therefore BG = CG = AG = \frac{1}{2}BC = 12,$$

设 $BD = x$ ，

$$\therefore EC = BC - DE - BD,$$

$$\because DE = 10,$$

$$\therefore EC = BC - DE - BD = 24 - 10 - x = 14 - x,$$

由折叠可得： $EC = EF = 14 - x$ ， $DF = BD = x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $DE^2 = DF^2 + EF^2$ ，

$$\therefore 10^2 = x^2 + (14 - x)^2,$$

解得： $x = 6$ 或 $x = 8$ ，

当 $x = 6$ 时，即 $BD = 6$ ，

$$\therefore DG = BG - BD = 12 - 6 = 6,$$

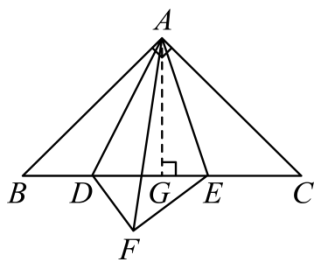
$$\therefore AD = \sqrt{DG^2 + AG^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5};$$

当 $x = 8$ 时，即 $BD = 8$ ，

$$\therefore DG = BG - BD = 12 - 8 = 4,$$

$$\therefore AD = \sqrt{DG^2 + AG^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10};$$

故答案为： $6\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{10}$.



三、计算题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

19. 计算： $\sqrt{75} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - (2-\sqrt{3})^0$.

【答案】 $7\sqrt{3} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根数的混合运算，零指数幂，掌握二次根式的性质是解题的关键.
首先根据二次根式的性质化简，计算零指数幂，然后计算加减即可.

【详解】 $\sqrt{75} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - (2-\sqrt{3})^0$

$$= 5\sqrt{3} + \frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 5\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 7\sqrt{3} + 1.$$

20. 解方程： $4(1-x) - x(x+4) = 0$.

【答案】 $x_1 = -4 + 2\sqrt{5}$, $x_2 = -4 - 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等.

首先将方程整理成一般式，然后利用配方法解一元二次方程即可.

【详解】 解： $4(1-x) - x(x+4) = 0$

$$4 - 4x - x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x^2 + 8x = 4$$

$$x^2 + 8x + 16 = 4 + 16$$

$$(x+4)^2 = 20$$

$$x+4 = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\text{解得 } x_1 = -4 + 2\sqrt{5}, \quad x_2 = -4 - 2\sqrt{5}.$$

四、解答题：（本大题共 6 小题，第 21-23 题，每小题 6 分，第 24 题 8 分，第 25 题 10 分，第 26 题 12 分，满分 48 分）

21. 若关于 x 的一元二次方程 $(k+2)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围.

【答案】 $k \leq 2$ 且 $k \neq -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

根据题意得出 $\begin{cases} (-4)^2 - 4(k+2) \times 1 \geq 0 \\ k+2 \neq 0 \end{cases}$ ，计算即可得到答案.

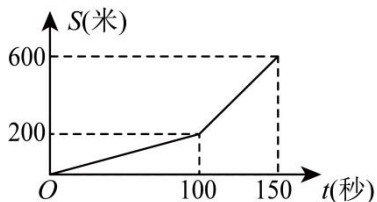
【详解】 解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $(k+2)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \begin{cases} (-4)^2 - 4(k+2) \times 1 \geq 0 \\ k+2 \neq 0 \end{cases},$$

解得： $k \leq 2$ 且 $k \neq -2$,

∴ k 的取值范围为 $k \leq 2$ 且 $k \neq -2$.

22. 周末，小李从家里骑车去小海家玩，要经过一段先上坡后下坡的路，如图所示是在这段路上小李骑车的路程 S （米）与骑车的时间 t （秒）之间的函数关系. 请根据图像信息，回答下列问题：



(1) 小李去小海家时下坡路长_____米；

(2) 小李下坡的速度为_____米/秒；

(3) 游玩过后，小李从小海家按原路返回，且上坡与下坡的速度保持不变，那么小李回家骑车走过这段路需要多长时间？

【答案】(1) 400 (2) 8

(3) 225 秒

【解析】

【分析】本题考查了函数图象，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

(1) 根据题意和函数图象可以得到下坡路的长度；

(2) 根据函数图象中的数据可以求的小李下坡的速度；

(3) 根据题意可以求得小李上坡的速度，进而求得小李返回时需要的时间.

【小问 1 详解】

由题意和图象可得：

小李去小海家时下坡路为： $600 - 200 = 400$ （米）；

【小问 2 详解】

由题意和图象可得：

小李下坡的速度为： $400 \div (150 - 100) = 8$ 米/秒；

【小问 3 详解】

小李上坡时的速度为： $200 \div 100 = 2$ 米/秒

$\therefore$ 小李回家骑车走这段路的时间是： $400 \div 2 + 200 \div 8 = 225$ （秒）.

23. 某工厂为了提高生产效率，正对生产线进行技术改革，在第一试验阶段实现了日产量 1500 件的目标，第三试验阶段实现了日产量 2160 件的目标.

(1) 如果第二阶段、第三阶段日产量的增长率相同，求该生产线日产量的增长率；

(2) 按照 (1) 中的日产量增长率，该工厂期望第四试验阶段日产量能达到 2500 件，请通过计算说明他们的目标能否实现.

【答案】(1) 20%

(2) 能，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 该生产线日产量的增长率 x ，根据题意得出关于 x 的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

(2) 根据题意求出第四试验阶段日产量，将其与 2500 件比较后即可得出结论.

本题考查了一元二次方程的应用，有理数的运算，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：该生产线日产量的增长率 x ，

依题意得： $1500(1+x)^2 = 2160$ ，

解得： $x_1 = 0.2 = 20\%$ ， $x_2 = -2.2 < 0$ （不合题意，舍去）。

答：该生产线日产量的增长率为 20%；

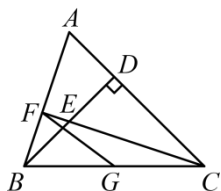
【小问 2 详解】

解：能，理由如下：

依题意， $2160 \times (1 + 20\%) = 2592 > 2500$ （件）。

$\therefore$ 他们的目标能实现。

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 为边 AC 上的高，且 $BD = CD$ ，在 BD 上截取一点 E 使 $CE = AB$ ，延长 CE 交 AB 于点 F ， G 为边 BC 上的中点，连接 FG 。



(1) 求证： $\angle ABD = \angle ECD$ ；

(2) 若 $FG \parallel AC$ ，求证： $CA = CB$ 。

【答案】(1) 证明过程见详解；

(2) 证明过程见详解。

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形全等的判定，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，等腰三角形的性质和判定，平行线的性质等，熟练运用这些知识点是正确解答此题的关键。

(1) 由 BD 为边 AC 上的高，证明 $\triangle CDE$ ， $\triangle BDA$ 都是直角三角形，用 HL 证明 $\text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE$ 即可得结论；

(2) 由 $\angle ABD = \angle ECD$ 得 $\angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ$ ，进而得出 $\triangle BCF$ 是直角三角形，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得 $FG = BG = \frac{1}{2}BC$ ，进而得 $\angle ABC = \angle BFG$ ，根据 $FG \parallel AC$ ，得 $\angle BFG = \angle A$ ，等量代换得 $\angle A = \angle ABC$ ，即可证明 $CA = CB$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because BD$ 为边 AC 上的高，

$\therefore \triangle CDE$ ， $\triangle BDA$ 都是直角三角形，

在 $\text{Rt}\triangle BDA$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，

$$\therefore \begin{cases} BA = CE \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ECD;$$

【小问2详解】

证明: $\because \angle ABD = \angle ECD, \angle ABE + \angle A = 90^\circ,$

$$\therefore \angle A + \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ,$$

即 $\triangle BCF$ 是直角三角形,

$\because G$ 为边 BC 上的中点,

$$\therefore FG = BG = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BFG,$$

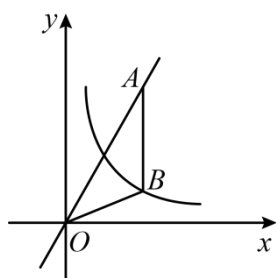
$\because FG \parallel AC,$

$$\therefore \angle BFG = \angle A,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC,$$

$$\therefore CA = CB.$$

25. 如图, 已知正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 经过点 $A(m, 6\sqrt{3}) (m > 0)$, 过点 A 作 $AB \parallel y$ 轴, 交反比例函数于点 B (点 B 在点 A 下方), 连接 OB 得 $\triangle AOB$ 的面积为 $12\sqrt{3}$.



(1) 求 m 的值;

(2) 求反比例函数解析式;

(3) 在直线 OA 上是否存在一点 C , 使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形? 若有, 请求出点 C 的坐标; 若没有, 请说明理由.

【答案】 (1) $m = 6$

$$(2) \quad y = \frac{12\sqrt{3}}{x}$$

$$(3) \quad C(2, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } C(3, 3\sqrt{3})$$

【解析】

【分析】(1) 将 $A(m, 6\sqrt{3}) (m > 0)$ 代入 $y = \sqrt{3}x$ 求解即可；

(2) 设点 B 的横坐标为 $(6, y)$ ，根据 $\triangle AOB$ 的面积为 $12\sqrt{3}$ 得到 $\frac{1}{2} \times 6(6\sqrt{3} - y) = 12\sqrt{3}$ ，求出 $B(6, 2\sqrt{3})$ ，
设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，代入点 B 坐标求解即可；

(3) 设 $C(n, \sqrt{3}n)$ ，根据题意分 $\angle ABC = 90^\circ$ 和 $\angle ACB = 90^\circ$ 两种情况，分别根据题意求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 经过点 $A(m, 6\sqrt{3}) (m > 0)$ ，

$$\therefore 6\sqrt{3} = \sqrt{3}m$$

$$\therefore m = 6;$$

【小问 2 详解】

解： $\because AB \parallel y$ 轴， $\triangle AOB$ 的面积为 $12\sqrt{3}$

$$\therefore \text{设点 } B \text{ 的横坐标为 } (6, y)$$

$$\therefore AB = 6\sqrt{3} - y$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6(6\sqrt{3} - y) = 12\sqrt{3}$$

$$\therefore y = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore B(6, 2\sqrt{3})$$

设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$

将 $B(6, 2\sqrt{3})$ 代入得， $2\sqrt{3} = \frac{k}{6}$

$$\therefore k = 12\sqrt{3}$$

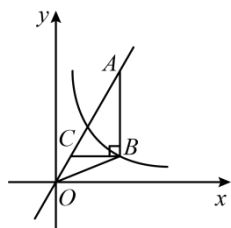
$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{12\sqrt{3}}{x};$$

【小问 3 详解】

解: $\because$ 点 C 在直线 OA 上

$$\therefore \text{设 } C(n, \sqrt{3}n)$$

如图所示, 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, 即 $AB \perp BC$



$\therefore AB \parallel y$ 轴,

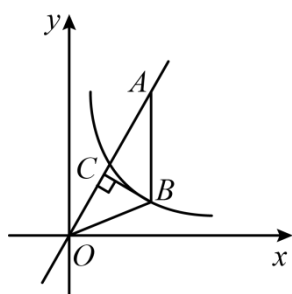
$\therefore BC \perp y$ 轴

$$\therefore \sqrt{3}n = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore C(2, 2\sqrt{3});$$

如图所示, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时,



$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$\therefore (6-n)^2 + (6\sqrt{3} - \sqrt{3}n)^2 + (6-n)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3}n)^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$\text{整理得, } n^2 - 9n + 18 = 0$$

解得 $n = 3$ 或 6 (舍去)

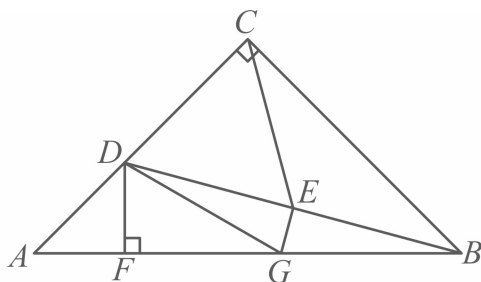
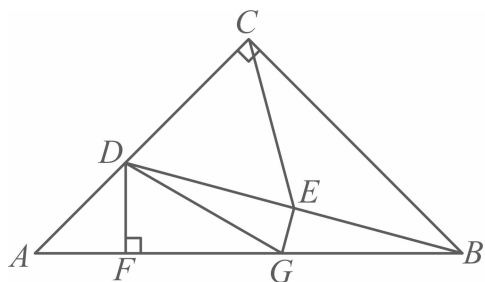
$$\therefore C(3, 3\sqrt{3}).$$

综上所述, 点 C 的坐标为 $C(2, 2\sqrt{3})$ 或 $C(3, 3\sqrt{3})$.

【点睛】 此题考查了一次函数, 反比例函数和几何综合题, 待定系数法求解析式, 勾股定理, 直角三角形的性质等知识, 解题的关键是掌握以上知识点.

26. 如图, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为线段 AC 上一点, $\angle ABD = 15^\circ$, 过点 D

作 $DF \perp AB$ ，垂足为点 F ，点 E 为线段 BD 中点， $GE \perp BD$ ，交 AB 于点 G ，连接 CE 、 DG 。



备用图

(1) 当 $AD = 2$ 时，求 DG 的长；

(2) 过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为点 H ，与 BD 相交于点 N 。

①若 $AD = x$ ， $CN = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式；

②在 (1) 的条件下，直接写出 $\triangle DCN$ 的面积。

【答案】(1) $2\sqrt{2}$

(2) ① $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x$ ；② $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 首先得到 $\angle A = \angle ABC = 45^\circ$ ， $\triangle AFD$ 是等腰直角三角形，求出 $AF = DF = \sqrt{2}$ ，然后得到 $GD = GB$ ， $\angle DGF = \angle GDB + \angle GBD = 30^\circ$ ，进而求解即可；

(2) ①如图所示，过点 N 作 $NM \perp AC$ 交 AC 于点 M ，表示出 FG ， AB ，然后得到 AC ， CD ，然后求出 $\angle DNM = 30^\circ$ ，设 $DM = m$ ，则 $DN = 2m$ ，表示出 $MN = \sqrt{DN^2 - DM^2} = \sqrt{3}m$ ， $CM = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x - m$ ，然后根据 $CM = NM$ 表示出 $m = \frac{1}{2}x$ ，进而求解即可；

②根据题意求出 CD ， MN ，然后利用三角形面积公式求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle ABC = 45^\circ$

$\because DF \perp AB$

$\therefore \triangle AFD$ 是等腰直角三角形

$\therefore AF = DF$ ， $AF^2 + DF^2 = AD^2$

$\therefore 2DF^2 = 2^2$

$$\therefore AF = DF = \sqrt{2} \quad (\text{负值舍去})$$

$\because$ 点 E 为线段 BD 中点, $GE \perp BD$

$$\therefore GD = GB$$

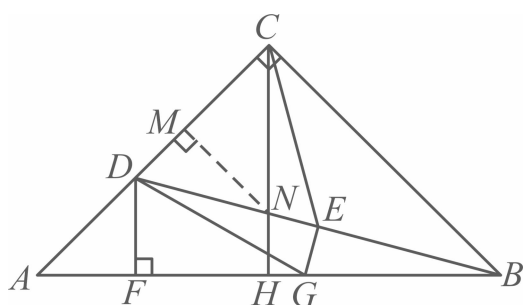
$$\therefore \angle GDB = \angle GBD = 15^\circ$$

$$\therefore \angle DGF = \angle GDB + \angle GBD = 30^\circ$$

$$\therefore DG = 2DF = 2\sqrt{2};$$

【小问 2 详解】

解: ①如图所示, 过点 N 作 $NM \perp AC$ 交 AC 于点 M



$$\because AD = x,$$

$$\therefore \text{由 (1) 得, } AF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\therefore BG = DG = 2DF = \sqrt{2}x$$

$$\therefore FG = \sqrt{DG^2 - DF^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\therefore AB = AF + FG + BG = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{2}x = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}x$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore CD = AC - AD = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}x - x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}x$$

$$\because \angle A = 45^\circ, \quad \angle ABD = 15^\circ$$

$$\therefore \angle CDB = \angle A + \angle ABD = 60^\circ$$

$$\because NM \perp AC$$

$$\therefore \angle DNM = 30^\circ$$

∴ 设 $DM = m$, 则 $DN = 2m$

$$\therefore MN = \sqrt{DN^2 - DM^2} = \sqrt{3}m, \quad CM = CD - DM = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x - m$$

$$\therefore \angle ACH = 45^\circ$$

$$\therefore CM = NM$$

$$\therefore \sqrt{3}m = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x - m$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}x$$

$$\therefore MN = \sqrt{3}m = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore CN = \sqrt{2}MN = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{6}}{2}x;$$

$$\textcircled{2} \because AD = x = 2$$

$$\therefore CD = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{3}+1, \quad MN = \frac{\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle DCN \text{ 的面积} = \frac{1}{2}CD \cdot MN = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

【点睛】 此题考查了等腰直角三角形的性质和判定，含 30° 角直角三角形的性质，勾股定理，解题的关键是掌握以上知识点.