

实验西校 2024 学年第一学期八年级数学学科

期末阶段教学评估

一、选择题 (本题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 在下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{1.3x}$ B. $\sqrt{a^2 + a^8}$ C. $\sqrt{a^2 + b^2}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了最简二次根式的定义, 根据最简二次根式的定义, 被开方数不含能开得尽方的因数或因式, 被开方数的因数是整数, 因式是整式, 依据此两项要求进行判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{1.3x} = \sqrt{\frac{13}{10}x} = \frac{\sqrt{130x}}{10}$ 被开方数含有分母, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{a^2 + a^8} = |a|\sqrt{1 + a^6}$ 被开方数含有开得尽的因式, 不是最简二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 是最简二次根式, 符合题意;

D、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 被开方数含有看得见的因数, 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选: C.

2. 下列关于 x 的方程中有实数根的是 ()

- A. $x^2 + 1 = 0$ B. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ C. $\sqrt{x+1} + 1 = 0$ D. $x^2 - mx - 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 解分式方程和解无理方程, 根据判别式可判断 A、D; 先把原方程化为整式方程, 解方程求出未知数的值, 进而检验即可判断 B; 根据算术平方根的非负性即可判断 C.

【详解】解: A、由题意得, $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$, 故原方程无实数根, 不符合题意;

B、 $\because \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$,

$\therefore x = 1$,

检验, 当 $x = 1$ 时, $x - 1 = 0$,

$\therefore x = 1$ 是原方程的增根, 即原方程无实数根, 不符合题意;

C、 $\because \sqrt{x+1}+1=0$,

$\therefore \sqrt{x+1}=-1$,

$\because \sqrt{x+1} \geq 0$,

$\therefore$ 原方程无实数根, 不符合题意;

D、由题意得, $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0$, 故原方程有两个不相等的实数根, 符合题意;

故选: D.

3. 用下列几组边长构成的三角形中哪一组不是直角三角形 ()

A. 8, 15, 17

B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$

D. 1, 2, $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理逆定理, 关键是掌握如果三角形的三边长 a , b , c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形就是直角三角形, 据此先求出两小边的平方和, 再求出最长边的平方, 最后看看是否相等即可.

【详解】解: A、 $\because 8^2 + 15^2 = 17^2$,

$\therefore$ 三边长为 8, 15, 17 的三角形可以组成直角三角形, 故此选项不符合题意;

B、 $\because (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2$,

$\therefore$ 三边长为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 的三角形可以组成直角三角形, 故此选项不符合题意;

C、 $\because 2^2 + (\sqrt{3})^2 \neq (\sqrt{5})^2$,

$\therefore$ 三边长为 $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$ 的三角形不可以组成直角三角形, 故此选项符合题意;

D、 $\because 1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$,

$\therefore$ 三边长为 1, 2, $\sqrt{5}$ 的三角形可以组成直角三角形, 故此选项不符合题意;

故选: C.

4. 下列函数中, 能同时满足以下三个特征的是 ()

①函数图象经过点 $(1, -1)$; ②图象经过第二象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

A. $y = -x$

B. $y = x - 2$

C. $y = -1$

D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数与反比例函数图象的性质，根据一次函数的增减性可得 $y = -x$ 不满足③；根据一次函数图象与其系数的关系可得 $y = x - 2$ 不满足②；根据平行于 x 轴的直线的性质可得 $y = -1$ 不满足③；根据反比例函数的性质可得 $y = -\frac{1}{x}$ 满足①②③.

【详解】解：A、在 $y = -x$ 中，一次项系数小于 0，则 y 随 x 的增大而减小，不符合③，不符合题意；

B、在 $y = x - 2$ 中，一次项系数大于 0，常数项小于 0，则该函数图象经过第一、三、四象限，不经过第二象限，不符合题意；

C、 $y = -1$ 中， y 不随着 x 的变化而变化，不符合③，不符合题意；

D、在 $y = -\frac{1}{x}$ 中， $-1 < 0$ ，则该函数图象经过第二、四象限，且在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，当 $x = 1$ 时， $y = -\frac{1}{1} = -1$ ，则该函数图象经过点 $(1, -1)$ ，故该函数满足①②③，符合题意；

故选：D.

5. 某种时装，平均每天销售 20 件，每件可盈利 40 元，若每件降价 1 元，则每天可以多售出 5 件，如果每天要盈利 1600 元，若设每件可降价 x 元，根据题意列出的方程是（ ）

A. $(40 - x)(20 - 5x) = 1600$

B. $(40 - x)(20 + 5x) = 1600$

C. $(40 + x)(20 + 5x) = 1600$

D. $(40 - 5x)(20 + 5x) = 1600$

【答案】B

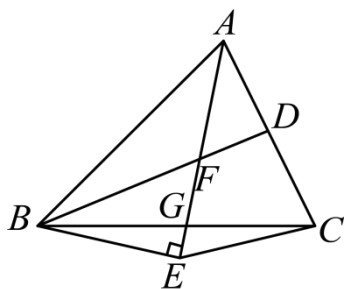
【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设每件可降价 x 元，则每件时装可盈利 $(40 - x)$ 元，销售量为 $(20 + 5x)$ 件，再根据总盈利为 1600 元列出方程即可.

【详解】解：由题意得， $(40 - x)(20 + 5x) = 1600$,

故选：B.

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 60^\circ$ ， AG 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 G ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ， AG 、 BD 相交于点 F ， $BE \perp AG$ 交 AG 的延长线于点 E ，连接 CE ，下列结论中正确的有（ ）



①若 $\angle BAD = 70^\circ$ ，则 $\angle EBC = 5^\circ$ ；② $BF = 2EF$ ；③ $AB = BG + AD$ ；④ $\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{BF}{AF}$

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定与性质、角平分线的性质定理、含 30° 度角的直角三角形的性质等知识，通过作辅助线，构造全等三角形是解题关键．先根据三角形的内角和定理可得 $\angle ABC = 50^\circ$ ，根据角平分线的定义可得 $\angle BAE = 35^\circ$ ，再根据直角三角形的性质可得 $\angle ABE = 55^\circ$ ，由此即可判断①正确；先根据角平分线的定义和三角形的内角和定理求出 $\angle BFE = 60^\circ$ ，从而可得 $\angle FBE = 30^\circ$ ，再根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可判断②正确；在 AB 上截取 $BN = BG$ ，连接 NF ，先证出 $\triangle BFN \cong \triangle BFG$ ，根据全等三角形的性质可得 $\angle BFN = \angle BFG = 60^\circ$ ，从而可得 $\angle AFN = \angle AFD$ ，再证出 $\angle AFN = \angle AFD$ ，根据全等三角形的性质可得 $AN = AD$ ，由此即可判断③正确；过点 N 作 $NP \perp BF$ 于点 P ，作 $NQ \perp AF$

于点 Q ，先根据角平分线的性质定理可得 $NP = NQ$ ，再根据三角形的面积公式可得 $\frac{S_{\triangle BFN}}{S_{\triangle AFN}} = \frac{BF}{AF}$ ，然后根

据全等三角形的性质可得 $S_{\triangle BFN} = S_{\triangle BFG}$ ， $S_{\triangle AFN} = S_{\triangle AFD}$ ，由此即可判断④正确．

【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 70^\circ$ ，

∴ $\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAD = 50^\circ$ ，

∵ AG 平分 $\angle BAC$ ，

∴ $\angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ$ ，

∵ $BE \perp AG$ ，

∴ $\angle ABE = 90^\circ - \angle BAE = 55^\circ$ ，

∴ $\angle EBC = \angle ABE - \angle ABC = 5^\circ$ ，结论①正确；

∵在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

∴ $\angle BAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$ ，

$\therefore AG$ 平分 $\angle BAC$, BD 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC, \quad \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

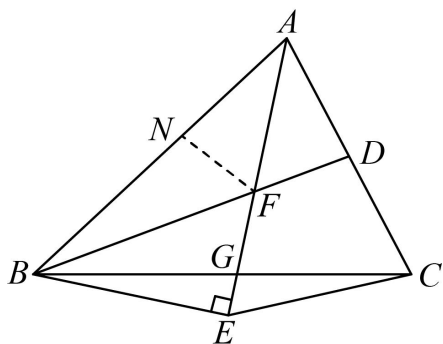
$$\therefore \angle BFE = \angle BAE + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 60^\circ,$$

$\therefore BE \perp AG$,

$$\therefore \angle FBE = 90^\circ - \angle BFE = 30^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $BF = 2EF$, 则结论②正确;

如图, 在 AB 上截取 $BN = BG$, 连接 NF ,



在 $\triangle BFN$ 和 $\triangle BFG$ 中,

$$\begin{cases} BN = BG \\ \angle NBF = \angle GBF, \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFN \cong \triangle BFG (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BFN = \angle BFG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFN = 180^\circ - \angle BFN - \angle BFG = 60^\circ,$$

由对顶角相等得: $\angle AFD = \angle BFG = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AFN = \angle AFD,$$

在 $\triangle AFN$ 和 $\triangle AFD$ 中,

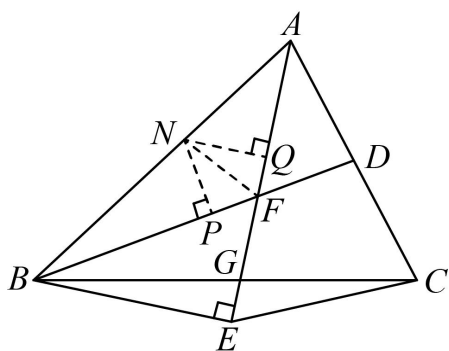
$$\begin{cases} \angle AFN = \angle AFD \\ AF = AF \\ \angle NAF = \angle DAF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AFN \cong \triangle AFD (\text{ASA}),$$

$$\therefore AN = AD,$$

$\therefore AB = BN + AN = BG + AD$, 则结论③正确;

如图，过点 N 作 $NP \perp BF$ 于点 P ，作 $NQ \perp AF$ 于点 Q ，



由上已得： $\angle AFN = \angle BFN = 60^\circ$ ，即 FN 平分 $\angle AFB$ ，

$\therefore NP = NQ$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BFN}}{S_{\triangle AFN}} = \frac{\frac{1}{2}BF \cdot NP}{\frac{1}{2}AF \cdot NQ} = \frac{BF}{AF}，$$

由上已证： $\triangle BFN \cong \triangle BFG$ ， $\triangle AFN \cong \triangle AFD$ ，

$\therefore S_{\triangle BFN} = S_{\triangle BFG}$ ， $S_{\triangle AFN} = S_{\triangle AFD}$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{S_{\triangle BFN}}{S_{\triangle AFN}} = \frac{BF}{AF}， \text{ 则结论④正确；}$$

综上，结论中正确的有 4 个，

故选：A.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 化简： $\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的分母有理化，熟练掌握二次根式的运算法则是解题关键. 分母分子同乘以 $(\sqrt{3}+2)$ ，计算二次根式的乘法即可得.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解： 原式} &= \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{3} - 2,$$

故答案为: $-\sqrt{3} - 2$.

8. 方程 $x^2 = 3x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先移项, 然后利用因式分解法把方程左边分解因式, 再解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because x^2 = 3x,$

$$\therefore x^2 - 3x = 0,$$

$$\therefore x(x-3) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 3 = 0,$$

解得 $x_1 = 0, x_2 = 3,$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 3$.

9. 函数 $y = \frac{x-1}{\sqrt{x-4}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > 4$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的定义域、二次根式的被开方数的非负性、分式的分母不能等于 0, 熟练掌握二次根式的被开方数的非负性、分式的分母不能等于 0 是解题关键. 根据二次根式的被开方数的非负性、分式的分母不能等于 0 求解即可得.

【详解】 解: 由题意得: $x - 4 > 0,$

解得 $x > 4,$

所以函数 $y = \frac{x-1}{\sqrt{x-4}}$ 的定义域是 $(4, +\infty),$

故答案为: $x > 4$.

10. 分式程 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解可化为一元二次方程的分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解题关键．需注意的是，分式方程的解一定要进行检验．方程两边同乘以 $(x-1)$ ，再利用直接开平方法解方程，然后进行检验即可得．

【详解】 解： $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ ，

方程两边同乘以 $(x-1)$ ，得 $x^2 = 1$ ，

解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ ，

经检验， $x = -1$ 是分式方程的解； $x = 1$ 不是分式方程的解，

故答案为： $x = -1$ ．

11. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 3k = 0$ 没有实数根，则实数 k 的取值范围为_____．

【答案】 $k > \frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根，据此求解即可．

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 3k = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \cdot 3k < 0,$$

$$\therefore k > \frac{4}{3},$$

故答案为： $k > \frac{4}{3}$ ．

12. 写出命题“两个全等三角形的面积相等”的逆命题_____．

【答案】 若两个三角形面积相等，则这两个三角形全等

【解析】

【分析】 根据逆命题的定义，若两个三角形面积相等，则这两个三角形全等即可．

【详解】 解： 命题“两个全等三角形的面积相等”的逆命题是：若两个三角形面积相等，则这两个三角形全等，

故答案为：若两个三角形面积相等，则这两个三角形全等．

【点睛】 本题考查命题概念，弄清楚命题的条件和结论是写出逆命题的关键.

13. 如果正比例函数 $y = (3k + 1)x$ 的图像经过第二、四象限，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据正比例函数的性质（正比例函数 $y = kx$ ， $k \neq 0$ ），当 $k < 0$ 时，该函数的图象经过第二、四象限）解答.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 $y = (3k + 1)x$ 的图象经过第二、四象限，

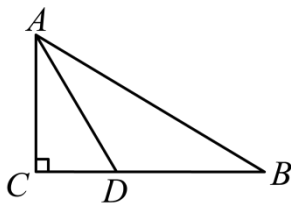
$\therefore 3k + 1 < 0$ ，

解得 $k < -\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $k < -\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了正比例函数的性质，解题的关键是熟练掌握正比例函数的性质.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $BD = 5\text{cm}$ ，则点 D 到直线 AB 的距离是_____.



【答案】 3cm ##3 厘米

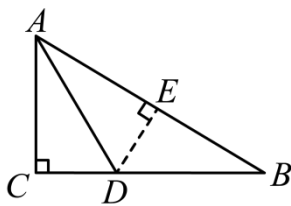
【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质定理，熟练掌握角平分线的性质定理是解题关键. 先求出 $CD = 3\text{cm}$ ，再过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，根据角平分线的性质定理求解即可得.

【详解】 解： $\because BC = 8\text{cm}$ ， $BD = 5\text{cm}$ ，

$\therefore CD = BC - BD = 3\text{cm}$ ，

如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



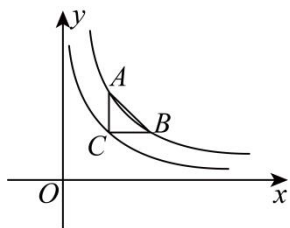
$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore DE = CD = 3\text{cm}$,

即点 D 到直线 AB 的距离是 3cm ,

故答案为: 3cm .

15. 如图, 点 A, B 在双曲线 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 上, 点 C 在双曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上, 若 $AC \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 且 $AC = BC$, 则 AB 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数与几何综合, 勾股定理, 设 $C\left(m, \frac{1}{m}\right)$, 则 $A\left(m, \frac{3}{m}\right)$, $B\left(3m, \frac{1}{m}\right)$,

据此表示出 AC , BC , 根据 $AC = BC$ 建立关于 m 的方程, 求出 m 的值, 进而得到 AC , BC 的长, 再利用勾股定理求出 AB 的长即可.

【详解】 解: 设 $C\left(m, \frac{1}{m}\right)$, 则 $A\left(m, \frac{3}{m}\right)$, $B\left(3m, \frac{1}{m}\right)$,

$$\therefore AC = \frac{3}{m} - \frac{1}{m} = \frac{2}{m}, \quad BC = 3m - m = 2m,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore 2m = \frac{2}{m},$$

解得 $m = 1$ 或 $m = -1$ (舍去),

经检验, $m = 1$ 是原方程的解,

$$\therefore AC = BC = 2,$$

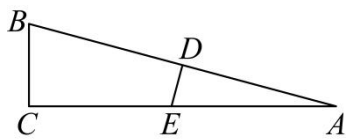
$$\because AC \parallel y \text{ 轴}, \quad BC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore AC \perp BC,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, D 是边 AB 的中点, $DE \perp AB$ 交 AC 于点 E . 那么 $CE : EA =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质, 勾股定理, 等边对等角, 三角形外角的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 根据题意可得 DE 垂直平分 AB , 则 $BE = AE$, 根据等边对等角和三角形外角的性质得到 $\angle BEC = 30^\circ$, 再用 BC 分别表示出 BE , CE , 据此可得答案.

【详解】 解: 如图所示, 连接 BE ,

$\because D$ 是边 AB 的中点, $DE \perp AB$,

$\therefore DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore BE = AE$,

$\therefore \angle EBA = \angle A = 15^\circ$,

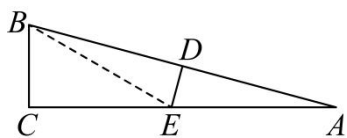
$\therefore \angle BEC = \angle EBA + \angle A = 30^\circ$,

$\therefore BE = 2BC$,

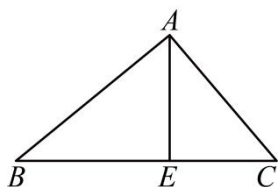
$\therefore CE = \sqrt{BE^2 - BC^2} = \sqrt{3}BC$,

$\therefore CE : EA = \sqrt{3}BC : 2BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



17. 定义: 三角形一边上的点将该边分为两条线段, 且这两条线段的积等于这个点到这边所对顶点的连线的平方, 则称这个点为三角形该边的“好点”. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AE \perp BC$ 于点 E , $AE = 3$, $BC = 7$, $\angle C = 45^\circ$, 点 D 是 BC 边上的“好点”, 则线段 BD 的长为_____.



【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 5

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的判定、勾股定理、一元二次方程的应用等知识，正确理解“好点”的定义是解题关键. 先求出 $CE = AE = 3$ ，设 $BD = x (0 < x < 7)$ ，则 $CD = 7 - x$ ， $BE = 4$ ，再分三种情况：

①点 D 在 BE 上；②点 D 与点 E 重合，③点 D 在 CE 上，利用勾股定理求出 AD^2 的值，再根据“好点”的定义求出 AD^2 的值，两者建立方程，解方程即可得.

【详解】 解： $\because AE \perp BC$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle C,$$

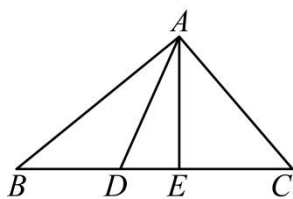
$$\therefore CE = AE = 3,$$

设 $BD = x (0 < x < 7)$ ，

$$\because BC = 7,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 7 - x, \quad BE = BC - CE = 4,$$

①如图，当点 D 在 BE 上时，则 $0 < x < 4$ ，



$$\therefore DE = CD - CE = 4 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD^2 = AE^2 + DE^2 = 3^2 + (4 - x)^2 = 25 - 8x + x^2,$$

$\therefore$ 点 D 是 BC 边上的“好点”，

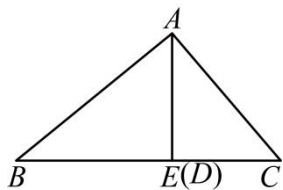
$$\therefore AD^2 = BD \cdot CD = x(7 - x) = 7x - x^2,$$

$$\therefore 7x - x^2 = 25 - 8x + x^2,$$

解得 $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = 5 > 4$ (不符合题设，舍去)，

∴此时 $BD = \frac{5}{2}$;

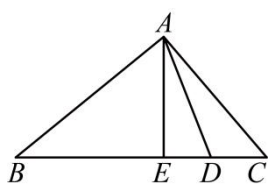
②如图, 当点 D 与点 E 重合时, 则 $x = 4$,



$$\therefore AD^2 = AE^2 = 9, \quad BD \cdot CD = BE \cdot CE = 12,$$

∴ $AD^2 \neq BD \cdot CD$, 这与点 D 是 BC 边上的“好点”矛盾, 则 $x = 4$ 的情形不存在;

③如图, 当点 D 在 CE 上时, 则 $4 < x < 7$,



$$\therefore DE = CE - CD = x - 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD^2 = AE^2 + DE^2 = 3^2 + (x - 4)^2 = 25 - 8x + x^2,$$

∵点 D 是 BC 边上的“好点”,

$$\therefore AD^2 = BD \cdot CD = x(7 - x) = 7x - x^2,$$

$$\therefore 7x - x^2 = 25 - 8x + x^2,$$

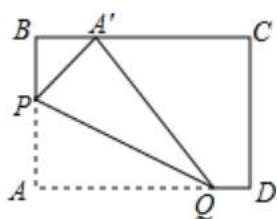
$$\text{解得 } x = 5 \text{ 或 } x = \frac{5}{2} < 4 \text{ (不符合题设, 舍去),}$$

∴此时 $BD = 5$;

综上, 线段 BD 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 5 ,

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 5 .

18. 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AD=13$, 如图所示, 折叠纸片, 使点 A 落在 BC 边上的 A' 处, 折痕为 PQ , 当点 A' 在 BC 边上移动时, 折痕的端点 P 、 Q 也随之移动. 若限定 P 、 Q 分别在 AB 、 AD 边上移动, 则点 A' 在 BC 边上可移动的最大距离为_____.



【答案】4

【解析】

【详解】如图 1，当点 D 与点 Q 重合时，根据翻折对称性可得

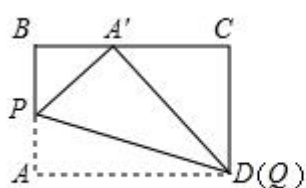


图1

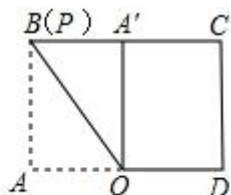


图2

$$A'D=AD=13,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A'CD \text{ 中, } A'D^2=A'C^2+CD^2,$$

$$\text{即 } 13^2=(13-A'B)^2+5^2,$$

$$\text{解得 } A'B=1,$$

$$\text{如图 2, 当点 P 与点 B 重合时, 根据翻折对称性可得 } A'B=AB=5,$$

$$\therefore 5-1=4,$$

$$\therefore \text{点 } A' \text{ 在 } BC \text{ 边上可移动的最大距离为 } 4.$$

三、解答题（本大题共 8 题，满分 58 分）

$$19. \text{ 计算: } \left(3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48} \right) \div 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

【答案】 $\frac{14}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解题关键．先化简二次根式，再计算括号内的二次根式的加减法，然后计算二次根式的除法与乘法即可得．

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48} \right) \div 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ & = \left(3 \times 2\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3} \right) \div 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3} \right) \div 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\
&= \frac{28\sqrt{3}}{3} \div 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\
&= \frac{14}{3} \times \sqrt{3} \\
&= \frac{14}{3} \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

20. 用配方法解方程: $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$.

【答案】 $x_1 = 3 + \sqrt{19}$, $x_2 = 3 - \sqrt{19}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先把二次项系数化为 1，再把常数项移到方程右边，接着把方程两边同时加上一半项系数一半的平方进行平方，进而解方程即可.

【详解】 解: $\because \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$,

$$\therefore x^2 - 6x - 10 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 6x = 10,$$

$$\therefore x^2 - 6x + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 10 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2,$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 = 19,$$

$$\therefore (x-3)^2 = 19,$$

$$\therefore x-3 = \pm\sqrt{19},$$

解得 $x_1 = 3 + \sqrt{19}$, $x_2 = 3 - \sqrt{19}$.

21. 解方程组: $\begin{cases} x-2y=4 \text{ ①} \\ x^2-xy-6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，熟练掌握加减消元法是解题关键. 先将方程②因式分解成两个方程，可得两个二元一次方程组，再利用加减消元法解方程组即可得.

【详解】解：由 $x^2 - xy - 6y^2 = 0$ 得： $(x - 3y)(x + 2y) = 0$,

则方程组 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{①} \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \text{②} \end{cases}$ 可转化为 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{①} \\ x - 3y = 0 \text{③} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{①} \\ x + 2y = 0 \text{④} \end{cases}$,

方程组 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{①} \\ x - 3y = 0 \text{③} \end{cases}$,

① - ③得： $-2y + 3y = 4$, 解得 $y = 4$,

将 $y = 4$ 代入①得： $x - 8 = 4$, 解得 $x = 12$,

所以这个方程组的解为 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$;

方程组 $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{①} \\ x + 2y = 0 \text{④} \end{cases}$,

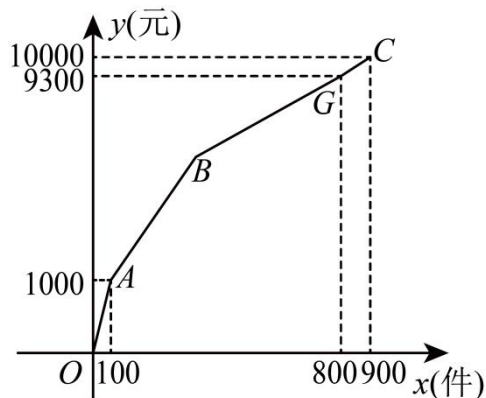
① + ④得： $2x = 4$, 解得 $x = 2$,

将 $x = 2$ 代入①得： $2 - 2y = 4$, 解得 $y = -1$,

所以这个方程组的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$;

综上，原方程组的解为 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

22. 互联网经济已经成为了我国经济的重要发展方向，下图是某电商平台上某商品第四季度的销售额 y (元) 和销售量 x (件) 之间的函数图像，线段 OA 表示某商品以原价销售时的函数图像，线段 AB 表示由于“双十一”活动阶段商品以某一幅度降价时的函数图像，线段 BC 表示由于“双十二”活动阶段商品以相同的幅度再次降价时的函数图像，



(1) 求线段 OA 所在直线的函数解析式；

(2) 该商品原价每件为_____元. 第二次降价后该商品每件为_____元.

(3) 该商品每次降价的百分率为_____.

【答案】(1) $y = 10x$

(2) 10, 6.4

(3) 20%

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的图像与性质、从函数图像中获取信息、一元二次方程的应用，从函数图像中正确获取信息是解题关键.

(1) 根据点(100,1000)，利用待定系数法求解即可得；

(2) 根据函数图像可得每件的原价等于销售额 1000 元除以销售量 100 件；第二次降价后该商品每件的价格为销售额(10000-9360)元除以销售量 100 件，由此即可得；

(3) 设该商品每次降价的百分率为 m ，结合 (2) 的结果，建立一元二次方程，解方程即可得.

【小问 1 详解】

解：设线段 OA 所在直线的函数解析式为 $y = ax (a \neq 0)$ ，

将点(100,1000)代入得： $100a = 1000$ ，解得 $a = 10$ ，

则线段 OA 所在直线的函数解析式为 $y = 10x$.

【小问 2 详解】

解：由线段 OA 表示的函数图像可知，该商品原价每件为 $\frac{1000}{100} = 10$ (元)，

由线段 BC 表示的函数图像可知，第二次降价后该商品每件为 $\frac{10000 - 9360}{900 - 800} = 6.4$ (元)，

故答案为：10, 6.4.

【小问 3 详解】

解：设该商品每次降价的百分率为 m ，

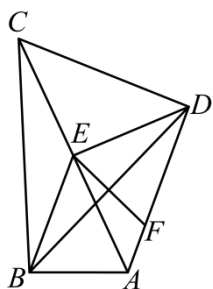
由题意得： $10(1-m)^2 = 6.4$ ，

解得 $m = 0.2 = 20\%$ 或 $m = 1.8 > 1$ (不符合题意，舍去)，

所以该商品每次降价的百分率为 20%，

故答案为：20% .

23. 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 为 AC 的中点，在图中作点 D ，使 $AD \parallel BE$ ，且 $\angle ADC = 90^\circ$ ，在 AD 上取点 F ，使得 $FD = BE$ ，分别联结 EF 、 ED 、 BD ，试判断 EF 与 BD 之间的位置关系，并证明.



【答案】 $EF \perp BD$ ，证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、等腰三角形的性质、平行线的性质等知识，熟练掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题关键．先根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $BE = \frac{1}{2}AC = DE$ ，根据等腰三角形的性质可得 $\angle EBD = \angle EDB$ ，再根据平行线的性质可得 $\angle EBD = \angle ADB$ ，从而可得 $\angle EDB = \angle ADB$ ，然后根据等腰三角形的三线合一即可得出结论．

【详解】 解： $EF \perp BD$ ，证明如下：

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 为 AC 的中点，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AC,$$

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， E 为 AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB,$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle ADB,$$

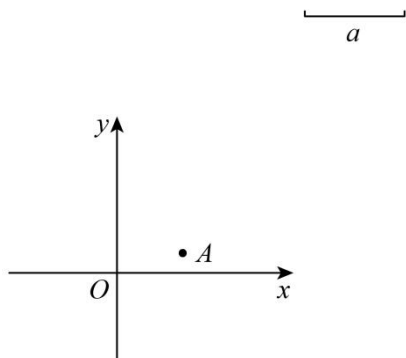
$$\therefore \angle EDB = \angle ADB, \text{ 即 } BD \text{ 平分 } \angle ADE,$$

$$\text{又} \because BE = DE, \quad FD = BE,$$

$$\therefore DE = FD,$$

$$\therefore EF \perp BD \text{ (等腰三角形的三线合一)}.$$

24. 如图，已知线段 a ，点 A 在平面直角坐标系 xOy 内．



(1) 用直尺和圆规在第一象限内作出点 P ，使点 P 到两坐标轴的距离相等，且与点 A 的距离等于 a 。（保留作图痕迹，不写作法）

(2) 在 (1) 的条件下，若 $a = 2\sqrt{5}$ ， A 点的坐标为 $(3, 1)$ ，求过 P 点的反比例函数的解析式，并写出该函数的增减性。

(3) 在 (2) 的条件下求直线 AP 的解析式，并直接写出 $\triangle AOP$ 的面积。

【答案】 (1) 见解析 (2) 过点 P 的反比例函数解析式为 $y = \frac{25}{x}$ ，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小

(3) 直线 AP 的解析式为 $y = 2x - 5$ ，5

【解析】

【分析】 (1) 作第一象限的角平分线，再以 A 为圆心，线段 a 的长为半径画弧交第一象限的角平分线于点 P ，点 P 即为所求；

(2) 在 (1) 的条件下，根据 $a = 2\sqrt{5}$ ， A 点的坐标为 $(3, 1)$ ，利用勾股定理即可求 P 点的坐标，进而得到函数的增减性即可；

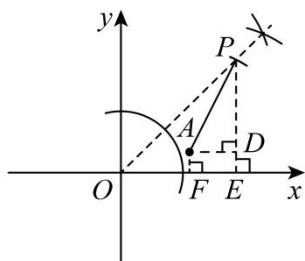
(3) 先利用待定系数法求出直线 AP 的解析式，设直线 AP 与 x 轴交于 B ，则 $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ，根据

$S_{\triangle AOP} = S_{\triangle BOP} - S_{\triangle AOB}$ 计算求解即可。

【小问 1 详解】

解：如图所示，点 P 即为所求；

$\overline{\hspace{1cm}}$
 a



【小问 2 详解】

解：由 (1) 可得 OP 是第一象限的角平分线，设点 $P(x, x)$ ，

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F ， $AD \perp PE$ 于点 D ，

$\because PA = a = 2\sqrt{5}$ ， A 点的坐标为 $(3, 1)$ ，

$\therefore PD = x - 1, AD = x - 3$ ，

根据勾股定理，得 $PA^2 = PD^2 + AD^2$ ，

$\therefore (2\sqrt{5})^2 = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$ ，

解得 $x = 5, x = -1$ (舍去)。

$\therefore P$ 点的坐标为 $(5, 5)$ ，

$\therefore$ 过点 P 的反比例函数解析式为 $y = \frac{25}{x}$ ，

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小；

【小问 3 详解】

解：设直线 AP 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\therefore \begin{cases} 5m + n = 5 \\ 3m + n = 1 \end{cases},$$

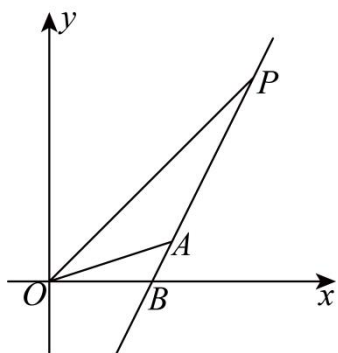
$$\therefore \begin{cases} m = 2 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AP 的解析式为 $y = 2x - 5$ ，

如图所示，设直线 AP 与 x 轴交于 B ，则 $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ，

$\therefore OB = \frac{5}{2}$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOP} = S_{\triangle BOP} - S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 - \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 1 = 5.$$



【点睛】本题考查了作图-复杂作图、坐标与图形的性质、角平分线的性质、勾股定理，求反比例函数的解析式，反比例函数的性质，一次函数与几何综合等等，解决本题的关键是掌握角平分线的性质，确定点 P 的位置.

25. 把一副三角板按如图 1 摆放(点 C 与点 E 重合), 点 $B, C(E), F$ 在同一直线上. $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle DEF = 45^\circ$, $BC = 8\text{cm}$, $EF = 12\text{cm}$, 点 P 是线段 AB 的中点. $\triangle DEF$ 从图 1 的位置出发, 以 4cm/s 的速度沿射线 CB 方向匀速运动, 如图 2, DE 与 AC 相交于点 Q , 连接 PQ . 当点 D 运动到 AC 边上时, $\triangle DEF$ 停止运动. 设运动时间为 $t(\text{s})$.

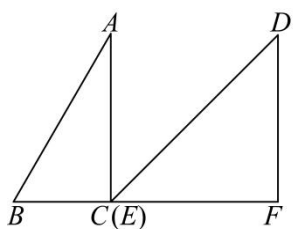


图1

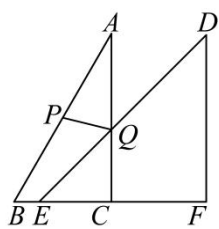


图2

- (1) 当 $t = 1$ 时, 求 AQ 的长;
- (2) 当点 A 在线段 PQ 的垂直平分线上时, 求 t 的值;
- (3) 在运动过程中是否存在以 AP 为底的等腰三角形 $\triangle APQ$, 如果存在, 请直接写出 t 的值; 如果不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $(8\sqrt{3} - 4)\text{cm}$

(2) $2\sqrt{3} - 2$

(3) 在运动过程中存在以 AP 为底的等腰三角形 $\triangle APQ$, 此时 t 的值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理、含 30° 角的直角三角形的性质、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的判定与性质等知识，熟练掌握等腰三角形的性质是解题关键.

(1) 先根据直角三角形的性质可得 $AB = 2BC = 16\text{cm}$ ， $AC = 8\sqrt{3}\text{cm}$ ，再根据等腰三角形的判定与性质可得 $CQ = CE = 4\text{cm}$ ，然后根据 $AQ = AC - CQ$ 求解即可得；

(2) 根据线段垂直平分线的性质可得 $AQ = AP = 8\text{cm}$ ，从而可得 CE, CQ 的长，由此即可得；

(3) 过点 Q 作 $QM \perp AP$ 于点 M ，根据等腰三角形的性质可得 $AM = \frac{1}{2}AP = 4\text{cm}$ ，再根据勾股定理可得 AQ 的长，从而可得 CQ 的长，由此即可得.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = 2BC = 16\text{cm}，AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8\sqrt{3}\text{cm}，$$

由题意得： $CE = 4t\text{cm}$ ，

当 $t = 1$ 时， $CE = 4\text{cm}$ ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ，\angle DEF = 45^\circ，$$

$$\therefore \angle CQE = 90^\circ - \angle DEF = 45^\circ，$$

$$\therefore \angle CQE = \angle DEF，$$

$$\therefore CQ = CE = 4\text{cm}，$$

$$\therefore AQ = AC - CQ = (8\sqrt{3} - 4)\text{cm}.$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 P 是线段 AB 的中点， $AB = 16\text{cm}$ ，

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AB = 8\text{cm}，$$

当点 A 在线段 PQ 的垂直平分线上时，则 $AQ = AP = 8\text{cm}$ ，

$$\because AC = 8\sqrt{3}\text{cm}，$$

$$\therefore CQ = AC - AQ = (8\sqrt{3} - 8)\text{cm}，$$

由 (1) 已得： $CE = CQ = (8\sqrt{3} - 8)\text{cm}$ ，

$$\therefore t = \frac{CE}{4} = (2\sqrt{3} - 2)\text{s}，$$

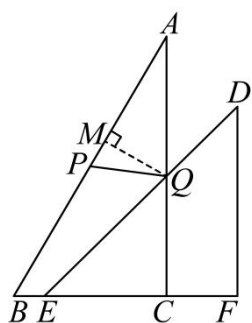
所以 t 的值为 $2\sqrt{3}-2$.

【小问 3 详解】

解：当点 D 运动到 AC 边上， $\triangle DEF$ 停止运动时， $t = \frac{EF}{4} = \frac{12}{4} = 3(\text{s})$,

$$\therefore 0 < t \leq 3,$$

如图， $\triangle APQ$ 是以 AP 为底的等腰三角形，过点 Q 作 $QM \perp AP$ 于点 M ,



$$\therefore AM = \frac{1}{2}AP = 4\text{cm},$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AMQ$ 中， $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AQ = 2MQ,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AQ^2 - MQ^2} = \sqrt{3}MQ = 4,$$

$$\therefore MQ = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm},$$

$$\therefore AQ = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm},$$

$$\therefore CQ = AC - AQ = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm},$$

$$\therefore CE = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm},$$

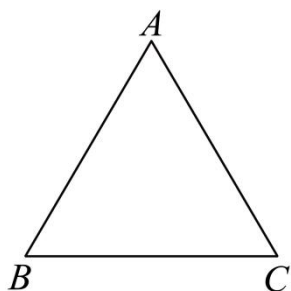
$$\therefore t = \frac{CE}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{s}, \text{ 符合题意,}$$

所以在运动过程中存在以 AP 为底的等腰三角形 $\triangle APQ$ ，此时 t 的值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

26. 小明在研究平面几何知识时，意识到等腰三角形和直角三角形经常同时出现，比如：等腰三角形三线合一；再比如：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。等等。在此基础上，小明同学还做了一些研究，

并邀请你参加.

已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转 180° , 点 B 、 C 的对应点分别是点 D 、 E , 连接 CD .



(1) 求证 $\angle BCD = 90^\circ$;

(2) 点 F 在边 DC 上 (且 F 不与点 C 、 D 重合), 连接 AF , 过 A 作 $AG \perp AF$, 交射线 CB 于点 G , 连接 FG , 小明发现线段 FG 、 DF 、 BG 能够组成一个直角三角形, 你认为小明的发现正确吗? 如果正确, 请证明, 如果不正确, 请说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知 $AB = 5$, $BC = 6$, 设 $CF = x$, $BG = y$, 直接写出 y 与 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.

【答案】(1) 见解析 (2) 小明的发现是正确的, 理由见解析

$$(3) y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}; \quad 0 < x \leq \frac{25}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理推导出 $\angle BCD = \angle B + \angle ACD = 90^\circ$ 即可;

(2) 延长 GA , 交 DE 于点 M , 连接 MF , 证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADM$ (SAS), 再由垂直平分线的性质得出 $MF = GF$, 在直角三角形 MDF 中, $MF^2 = MD^2 + DF^2$, 即 $GF^2 = BG^2 + DF^2$;

(3) 由 (2) $GF^2 = BG^2 + DF^2$, 可得 $GF^2 = y^2 + (8-x)^2$, 在 $\text{Rt}\triangle GCF$ 中, $GF^2 = x^2 + (6-y)^2$, 整理得到 $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$, 连接 EF , 当 G 点与 C 点重合时求出 CF 的长, 即可求 x 的取值范围.

【小问 1 详解】

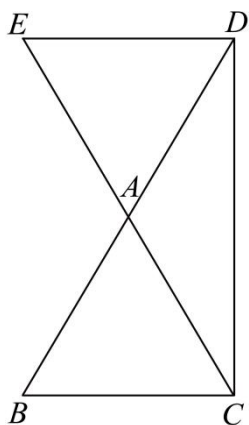
证明: 由旋转可知, $AD = AC = AB$, $\angle BAD = 180^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB + \angle B = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAD) = 90^\circ - \angle B,$$

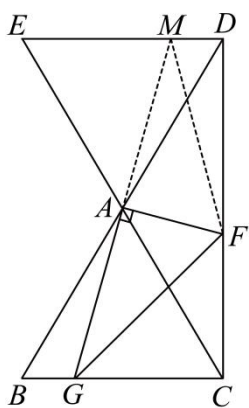
$$\therefore \angle BCD = \angle B + \angle ACD = 90^\circ;$$



【小问 2 详解】

解：小明的发现是正确的，理由如下：

如图，延长 GA ，交 DE 于点 M ，连接 MF ，如图所示：



根据旋转可知， $\angle BAD = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle EAD = \angle CBA$ ，

$\therefore B、A、D$ 在同一直线上，

$\therefore \angle BAG = \angle MAD$ ，

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADM \text{ (ASA)}$ ，

$\therefore BG = MD$ ，

$\because AF \perp AG$ ， $AG = AM$ ，

$\therefore AF$ 垂直平分 GM ，

$\therefore GF = MF$ ，

$\because \angle EAD = \angle CBA$ ，

$\therefore ED \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EDC = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore MF^2 = MD^2 + DF^2$ ，

$\therefore GF^2 = BG^2 + DF^2$ ；

【小问 3 详解】

解: $\because AB = 5$,

$$\therefore BD = 10,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 8$,

$$\because GF^2 = BG^2 + DF^2,$$

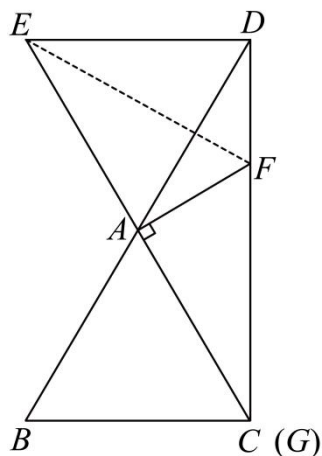
$$\therefore GF^2 = y^2 + (8-x)^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle GCF$ 中, $GF^2 = CG^2 + CF^2$, 即 $GF^2 = x^2 + (6-y)^2$,

$$\therefore x^2 + (6-y)^2 = y^2 + (8-x)^2,$$

整理得, $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$,

当 G 点与 C 点重合时, 连接 EF , 如图所示:



$$\because AE = AC, AG \perp AF,$$

$$\therefore AF \text{ 垂直平分 } CE,$$

$$\therefore CF = EF = x,$$

根据旋转可知: $DE = BC = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle EDF$ 中, $EF^2 = DF^2 + DE^2$,

$$\text{即 } x^2 = (8-x)^2 + 6^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{25}{4},$$

$\therefore$ 点 G 在射线 CB 上,

$$\therefore 0 < x \leq \frac{25}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查了旋转的性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 垂直平分线的性质, 求函数解析式,

求自变量的取值范围，三角形全等的判定和性质，解题的关键是数形结合，作出辅助线.