

上海市徐汇区市四 2024 学年第一学期初二数学期末考试卷

2025.1

(时间 90 分钟 满分 100 分)

班级_____学号_____姓名_____

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{ab^3}$

B. $\sqrt{a+b^3}$

C. $\sqrt{a^2+b^2-2ab}$

D. $\sqrt{8a}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式, 理解最简二次根式的意义是正确判断的关键. 根据最简二次根式的意义逐项进行判断即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{ab^3} = |b|\sqrt{ab}$, 故该选项不符合题意;

B. $\sqrt{a+b^3}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

C. $\sqrt{a^2+b^2-2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, 故该选项不符合题意;

D. $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 故该选项不符合题意;

故选: B.

2. 下列关于 x 的方程中, 一定是一元二次方程的是 ()

A. $x^2 + \frac{3}{x} - 5 = 0$

B. $x^2 - 2 = (x+3)^2$

C. $x^2 - 5 = 0$

D. $ax^2 + bx + c = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义, 根据一元二次方程的定义逐项分析即可得解, 熟练掌握一元二次方程的定义是解此题的关键.

【详解】 解: A、 $x^2 + \frac{3}{x} - 5 = 0$ 是分式方程, 故不是一元二次方程, 不符合题意;

B、将 $x^2 - 2 = (x+3)^2$ 整理得: $6x+11=0$, 是一元一次方程, 故不是一元二次方程, 不符合题意;

C、 $x^2 - 5 = 0$, 是一元二次方程, 符合题意;

D、当 $a=0$ 时, $ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程, 不符合题意;

故选: C.

3. 关于正比例函数 $y=2x$ 的图象, 下列叙述错误的是 ()

A. 点 $(-1, -2)$ 在这个图象上

B. 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小

C. 图象关于原点对称

D. 图象经过一、三象限

【答案】 B

【解析】

【分析】 分别利用正比例函数的性质分析得出即可.

【详解】 A. 当 $x=-1$ 时, $y=2 \times (-1) = -2$, 所以点 $(-1, -2)$ 在这个图象上, 此选项正确;

B. 由 $k=2 > 0$ 知函数值 y 随自变量 x 的增大而增大, 此选项错误;

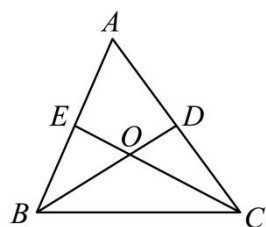
C. 正比例函数图象都关于原点对称, 此选项正确;

D. 由 $k=2 > 0$ 知图象经过一、三象限, 此选项正确;

故选 B.

【点睛】 此题主要考查了正比例函数的性质, 熟练掌握正比例函数的性质是解题关键.

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 62^\circ$, BD 是角平分线, CE 是高, BD 与 CE 相交于点 O , 则 $\angle BOC$ 的度数是 ()



A. 118°

B. 119°

C. 120°

D. 121°

【答案】 D

【解析】

【分析】 在 $\triangle BCE$ 中由三角形内角和可求得 $\angle EBC$, 由角平分线的定义可求得 $\angle OBC$, 在 $\triangle OBC$ 中再利用三角形内角和可求得 $\angle BOC$ 的度数.

【详解】 解: $\because CE$ 是高,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$,

$\because BD$ 是角平分线,

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 62^\circ = 31^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 31^\circ + 28^\circ = 59^\circ,$$

在 $\triangle OBC$ 中, 由三角形内角和定理可得 $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ,$$

故选: D.

【点睛】 本题主要考查三角形内角和定理, 角平分线的定义, 掌握三角形内角和为 180° 是解题的关键.

5. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

A. 偶数一定能被 2 整除

B. 两直线平行, 内错角相等

C. 三条边对应相等的两个三角形是全等三角形

D. 若 $x = y$, 则 $x^2 = y^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解如何写出一个命题的逆命题. 写出原命题的逆命题后判断正误即可.

【详解】 解: A、逆命题为能被 2 整除的数一定是偶数, 正确, 是真命题, 不符合题意;

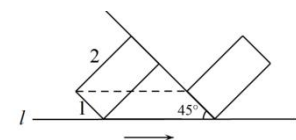
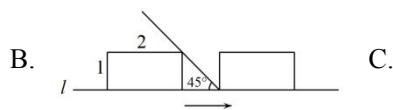
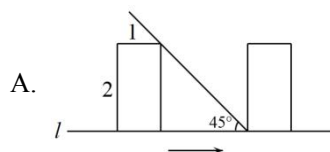
B、逆命题为内错角相等, 两直线平行, 正确, 是真命题, 不符合题意;

C、逆命题为全等三角形的三条边对应相等, 正确, 是真命题, 不符合题意;

D、逆命题为若 $x^2 = y^2$, 则 $x = y$, 错误, 是假命题, 符合题意.

故选: D.

6. 如图, 一个长为 2cm、宽为 1cm 的长方形, 按照下面的四种情况沿直线从左侧平移至右侧 (下图中的虚线都是水平线). 其中所需平移的距离最短的是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平移的性质, 利用等腰直角三角形的性质和勾股定理计算出各个图形中平移的距离, 然后比较它们的大小即可.

【详解】解：A. 平移的距离 $=2+1=3$ ，

B. 平移的距离 $=2+1=3$ ，

C. 平移的距离 $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ，

D. 平移的距离 $=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ，

$\because \sqrt{5} < 2\sqrt{2} < 3$ ，

$\therefore$ 所需平移的距离最短的是 D 选项.

故选 D

【点睛】本题考查了勾股定理，实数的大小比较，平移的性质：把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同；新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行且相等. 解决本题的关键是利用等腰直角三角形的性质和勾股定理计算出各个图形中平移的距离.

二、填空题 (本大题共 13 题, 每题 2 分, 满分 26 分)

7. 若 $a > 1$ ，则 $\sqrt{(1-a)^2} =$ _____.

【答案】 $a-1$

【解析】

【分析】本题考查的是二次根式的性质与化简，掌握二次根式的性质： $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

【详解】解： $\because a > 1$ ，

$\therefore 1-a < 0$ ，

则 $\sqrt{(1-a)^2} = |1-a| = a-1$ ，

故答案为： $a-1$.

8. 关于 x 的方程 $x^2 - x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

要使 $x^2 - x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则必须 $\Delta > 0$ ，进而可以计算出 k 的取值范围.

【详解】解：要使 $x^2 - x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，

则 $\Delta = (-1)^2 - 4k = 1 - 4k > 0$,

$$\therefore k < \frac{1}{4},$$

故答案为: $k < \frac{1}{4}$.

9. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 4x - 3$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 根据公式法解 $2x^2 - 4x - 3 = 0$, 得出 $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$, 再根据因式分解即可得出答案.

【详解】 解: 由 $2x^2 - 4x - 3 = 0$, 得: $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$,

$$\text{原式} = 2\left(x^2 - 2x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right),$$

$$\text{故答案为: } 2\left(x - \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right).$$

【点睛】 本题考查了实数范围内分解因式, 准确熟练地进行计算是解题的关键.

10. 函数 $f(x) = \sqrt{(3x-2)}$ 的定义域为 _____.

【答案】 $x \geq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数的定义域、二次根式有意义的条件, 根据二次根式有意义的条件计算即可得解.

【详解】 解: 由题意可得 $3x - 2 \geq 0$,

$$\text{解得: } x \geq \frac{2}{3},$$

故函数 $f(x) = \sqrt{(3x-2)}$ 的定义域为 $x \geq \frac{2}{3}$,

故答案为: $x \geq \frac{2}{3}$.

11. 如果直线 $y = mx + n$ 经过第一、二、三象限, 那么 mn _____ 0. (用 “>” 或 “<” 表示)

【答案】 >

【解析】

【分析】 该题考查了一次函数的图象和性质, 根据图象在坐标平面内的位置关系先确 m 、 n 的取值范围, 再

确定 mn 的取值范围, 从而求解.

【详解】解: 直线 $y = mx + n$ 经过一、二、三象限,

那么 $m > 0, n > 0$,

$\therefore mn > 0$.

故答案为: $>$.

12. 若点 $A(-1, a)$, $B(1, b)$, $C(2, c)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 则 a, b, c 的大小关系是_____.

【答案】 $a < c < b$

【解析】

【分析】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 根据题意, 分别求出 a, b, c 的值, 然后进行判断, 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 点 $A(-1, a)$, $B(1, b)$, $C(2, c)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,

$\therefore a = \frac{2}{-1} = -2$, $b = \frac{2}{1} = 2$, $c = \frac{2}{2} = 1$.

$\therefore -2 < 1 < 2$,

$\therefore a < c < b$.

故答案为: $a < c < b$.

13. 某地区空气污染的年平均值前年为 $180\mu\text{g}/\text{m}^3$, 经过两年的治理, 今年为 $80\mu\text{g}/\text{m}^3$, 如果设污染的年平均降低率, 每年的降低率均为 x , 列出关于 x 的方程: _____.

【答案】 $180 \times (1-x)^2 = 80$

【解析】

【分析】 本题考查了由实际问题列出一元二次方程, 设污染的年平均降低率, 每年的降低率均为 x , 再根据“某地区空气污染的年平均降低率前年为 $180\mu\text{g}/\text{m}^3$, 经过两年的治理, 今年为 $80\mu\text{g}/\text{m}^3$ ”列出一元二次方程即可.

【详解】解: 设污染的年平均降低率, 每年的降低率均为 x ,

由题意可得: $180 \times (1-x)^2 = 80$,

故答案为: $180 \times (1-x)^2 = 80$.

14. 经过点 A 且半径为 3 的圆的圆心的轨迹_____

【答案】 以 A 为圆心 3 为半径的圆

【解析】

【分析】 求圆心的轨迹实际上是求距 A 点 3 能画一个什么图形.

【详解】所求圆心的轨迹，就是到 A 点的距离等于 3 厘米的点的集合，因此是一个以 A 为圆心，半径为 3 的圆.

故答案为：以 A 为圆心 3 为半径的圆.

【点睛】此题所求圆心的轨迹，就是到顶点的距离等于定长的点的集合，因此应该是一个圆.

15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ， D 为斜边的中点，则 $CD = \underline{\hspace{1cm}}\text{cm}$.

【答案】6.5

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，勾股定理，比较简单，熟记性质是解题的关键. 根据勾股定理求出斜边的长，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质解答.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{cm},$$

$\because D$ 为斜边 AB 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5\text{cm}.$$

故答案为：6.5.

16. 已知 $A(2,2)$ ， $B(-1,-2)$ ，则 AB 两点间的距离为_____.

【答案】5

【解析】

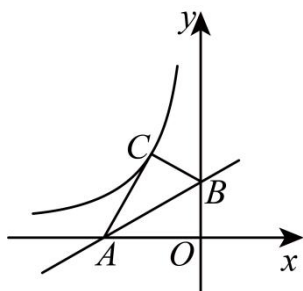
【分析】本题考查了两点间的距离公式. 熟记公式是解题的关键，比较简单.

根据两点间的距离公式进行解答即可.

$$\text{【详解】解： } AB = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (-2 - 2)^2} = 5,$$

故答案是：5.

17. 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x 轴交于点 $A(-2,0)$ ，与 x 轴夹角为 30° ，将 $\triangle ABO$ 沿直线 AB 翻折，点 O 的对应点 C 恰好落在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，则 k 的值为_____.

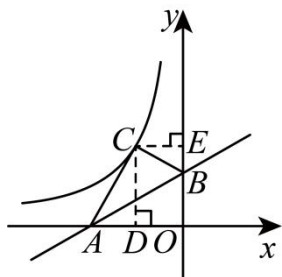


【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题以折叠问题为背景，主要考查了直角三角形的性质，以及勾股定理的应用，解决问题的关键是作辅助线构造直角三角形求出点 C 的坐标. 先过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ，作 $CE \perp y$ 轴于 E ，构造矩形 $CDOE$ ，再根据折叠的性质求得 $AC = 2$ ， $\angle ACD = 30^\circ$ ，根据直角三角形的性质以及勾股定理，求得 AD 与 CD 的长，得出点 C 的坐标，最后计算反比例函数解析式即可.

【详解】 解：过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ，作 $CE \perp y$ 轴于 E ，则 $CE = DO$ ， $CD = EO$ ，



$$\because A(-2, 0),$$

$$\therefore AO = 2,$$

由折叠得， $AC = AO = 2$ ， $\angle CAO = 2\angle BAO = 60^\circ$ ，

$\therefore$ Rt $\triangle ACD$ 中， $\angle ACD = 30^\circ$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = 1, \quad CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore DO = AO - AD = 2 - 1 = 1, \quad OE = \sqrt{3},$$

又 $\because$ 点 C 在第二象限，

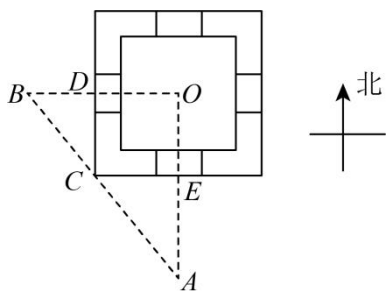
$$\therefore C(-1, \sqrt{3}),$$

$\because$ 点 C 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，

$$\therefore k = -1 \times \sqrt{3} = -\sqrt{3},$$

故答案为： $-\sqrt{3}$

18. 中国古代数学书《御制数理精蕴》中有一道题大意如下：如图，从前有一座方城，四面城墙的中间都有城门，出南门后往前直走 8 里到宝塔 A 处（即 $EA = 8$ 里），出西门往前直走 2 里到 B 处（即 $DB = 2$ 里），此时，视线刚好能紧靠城墙角 C 看见宝塔 A 。如果设正方形的中心为 O ，点 O 、 D 、 B 在一直线上，点 O 、 E 、 A 在一直线上， $AB = 6\sqrt{5}$ ，那么这座方城每一面的城墙长是_____里。



【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，勾股定理；先根据正方形的性质得出 $OD = CD = OE = CE = x$, $\angle BOA = 90^\circ$ ，再根据勾股定理列方程求解.

【详解】解：设正方形是每一面城墙的长度为 $2x$ 里，

$\because$ 正方形的中心为 O ,

$$\therefore OD = CD = OE = CE = x, \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = x + 2, OA = x + 8,$$

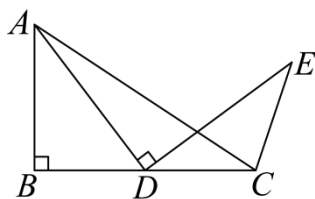
$$\therefore (x + 2)^2 + (x + 8)^2 = (6\sqrt{5})^2,$$

解得： $x = 4$ ，或 $x = -14$ （不合题意，舍去），

$$\therefore 2x = 8,$$

故答案为：8.

19. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点 D 在 BC 边上，将点 A 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到点 E ，连接 DE ， CE 。当 $\triangle DCE$ 是等腰三角形时， BD 的长为_____.



【答案】 $\frac{5}{3}$ 或 $4\sqrt{3} - 4$

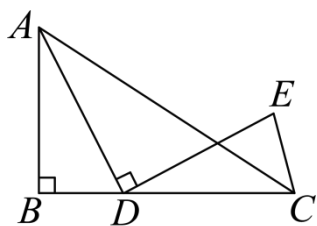
【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，勾股定理，熟练掌握相关性质定理，灵活运用分类讨论的思想是解答本题的关键.

根据题意，分两种情况：当 $CD = DE$ 时，当 $CD = CE$ 时，分别利用勾股定理列出式子，计算得到结果.

【详解】解：根据题意设： $BD = x$ ，则 $CD = 6 - x$ ，

当 $CD = DE$ 时，



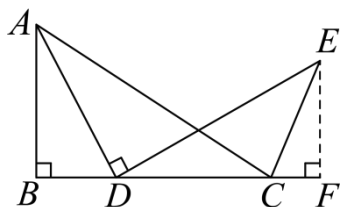
根据题意得: $AD = CD = DE = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB^2 + BD^2 = AD^2$,

$$\text{即 } 4^2 + x^2 = (6 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{3}, \text{ 即 } BD = \frac{5}{3},$$

当 $CD = CE$ 时, 作 $EF \perp BC$ 于点 F , 如图,



由旋转的性质得: $AD = DE$, $\angle ADE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle ADB = \angle EDF,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle FDE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = DF = 4, \quad BD = EF = x,$$

$$\therefore CF = DF - CD = 4 - (6 - x) = x - 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中,

$$CD = CE = 6 - x,$$

$$CF^2 + EF^2 = CE^2, \text{ 即 } (x - 2)^2 + x^2 = (6 - x)^2,$$

$$\therefore x^2 + 8x - 32 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \pm 4\sqrt{3} - 4,$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{3} - 4,$$

综上, BD 的长为 $\frac{5}{3}$ 或 $4\sqrt{3} - 4$.

故答案为: $\frac{5}{3}$ 或 $4\sqrt{3} - 4$.

三、简答题 (本大题共 6 题, 6+6+6+8+8+8 分, 满分 42 分)

20. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

【答案】 $2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，掌握相关运算法则，正确进行计算是解题的关键；依次化简前面三个二次根式，最后一个进行分母有理化，然后合并同类二次根式即可.

【详解】 解: $\sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
 $= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$
 $= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$

21. 解方程: $2x^2 - x - 6 = 0$.

【答案】 $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 2$.

【解析】

【分析】 利用十字相乘法把方程的左边分解因式，即可化为两个一元一次方程，即可求解.

【详解】 解: 原式即 $(2x+3)(x-2) = 0$,

则 $2x+3=0$ 或 $x-2=0$,

解得: $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的特点灵活选用合适的方法.

22. 平面直角坐标系中，直线经过点 $(2, -3)$ ，且与直线 $y = 3x - \frac{8}{3}$ 平行，求直线 l 的解析式，以及与 x 轴的交点坐标.

【答案】 直线 l 的解析式为 $y = 3x - 9$ ；与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式、一次函数与坐标轴的交点问题，设直线 l 的解析式为

$y = 3x + b$ ，利用待定系数法求解即可.

【详解】解：∵直线 l 经过点 $(2, -3)$ ，且与直线 $y = 3x - \frac{8}{3}$ 平行，

∴设直线 l 的解析式为 $y = 3x + b$ ，

∴ $3 \times 2 + b = -3$ ，

∴ $b = -9$ ，

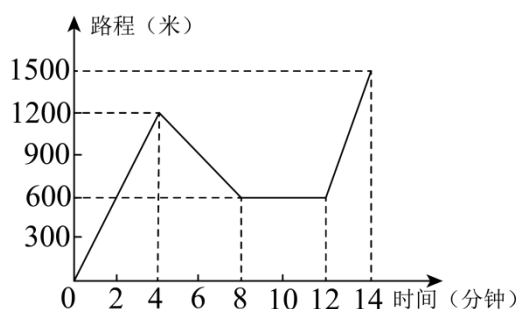
∴直线 l 的解析式为 $y = 3x - 9$ ，

当 $y = 0$ 时， $3x - 9 = 0$ ，

解得： $x = 3$ ，

故与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$.

23. 某同学从家出发骑车去学校参加活动，当她骑行一段时间，突然想买一些食品当午饭，于是又折返回刚经过的一家商店，买好东西后又继续骑车如图是该同学离家的距离与所用时间的关系示意图根据图中提供的信息回答下列问题：



(1) 该同学折返前，他骑车的速度是_____米/分钟，其中路程 s 关于所用时间 t 的函数关系式为_____；

(2) 由于途中返回买东西比直接去学校多走了_____米；

(3) 当该同学距离学校 300 米时，所用时间为_____分钟.

【答案】(1) 300; $s = 300t$

(2) 1200 (3) 4 或 $\frac{40}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了函数的图象，函数的解析式，解题的关键是熟练掌握函数的图象.

(1) 根据题意以及图象可知即可求解；

(2) 根据图象中的数据即可求解；

(3) 分开始去时和买好东西后又继续去时两种情况解答即可.

【小问 1 详解】

解：该同学折返前，他骑车的速度是 $1200 \div 4 = 300$ 米/分钟，

其中路程 s 关于所用时间 t 的函数关系式为 $s = 300t$ ；

故答案为：300； $s = 300t$.

【小问2详解】

解：该同学途中返回买东西比直接去学校多走了： $(1200 - 600) \times 2 = 1200$ （米）；

故答案为：1200；

【小问3详解】

解：根据图象可得，当该同学出发后4分钟时，距离学校 $1500 - 1200 = 300$ 米，

当该同学买好东西后又继续骑车时速度为 $(1500 - 600) \div (14 - 12) = 450$ 米 / 分钟，

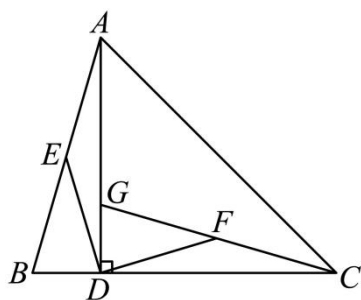
$(1200 - 600) \div 450 = \frac{4}{3}$ （分钟），

$\frac{4}{3} + 12 = \frac{40}{3}$ （分钟），

故该同学出发后4分钟或 $\frac{40}{3}$ 分钟时，距离学校300米.

故答案为：4 或 $\frac{40}{3}$.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， G 是 AD 上一点，且 $BD = DG$. 连接 CG ，点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点，求证： $DE = DF$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线的性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，推出 $AD = CD$ ，从而证明 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD$ (SAS)，得出 $AB = CG$ ，再根据直角三角形斜边上的中线的性质即可证明.

【详解】 证明： $\because \angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$ ， $\angle ADC = \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle ACD$

$$\therefore AD = CD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADC = \angle ADB \\ BD = DG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD (\text{SAS})$$

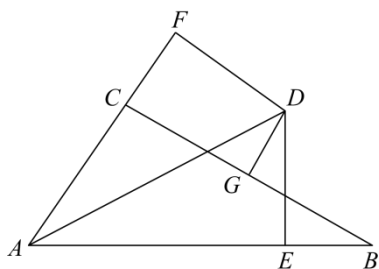
$$\therefore AB = CG$$

又 $\because$ 点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}CG$$

$$\therefore DE = DF.$$

25. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 外一点, DG 为 BC 的垂直平分线, 分别过点 D 作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为点 E , F , 且 $BE = CF$.



- (1) 求证: AD 为 $\angle CAB$ 的角平分线;
 (2) 若 $AB = 8$, $AC = 6$, 求 AE 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $AE = 7$

【解析】

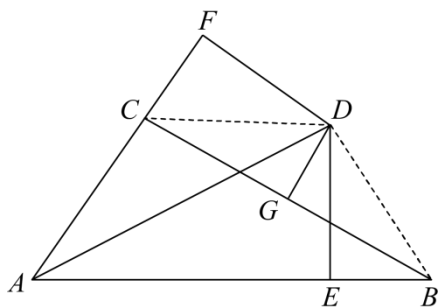
【分析】 (1) 连接 CD , BD , 根据线段垂直平分线的性质可得 $CD = BD$, 再证明 $\text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DFC$, 可得 $DF = DE$, 再证明 $\text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AED$, 即可得证;

(2) 根据全等三角形的性质可得 $AE = AF$, 进一步可得 $AB - AE = AF - AC$, 从而可得

$$AE = \frac{1}{2}(AB + AC).$$

【小问 1 详解】

连接 CD , BD , 如图所示:



$\because DG$ 为 BC 的垂直平分线,

$$\therefore CD = BD,$$

$\because DE \perp AB, DF \perp AC,$

$$\therefore \angle DEB = \angle DFC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 和 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中,

$$\begin{cases} BE = CF \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DFC$$

$$\therefore DE = DF,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} DF = DE \\ AD = AD \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AED$$

$$\therefore \angle FAD = \angle EAD,$$

$\therefore AD$ 为 $\angle CAB$ 的角平分线;

【小问 2 详解】

$$\because \text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AED,$$

$$\therefore AE = AF,$$

$$\text{又} \because BE = CF,$$

$$\therefore AB - AE = AF - AC, \text{ 即 } AE = \frac{1}{2}(AB + AC),$$

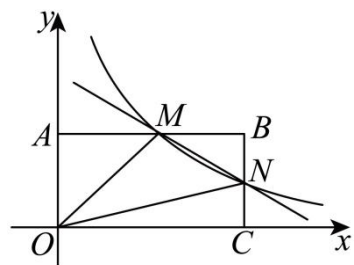
$$\because AB = 8, AC = 6,$$

$$\therefore AE = 7.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质、角平分线的判定及线段垂直平分线的性质, 熟练掌握直角三角形全等的判定方法是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 2 题, 每题 7 分, 满分 14 分)

26. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合, A, C 分别在坐标轴上, 点 B 的坐标为 $(8, 4)$, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 分别交 AB, BC 于点 M, N , 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 M, N .



- (1) 求反比例函数的表达式及点 M, N 的坐标;
- (2) 观察图像, 当 $x > 0$ 时, 写出关于 x 的不等式 $\frac{k}{x} + \frac{1}{2}x - 6 > 0$ 的解集;
- (3) 若点 P 在第一象限内的反比例函数图像上, 且 $\triangle OCP$ 的面积是四边形 $BMON$ 面积的 $\frac{7}{3}$ 倍, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $M(4, 4), N(8, 2)$

(2) $0 < x < 4$ 或 $x > 8$

(3) $P\left(\frac{12}{7}, \frac{28}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了用待定系数法求反比例函数的解析式, 一次函数与反比例函数的交点问题, 三角形的面积, 矩形的性质等知识;

(1) 根据点 B 的坐标, 矩形的性质可求点 M 的纵坐标, 点 N 的横坐标, 把点 M 的纵坐标, 点 N 的横坐标代入直线解析式可求点 M 的横坐标, 点 N 的纵坐标, 把点 M 的坐标代入反比例函数解析式即可求出 k , 即可求解;

(2) 结合函数图象求解即可;

(3) 根据割补法求出四边形 $BMON$ 面积, 然后根据 “ $\triangle OCP$ 的面积是四边形 $BMON$ 面积的 $\frac{7}{3}$ 倍” 可求点 P 的纵坐标, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because B(8, 4)$, 四边形 $OABC$ 是矩形,

$\therefore OA = BC = 4$,

将 $y = 4$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 得: $4 = -\frac{1}{2}x + 6$,

解得: $x = 4$,

$\therefore M(4, 4)$,

将 $x = 8$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 得: $y = 2$,

$\therefore N(8, 2)$.

把 M 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 得: $4 = \frac{k}{4}$,

解得: $k = 16$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式是 $y = \frac{16}{x}$.

【小问 2 详解】

解: 根据图象可得, 当 $x > 0$ 时, $\frac{k}{x} + \frac{1}{2}x - 6 > 0$ 的解集为 $0 < x < 4$ 或 $x > 8$.

【小问 3 详解】

解: 由题意可得: $S_{\text{四边形}BMON} = S_{\text{矩形}OABC} - S_{\triangle AOM} - S_{\triangle CON} = 8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 16$,

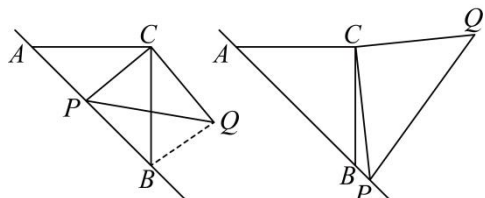
$\therefore \triangle OCP$ 的面积是四边形 $BMON$ 面积的 $\frac{7}{3}$ 倍,

$\therefore S_{\triangle OCP} = \frac{7}{3} \times 16 = \frac{112}{3}$,

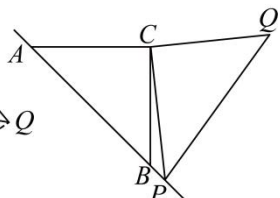
即 $\frac{1}{2} \times 8y_P = \frac{112}{3}$, 解得: $y_P = \frac{28}{3}$,

$\therefore P\left(\frac{12}{7}, \frac{28}{3}\right)$.

27. 已知, 如图: ABC 是等腰直角三角形, 动点 P 在斜边 AB 所在的直线上, 以 PC 为直角边作等腰直角三角形 PCQ , 其中 $\angle PCQ = 90^\circ$, 探究并解决下列问题:



图①



图②

(1) 如图①, 若点 P 在线段 AB 上, 且 $AC = 5$, $PA = 2\sqrt{2}$, 则:

① 线段 $AB =$ _____, $PB =$ _____;

②猜想: PA^2 , PB^2 , PQ^2 三者之间的数量关系为_____;

(2) 如图②, 若点 P 在 AB 的延长线上, 在 (1) 中所猜想的结论仍然成立, 请你给出证明过程;

(3) 若动点满足 $PA:PB=1:3$, 求 $PC:AC$ 的值.

【答案】(1) ① $5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; ② $PA^2 + PB^2 = PQ^2$

(2) 见解析 (3) $\frac{PC}{AC}$ 的值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】(1) ①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用勾股定理可求得 AB , 由 $PB = AB - PA$ 可求得 PB 的长; ②过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 则可求得 $AD = CD = \frac{1}{2}AB$, 把 PA^2 和 PB^2 都用 PC 和 CD 表示出来, 在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中, 由勾股定理得到 PC 和 PD, CD 的关系, 从而可得到 PA^2, PB^2, PQ^2 三者之间的数量关系;

(2) 过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 把 PA^2 和 PB^2 都用 PC 和 CD 表示出来, 在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中, 由勾股定理得到 PC 和 PD, CD 的关系, 从而可证得结论;

(3) 分点 P 在线段 AB 上和线段 BA 的延长线上, 分别利用 $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$ 得到 PA 和 CD 的关系, 从而可得到 PD 和 CD 的关系, 在 $\text{Rt}\triangle CPD$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 利用勾股定理可分别得到 PC, AC 和 CD 的关系, 从而可求得 $\frac{PC}{AC}$ 的值.

【小问 1 详解】

解: ① $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AC = 5$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\because PA = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore PB = AB - PA = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$

$$\textcircled{2} PA^2 + PB^2 = PQ^2,$$

证明: 如图 1, 过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,

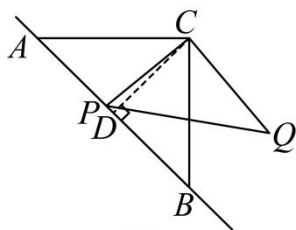


图1

$\because \triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$,

$$\therefore CD = AD = DB,$$

$$\therefore PA^2 = (AD - PD)^2 = (CD - PD)^2 = CD^2 - 2CD \cdot PD + PD^2,$$

$$PB^2 = (BD + PD)^2 = (CD + PD)^2 = CD^2 + 2CD \cdot PD + PD^2,$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 2CD^2 + 2PD^2 = 2(CD^2 + PD^2),$$

在 $Rt\triangle PCD$ 中, 由勾股定理可得 $PC^2 = CD^2 + PD^2$,

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 2PC^2,$$

$\because \triangle CPQ$ 为等腰直角三角形, 且 $\angle PCQ = 90^\circ$,

$$\therefore 2PC^2 = PQ^2,$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = PQ^2,$$

故答案为: $PA^2 + PB^2 = PQ^2$;

【小问 2 详解】

证明: 如图 2, 过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,

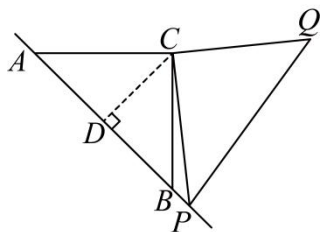


图2

$\because \triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$,

$$\therefore CD = AD = DB,$$

$$\therefore PA^2 = (AD + PD)^2 = (CD + PD)^2 = CD^2 + 2CD \cdot PD + PD^2,$$

$$PB^2 = (PD - BD)^2 = (PD - CD)^2 = CD^2 - 2CD \cdot PD + PD^2,$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 2CD^2 + 2PD^2 = 2(CD^2 + PD^2),$$

在 $Rt\triangle PCD$ 中, 由勾股定理可得 $PC^2 = CD^2 + PD^2$,

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 2PC^2,$$

$\because \triangle CPQ$ 为等腰直角三角形, 且 $\angle PCQ = 90^\circ$,

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PA = \frac{1}{2}AB = CD = AD,$$

在 $Rt\triangle CPD$ 中, 由勾股定理可得 $PC = \sqrt{CD^2 + PD^2} = \sqrt{CD^2 + (2CD)^2} = \sqrt{5}CD$,

在 $Rt\triangle ACD$ 中, 由勾股定理可得 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{CD^2 + CD^2} = \sqrt{2}CD$,

$$\therefore \frac{PC}{AC} = \frac{\sqrt{5}CD}{\sqrt{2}CD} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

综上, $\frac{PC}{AC}$ 的值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

【点睛】 本题主要考查等腰直角三角形的性质, 勾股定理的应用, 二次根式的运算, 直角三角形的性质, 并涉及分类讨论的思想. 在 (2) 中注意分别用 CD 和 PD 表示出 PA 和 PB 是解题的关键, 在 (3) 中确定出 P 点的位置, 再结合条件找到 PC, AC 与 CD 的关系是解题的关键. 本题涉及内容不多, 但综合性很强.