

市北初级中学教育集团 2024 学年第一学期期末练习卷

八年级数学

(完卷时间: 100 分钟满分 120 分)

一、单选题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{8}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{xy^3}$

D. $\sqrt{x+y^3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简, 最简二次根式的定义, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键. 根据最简二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

C. $\sqrt{xy^3} = |y|\sqrt{xy}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

D. $\sqrt{x+y^3}$, $\sqrt{x+y^3}$ 是最简二次根式, 符合题意.

故选: D.

2. 下列关于 x 的方程中一定没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$;

B. $x^2 - 2x + 1 = 0$;

C. $x^2 - 2x + 2 = 0$;

D. $x^2 - 2x - 2 = 0$.

【答案】C

【解析】

【分析】根据根的判别式解答即可.

【详解】解: A. $\because \Delta = 4 - 0 = 4 > 0$, $\therefore$ 方程有 2 个不相等的实数根, 故不符合题意;

B. $\because \Delta = 4 - 4 = 0$, $\therefore$ 方程有 2 个相等的实数根, 故不符合题意;

C. $\because \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, $\therefore$ 方程没有实数根, 故符合题意;

D. $\because \Delta = 4 + 8 = 12 > 0$, $\therefore$ 方程有 2 个不相等的实数根, 故不符合题意;

故选 C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键．当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根．

3. 已知反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，如果 $x_1 < x_2$ ，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 < y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 不能确定

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的图象与性质，根据反比例函数的图象与性质判断即可，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题的关键．

【详解】 $\because y = \frac{5}{x}$ 中， $5 > 0$ ，

$\therefore$ 在每一个象限， y 随 x 的增大而减小，

当 $0 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 > y_2$ ；

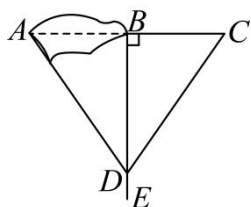
当 $x_1 < x_2 < 0$ 时， $y_1 > y_2$ ，

当 $x_1 < 0 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ，

$\therefore y_1$ 与 y_2 的大小关系不能确定，

故选： D ．

4. 为了测量无法直接测量的池塘两端 A， B 的距离，小王同学设计了一个测量 A， B 距离的方案．如图，先确定直线 AB，过点 B 作直线 $BE \perp AB$ ，在直线 BE 上找可以直接到达点 A 的一点 D，连接 DA，作 $DC = DA$ ，交直线 AB 于点 C，最后测量 BC 的长即得 $AB = BC$ ．根据的原理是 ()



- A. HL B. ASA C. SAS D. SSS

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的实际应用，根据全等三角形的判定方法，进行判断即可.

【详解】 解：由题意，可知： $\angle ABE = \angle CBE = 90^\circ$ ， $DC = DA$ ，

又 $\because DB = DB$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (HL)；

$\therefore AB = BC$ ；

故选 A.

5. 下列命题是假命题的是 ()

A. 全等三角形的面积相等

B. 两直线平行，同旁内角互补

C. 如果两个角相等，那么它们是对顶角

D. 三角形的内角和等于 180°

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 根据全等三角形的性质、平行线的性质、对顶角、三角形内角和定理逐项判断即可得.

【详解】 解：A、全等三角形的面积相等，是真命题，则此项不符合题意；

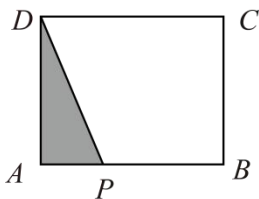
B、两直线平行，同旁内角互补，是真命题，则此项不符合题意；

C、相等的两个角不一定是对顶角，则此项是假命题，符合题意；

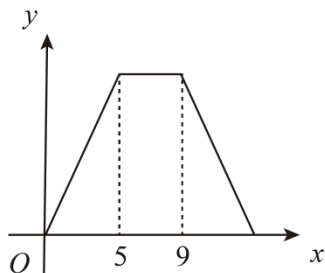
D、三角形的内角和等于 180° ，是真命题，则此项不符合题意；

故选：C.

6. 如图①，在长方形 $ABCD$ 中，动点 P 从点 A 出发，沿 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向运动至点 D 处停止，设点 P 运动的路程为 x ，三角形 ADP 的面积为 y ，如果 y 关于 x 的图象如图②所示，则长方形 $ABCD$ 的面积是 ()



图①



图②

A. 16

B. 18

C. 20

D. 22

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了用图象法表示两个变量的关系，根据图象结合图形得出 $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，即可得出长方形 $ABCD$ 的面积，采用数形结合的思想是解此题的关键.

【详解】 解：由图形可得，当点 P 在 AB 上时， $\triangle ADP$ 的面积逐渐增大，当点 P 在 BC 上时， $\triangle ADP$ 的面积不变，结合图象可得 $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore$ 长方形 $ABCD$ 的面积是 $5 \times 4 = 20$ ，

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 小题，每题 3 分，共 36 分）

7. 如果代数式 $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 本题考查代数式有意义，根据二次根式的被开方数为非负数，分式的分母不为 0，进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $x - 2 > 0$ ，

$\therefore x > 2$ ；

故答案为： $x > 2$

8. 化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$ 的结果是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化，分子分母同时乘以 $\sqrt{5}-1$ ，即可求解.

【详解】 解：
$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. 若正比例函数 $y = (2a-1)x$ 经过第一、三象限，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的性质，正比例函数 $y = (2a-1)x$ 的图象经过第一、三象限，则得到 $2a-1 > 0$ ，解不等式即可.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 $y = (2a-1)x$ 的图象经过第一、三象限，

$$\therefore 2a-1 > 0,$$

$$\therefore a > \frac{1}{2}.$$

故答案为： $a > \frac{1}{2}$.

10. 若方程 $(m+3)x^{m^2-7} + (m-1)x - 2 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的定义：未知数的最高次数是二次的整式方程，且二次项系数不得为 0，根据一元二次方程的定义得到 $m^2 - 7 = 2$ 且 $m+3 \neq 0$ ，求得 m 的值即可.

【详解】 解：根据一元二次方程的定义，得 $m^2 - 7 = 2$ 且 $m+3 \neq 0$ ，

解得 $m = 3$ ，

故答案为： 3

11. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 2x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 根据完全平方方式进行配方，再运用平方差公式在实数范围内因式分解.

【详解】 $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2 = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

故答案为： $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【点睛】 考核知识点：在实数范围内分解因式，运用配方法和平方差公式进行因式分解是关键.

12. 已知直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$ ，那么 A 、 B 两点间的距离等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，两点间的距离，解题的关键是掌握两点间的距离公式.

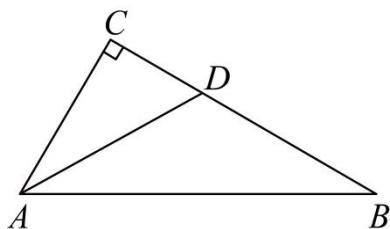
根据两点间的距离公式 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 解答即可.

【详解】 $\because$ 直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$,

$\therefore A、B$ 两点间的距离等于 $\sqrt{(3-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$.

故答案为: $\sqrt{13}$.

13. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$. 若 $S_{\triangle ABD} = 24$, $AB = 12$, 则 $CD =$ _____.

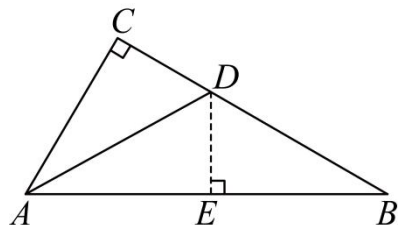


【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质及三角形面积公式的灵活运用. 过 D 点作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , 由已知 $S_{\triangle ABD} = 24$, $AB = 12$, 可求 DE , 再利用角平分线性质证明 $CD = DE$ 即可.

【详解】 解: 过 D 点作 $DE \perp AB$, 垂足为 E ,



$\because S_{\triangle ABD} = 24$, $AB = 12$,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times DE = 24,$$

解得 $DE = 4$,

又 $\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $\angle C = 90^\circ$, $DE \perp AB$,

$\therefore CD = DE = 4$.

故答案为: 4.

14. 经过点 D , 且半径等于 3cm 的圆的圆心的轨迹是_____.

【答案】 以点 D 为圆心, 3cm 长为半径的圆.

【解析】

【分析】 本题考查了轨迹, 理解几何语句并根据圆的定义, 判断出圆心的轨迹是一个圆解题的关键. 经过

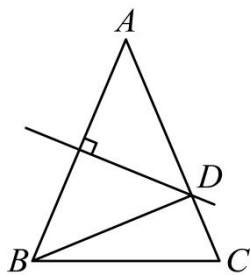
点 D 且半径等于 3cm 的圆的圆心的轨迹也就是到定点 D 的距离等于定长 3cm 的所有点的集合，然后根据圆的定义解答即可.

【详解】解：根据题意，圆心的轨迹是到定点的距离等于定长 3cm 的所有点的集合，

根据圆的定义，即：以点 D 为圆心， 3cm 长为半径的圆.

故答案为：以点 D 为圆心， 3cm 长为半径的圆.

15. 如图，等腰 ABC 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 于 D ，那么 $\angle CBD$ 的度数为_____.



【答案】 22.5°

【解析】

【分析】本题考查等边对等角，中垂线的性质. 根据等边对等角，求出 $\angle ABC$ 的度数，中垂线的性质，推出 $\angle ABD = \angle A$ ，利用角的和差关系求解即可. 掌握相关性质，是解题的关键.

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$\because AB$ 的垂直平分线交 AC 于 D ，

$$\therefore AD = BD,$$

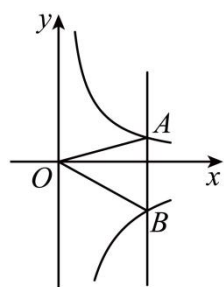
$$\therefore \angle ABD = \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 22.5^\circ.$$

故答案为： 22.5° .

16. 如图，过反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 图象上的一点 A 作 y 轴的平行线交反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 于点

B . 连接 OA 、 OB . 若 $S_{\triangle AOB} = 3$ ，则 k 的值为_____.

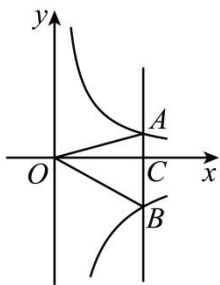


【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的 k 的几何意义，令 AB 交 x 轴于 C ，由题意可 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times |2| = 1$ ，求出 $S_{\triangle COB} = 2$ ，即可得解.

【详解】 解：如图：令 AB 交 x 轴于 C ，



$\therefore$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 上，且 $AB \parallel y$ 轴，

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times |2| = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle COB} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOC} = 2,$$

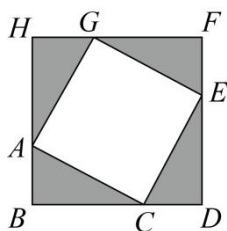
$$\therefore \frac{1}{2} |k| = 2,$$

$$\therefore k < 0,$$

$$\therefore k = -4,$$

故答案为：-4.

17. 在证明“勾股定理”时，可以将4个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形（如图所示， $AB < BC$ ）。如果小正方形的面积是25，大正方形的面积为49，那么 $\frac{BC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 首先求出小正方形的边长和大正方形的边长，利用勾股定理列方程，然后再求出 AB 和 BC 的长.

【详解】 解： $\because$ 小正方形的面积是25，

$$\therefore AC=5,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore \text{设 } AB=CD=x,$$

$$\therefore \text{大正方形的面积为 } 49,$$

$$\therefore BD=7,$$

$$\therefore BC+CD=7,$$

$$\therefore BC=7-x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中: } AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore x^2 + (7-x)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = 4, x_2 = 3,$$

$$\therefore AB < BC,$$

$$\therefore x < 7-x,$$

$$\therefore x < \frac{7}{2},$$

$$\therefore x = 3,$$

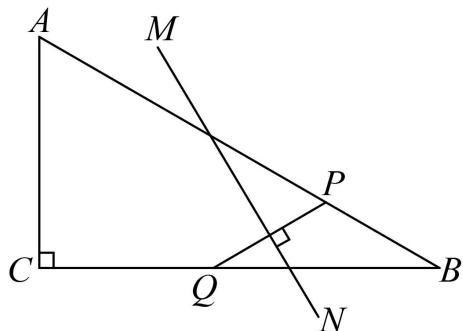
$$\therefore AB = 3, BC = 4,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

【点睛】此题主要考查了利用勾股定理列方程，解一元二次方程，三角形全等的性质，掌握勾股定理列出方程是解题的关键.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ，点 P 为 AB 上一点，将线段 PB 绕点 P 顺时针旋转得线段 PQ ，点 Q 在射线 BC 上，当 PQ 的垂直平分线 MN 经过 $\triangle ABC$ 一边中点时， PB 的长为 _____.



【答案】2 或 3 或 5

【解析】

【分析】求出 $AB=8$ ， $BC=4\sqrt{3}$ ，设 MN 交 BC 于点 G ，连接 PG ．分三种情况，当 MN 经过 AB 的中点 D 时， $BD=4$ ．由旋转性质得到， $PQ=PB$ ，得到 $\angle PQB=\angle B=30^\circ$ ，得到 $\angle DPQ=60^\circ$ ，根据线段垂直平分线性质的得到 $PD=QD$ ，得到 $\triangle PQD$ 是等边三角形，得到 $PD=PB$ ，即得 $PB=2$ ；当 MN 经过 AC 的中点 E 时， $EC=2$ ，求出 $\angle CEG=30^\circ$ ，得到 $CG=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ，得到 $BG=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ ，根据 $\angle QPG=30^\circ$ ，求得 $\angle GPB=90^\circ$ ，即得 $PB=5$ ；当 MN 经过 BC 的中点 F 时， $BF=2\sqrt{3}$ ，可得 $PB=3$ ．

【详解】 $\because$ 在 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $AC=4$ ，

$$\therefore AB=2AC=8,$$

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{3},$$

PQ 的垂直平分线 MN 经过 ABC 一边中点，可分为以下三种情况：

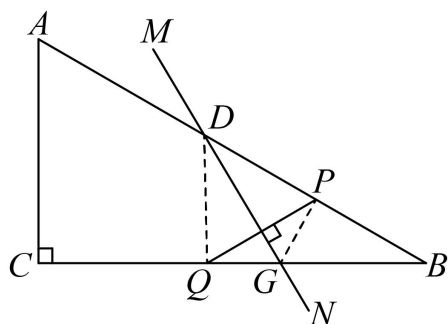
经过 AB 的中点 D ；经过 AC 的中点 E ；经过 BC 的中点 F ．

设 MN 交 BC 于点 G ，连接 PG ，

则 $PG=QG$ ．

当 MN 经过 AB 的中点 D 时，如图：

$$BD=\frac{1}{2}AB=4,$$



由旋转知， $PQ=PB$ ，

$$\therefore \angle PQB=\angle B=30^\circ,$$

$$\therefore \angle DPQ=\angle B+\angle PQB=60^\circ,$$

连接 DQ ，

$\because MN$ 垂直平分 PQ ，

$$\therefore PD = QD,$$

$\therefore \triangle PQD$ 是等边三角形,

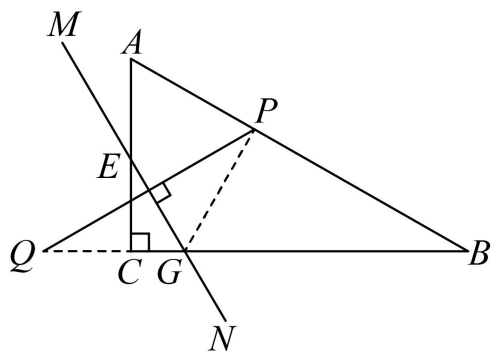
$$\therefore PD = QP,$$

$$\therefore PD = PB,$$

$$\therefore PB = \frac{1}{2}BD = 2;$$

当 MN 经过 AC 的中点 E 时, 如图:

$$EC = \frac{1}{2}AC = 2,$$



$\therefore MN$ 垂直 PQ ,

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ - \angle EGQ = \angle PQB = 30^\circ,$$

设 $CG = x$,

则 $EG = 2x$,

$$\therefore CG^2 + EC^2 = EG^2,$$

$$\therefore x^2 + 2^2 = (2x)^2,$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BG = BC - CG = \frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PG = QG,$$

$$\therefore \angle PQB = \angle QPG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APG = \angle APQ + \angle QPG = 90^\circ,$$

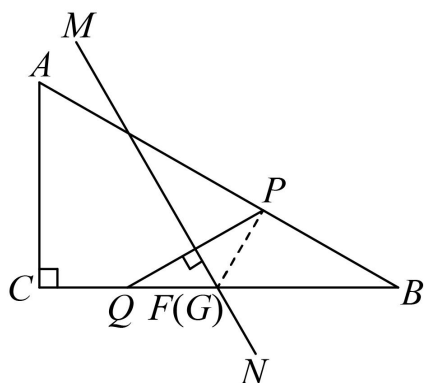
$$\therefore \angle GPB = 180^\circ - \angle APG = 90^\circ,$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}BG = \frac{5}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PB = \sqrt{BG^2 - PG^2} = 5;$$

当 MN 经过 BC 的中点 F 时, 如图:

$$BF = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3},$$



$$\therefore \angle BPF = 90^\circ$$

$$\therefore PF = \frac{1}{2}BF = \sqrt{3},$$

$$\therefore PB = \sqrt{BF^2 - PF^2} = 3.$$

综上: PB 的长为: 2 或 5 或 3.

故答案为: 2 或 3 或 5.

【点睛】此题考查了旋转, 熟练掌握旋转的性质, 含 30° 直角三角形的性质, 等边三角形的判定与性质, 勾股定理解直角三角形, 线段垂直平分线的性质, 三角形外角的性质, 分类讨论, 是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 19-21 题每题 6 分, 22 题 8 分, 满分 26 分)

19. 计算: $\sqrt{48} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12} \div \sqrt{2} + \sqrt{24}.$

【答案】 $4 + \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可求解.

【详解】 解 $\sqrt{48} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12} \div \sqrt{2} + \sqrt{24}$

$$= \sqrt{48 \times \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{12}{2}} + \sqrt{24}$$

$$= \sqrt{16} - \sqrt{6} + \sqrt{24}$$

$$= 4 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

$$= 4 + \sqrt{6}.$$

20. 计算: $a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

【答案】 $\frac{9}{2}a\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行化简，然后运算即可.

【详解】 解: 原式 $= a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

$$= 2a\sqrt{2a} - a^2\sqrt{\frac{1}{2a}} + 3a\sqrt{2a}$$

$$= 5a\sqrt{2a} - \frac{a^2}{2a}\sqrt{2a}$$

$$= 5a\sqrt{2a} - \frac{a}{2}\sqrt{2a}$$

$$= \frac{9}{2}a\sqrt{2a}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的性质和二次根式的加减运算，掌握二次根式的性质是解题关键.

21. 用配方法解方程: $4x^2 - 12x - 7 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查配方法求解一元二次方程，熟练掌握配方法解一元二次方程是解题的关键；根据配方法解一元二次方程的方法即可求解；

【详解】 解: 两边都除以 4，得

$$x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0$$

$$x^2 - 3x = \frac{7}{4}$$

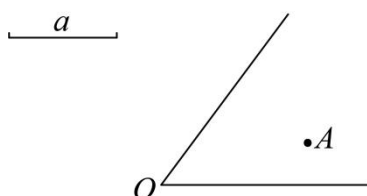
配方，得 $x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = \frac{7}{4} + (\frac{3}{2})^2$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm 2$$

$$\therefore x_1 = \frac{7}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

22. 已知: $\angle O$ 、点 A 及线段 a (如图), 求作: 点 P , 使点 P 到 $\angle O$ 的两边的距离相等, 且 $PA=a$. (要求尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法).

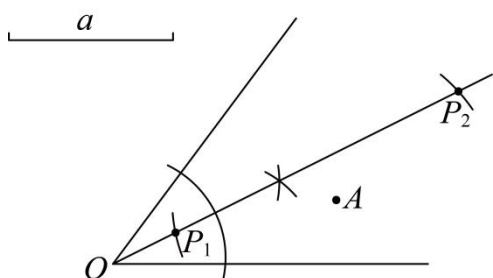


【答案】答案见解析.

【解析】

【分析】先利用尺规作图作出 $\angle O$ 的平分线, 再以点 A 为圆心, 线段 a 的长度为半径画弧, 与角平分线的交点即为所求.

【详解】解: 如图所示, 点 P_1 和点 P_2 即为所求.



【点睛】考查作图-复杂作图, 解题的关键是熟练掌握角平分线的尺规作图和角平分线的性质.

四、解答题 (本大题共 4 题, 23 题 8 分, 24-25 题每题 10 分, 26 题 12 分, 满分 40 分)

23. 公安交警部门提醒市民, 骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定, 某头盔经销商统计了某品牌头盔 4 月份到 6 月份的销量, 该品牌头盔 4 月份销售 150 个, 6 月份销售 216 个, 且从 4 月份到 6 月份销售量的月增长率相同.

- (1) 求该品牌头盔销售量的月增长率;
- (2) 若此种头盔的进价为 30 元/个, 测算在市场中, 当售价为 40 元/个时, 月销售量为 600 个, 若在此基础上售价每上涨 1 元/个, 则月销售量将减少 10 个, 为使月销售利润达到 10000 元, 而且尽可能让顾客得到实惠, 则该品牌头盔的实际售价应定为多少元/个?

【答案】(1) 该品牌头盔销售量的月增长率为 20%

(2) 该品牌头盔的实际售价应定为 50 元/个

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用，找准等量关系，正确的列出方程，是解题的关键：

(1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x ，根据 4 月份销售 150 个，6 月份销售 216 个，列出方程进行求解即可；

(2) 设该品牌头盔的实际售价应定为 m 元/个，根据总利润等于单件利润乘以销量，列出方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：设该品牌头盔销售量的月增长率为 x ，由题意，得： $150(1+x)^2 = 216$ ，

解得： $x = 0.2 = 20\%$ 或 $x = -2.2$ （舍去）；

答：该品牌头盔销售量的月增长率为 20%；

【小问 2 详解】

设该品牌头盔的实际售价应定为 m 元/个，由题意，得：

$$(m-30)[600-10(m-40)] = 10000,$$

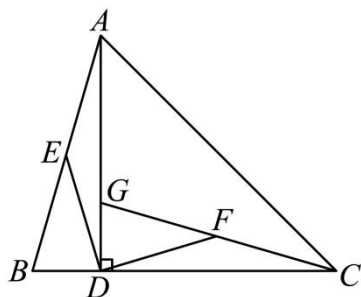
解得： $m_1 = 50, m_2 = 80$ ，

$\therefore$ 尽可能让顾客得到实惠，

$\therefore m = 50$ ；

答：该品牌头盔的实际售价应定为 50 元/个.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， G 是 AD 上一点，且 $BD = DG$ 。连接 CG ，点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点，求证： $DE = DF$ 。



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线的性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键。根据 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，推出 $AD = CD$ ，从而证明 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD$ (SAS)，得出 $AB = CG$ ，再根据直角三角形斜边上的中线的性质即可证明.

【详解】 证明： $\because \angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ, \quad \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD$$

$$\therefore AD = CD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADC = \angle ADB \\ BD = DG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD (\text{SAS})$$

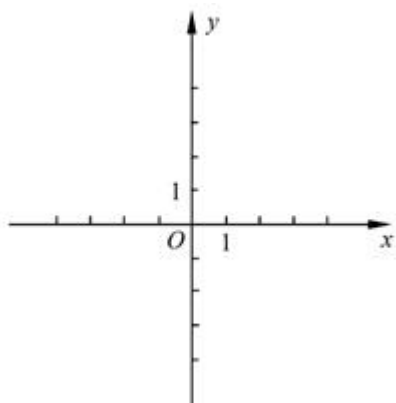
$$\therefore AB = CG$$

又 $\because$ 点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}CG$$

$$\therefore DE = DF.$$

25. 已知，如图，在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与直线 $y = 2x$ 都经过点 $A(2, m)$.



(1) 求 k 与 m 的值;

(2) 此双曲线又经过点 $B(n, 2)$, 点 C 是 y 轴的负半轴上的一点, 且点 C 到 x 轴的距离是 2, 联结 AB 、 AC 、 BC ,

①求 $\triangle ABC$ 的面积;

②点 E 在 y 轴上, $\triangle ACE$ 为等腰三角形, 请直接写出点 E 的坐标.

【答案】 (1) $k=8$, $m=4$; (2) ① 8; ② $(0, 2\sqrt{10}-2)$ 或 $(0, -2\sqrt{10}-2)$ 或 $(0, 10)$ 或 $(0, \frac{4}{3})$

【解析】

【分析】 (1) 利用一次函数图象上点的坐标特征可求出 m 的值, 进而可得出点 A 的坐标, 再利用反比例函数图象上点的坐标特征可求出 k 的值;

(2) ①由 (1) 可得出双曲线的表达式, 利用反比例函数图象上点的坐标特征可得出点 B 的坐标, 由点 C 的位置可得出点 C 的坐标, 由点 A, B, C 的坐标可得出 AB, AC, BC 的长, 由 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ 可得出 $\angle ABC = 90^\circ$, 利用三角形的面积公式可求出 $\triangle ABC$ 的面积;

②设点 E 的坐标为 $(0, a)$, 由点 A, C 的坐标可得出 AC^2 , AE^2 , CE^2 的值, 分 $AE = AC$, $CE = AC$, $CE = AE$ 三种情况, 可得出关于 a 的一元二次方程 (或一元一次方程), 解之即可得出结论.

【详解】解: (1) $\because$ 直线 $y = 2x$ 经过点 A $(2, m)$,

$$\therefore m = 2 \times 2 = 4,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 4)$.

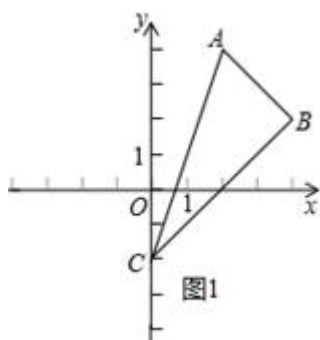
$\because$ 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过点 A $(2, 4)$,

$$\therefore 4 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 8.$$

(2) ①由 (1) 得: 双曲线的表达式为 $y = \frac{8}{x}$.

$\because$ 双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 经过点 B $(n, 2)$,



$$\therefore 2 = \frac{8}{n},$$

$$\therefore n = 4,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4, 2)$.

$\because$ 点 C 是 y 轴的负半轴上的一点, 且点 C 到 x 轴的距离是 2,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{10})^2,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8.$$

②设点 E 的坐标为 $(0, a)$,

$$\therefore AE^2 = (0-2)^2 + (a-4)^2 = a^2 - 8a + 20, CE^2 = [a - (-2)]^2 = a^2 + 4a + 4, AC^2 = 40.$$

分三种情况考虑, 如图 2 所示.

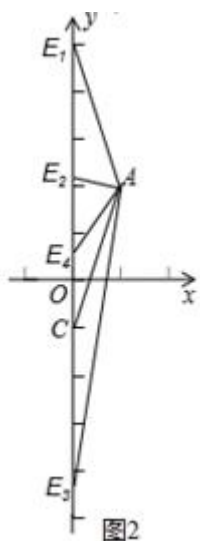


图2

(i) 当 $AE = AC$ 时, $a^2 - 8a + 20 = 40$,

解得: $a_1 = -2$ (舍去), $a_2 = 10$,

$\therefore$ 点 E_1 的坐标为 $(0, 10)$;

(ii) 当 $CE = AC$ 时, $a^2 + 4a + 4 = 40$,

解得: $a_3 = -2 + 2\sqrt{10}$, $a_4 = -2 - 2\sqrt{10}$,

$\therefore$ 点 E_2 的坐标为 $(0, -2 + 2\sqrt{10})$, 点 E_3 的坐标为 $(0, -2 - 2\sqrt{10})$;

(iii) 当 $CE = AE$ 时, $a^2 + 4a + 4 = a^2 - 8a + 20$,

解得: $a = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 点 E_4 的坐标为 $(0, \frac{4}{3})$.

综上所述: 点 E 的坐标为 $(0, 10)$, $(0, -2 + 2\sqrt{10})$, $(0, -2 - 2\sqrt{10})$ 或 $(0, \frac{4}{3})$.

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、反比例函数图象上点的坐标特征、勾股定理逆定理、三角形的面积公式、等腰三角形的性质以及解一元二次方程 (或一元一次方程), 解题的关键是: (1) 利用

一次函数图象上点的坐标特征及反比例函数图象上点的坐标特征，求出 k , m 的值；(2) ①利用勾股定理逆定理，找出 $\angle ABC = 90^\circ$ ；②分 $AE = AC$, $CE = AC$, $CE = AE$ 三种情况，利用等腰三角形的性质求出点 E 的坐标.

26. 【问题初探】

(1) 在数学活动课上，李老师给出如下问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ 于 F 交 AB 于点 E ，连接 DE ，若 $CE = 2DE$ ，求证： $\angle DEB = \angle AEC$ 。

如图2，小刚同学从条件的角度出发给出如下解题思路：延长 ED 至点 G ，使 $GD = ED$ ，连接 CG 。将 $\angle DEB$ 与 $\angle AEC$ 之间的数量关系转化为 $\angle G$ 与 $\angle ECG$ 之间的数量关系。请你根据小刚同学的解题思路，写出证明过程。

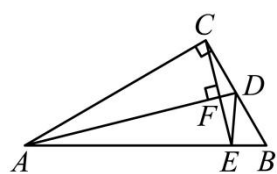


图1

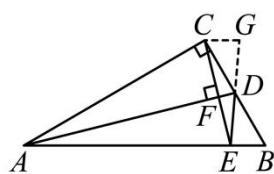


图2

【类比分析】(2) 李老师发现小刚同学很好地运用了转化思想，根据题中条件转化角。为了帮助学生更好地感悟转化思想，李老师将图1进行变换，提出下面的问题，请你解答。

如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ 于 F 交 AB 于点 E 。连接 BF ，若 $BF = AC$ ，求证： $AF = 2DF$ 。

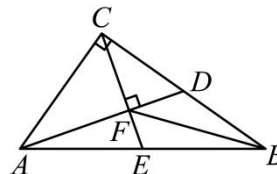


图3

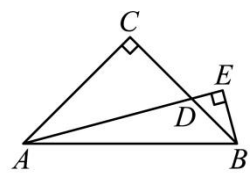


图4

【学以致用】(3) 如图4，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 在 BC 边上， $\angle BAD = 15^\circ$ ，过 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E ，直接写出 $\frac{AD - BD}{BE} =$ _____。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3) 2

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的判定与性质，等腰三角形的性质，外角的定义，含 30° 角的直角三角形等知识点，掌握转化思想是解答本题的关键。

(1) 延长 ED 至点 G ，使 $GD = ED$ ，连接 CG ，证明 $\triangle CDG \cong \triangle BDE$ (SAS)，得到 $\angle G = \angle BED$ ，所以 $CG \parallel AB$ ，进而得到 $\angle GCE = \angle AEC$ ，根据题意得到 $CE = EG$ ，所以 $\angle G = \angle GCE$ ，进而可证 $\angle DEB = \angle AEC$ ；

(2) 延长 FD 至 H , 使 $DH = DF$, 连接 CH , 则 $FH = 2DF$, 证明 $\triangle CDH \cong \triangle BDF$ (SAS),

得到 $CH = BF$, 又 $BF = AC$, 所以 $CH = AC$, 再根据等腰三角形三线合一即可得出结论;

(3) 在 AB 上方作 $\angle ABF = 15^\circ$, 并交 AD 于点 F , 由题意得 $AF = BF$ 且 $\angle EFB = \angle FAB + \angle FBA = 30^\circ$, 则在 $\text{Rt}\triangle EFB$ 中, $BF = 2BE$, 进而根据已知条件求出 $\angle DBF = \angle EFB = 30^\circ$, 所以 $DF = BD$, 再经过转化即可得到 $\frac{AD - BD}{BE}$ 的值.

【详解】解: (1) 延长 ED 至点 G , 使 $GD = ED$, 连接 CG , 则 $EG = 2ED$,

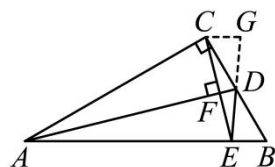


图2

$\because D$ 为 BC 中点,

$\therefore CD = BD$,

又 $\angle CDG = \angle BDE$,

$\therefore \triangle CDG \cong \triangle BDE$ (SAS),

$\therefore \angle G = \angle BED$,

$\therefore CG \parallel AB$,

$\therefore \angle GCE = \angle AEC$,

又 $CE = 2DE$,

$\therefore CE = EG$,

$\therefore \angle G = \angle GCE$,

$\therefore \angle DEB = \angle AEC$;

(2) 如图3, 延长 FD 至 H , 使 $DH = DF$, 连接 CH , 则 $FH = 2DF$,

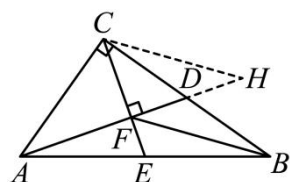


图3

$\because D$ 为 BC 中点,

$\therefore CD = BD$,

$\therefore \angle CDH = \angle BDF$,

$\therefore \triangle CDH \cong \triangle BDF$ (SAS),

$$\therefore CH = BF ,$$

$$\text{又 } BF = AC ,$$

$$\therefore CH = AC ,$$

$$\because CE \perp AD ,$$

$$\therefore AF = FH = 2DF ,$$

$$\text{即 } AF = 2DF ;$$

(3) 如图4, 在 AB 上方作 $\angle ABF = 15^\circ$, 并交 AD 于点 F ,

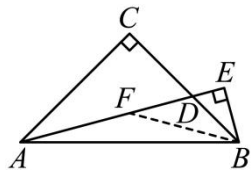


图4

$$\text{则 } \angle BAD = \angle ABF = 15^\circ ,$$

$$\therefore AF = BF \text{ 且 } \angle EFB = \angle FAB + \angle FBA = 30^\circ ,$$

$$\because BE \perp AD ,$$

$$\text{则在 Rt}\triangle EFB \text{ 中, } BF = 2BE ,$$

$$\text{又 } \angle ACB = 90^\circ , \quad AC = BC ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CAB = 45^\circ ,$$

$$\text{则 } \angle DBF = \angle ABC - \angle ABF = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ = \angle EFB ,$$

$$\therefore DF = BD ,$$

$$\text{故 } \frac{AD - BD}{BE} = \frac{AD - DF}{BE} = \frac{AF}{BE} = \frac{BF}{BE} = 2 ,$$

故答案为: 2 .