

2024-2025 学年上海市浦东新区进才中学北校八年级（上）期末数学试卷

一. 选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1. 下列代数式中，是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{a^2b}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\sqrt{a^2-b^2}$ D. $\sqrt{0.7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义判断即可.

本题考查了最简二次根式，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】A. $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ ，不符合题意；

B. $\sqrt[3]{2}$ ，不是二次根式，不符合题意；

C. $\sqrt{a^2-b^2}$ ，符合题意；

D. $\sqrt{0.7} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$ ，不符合题意；

故选：C.

2. 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上有三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，若 $x_1 > x_2 > 0 > x_3$ ，则下列各式正确的是（ ）

- A. $y_3 > y_1 > y_2$ B. $y_3 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > y_3$ D. $y_1 > y_3 > y_2$

【答案】A

【解析】

【分析】先判断出函数的图象所在的象限及增减性，再由 $x_1 > x_2 > 0 > x_3$ 判断出各点所在的象限，进而可得出结论. 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

【详解】解：∵ $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)，

∴ 图象的两个分支在第二、四象限，且在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，

∵ $x_1 > x_2 > 0 > x_3$ ，

$\therefore$ 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在第四象限, 点 (x_3, y_3) 在第二象限,

$\therefore y_3 > 0 > y_1 > y_2$,

故选: A.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 的一个根为 0, 则 k 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. 1 或 -1

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义与解, 解一元二次方程, 将 $x=0$ 代入原方程可得出关于 k 的一元二次方程, 解之即可得出 k 的值, 根据一元二次方程的定义可得出 $k-1 \neq 0$, 进而可得出 $k \neq 1$, 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 的一个根为 0,

$\therefore$ 将 $x=0$ 代入 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$, 得: $k^2 - 1 = 0$,

解得 $k_1 = -1$, $k_2 = 1$.

$\because$ 方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 是一元二次方程,

$\therefore k-1 \neq 0$,

$\therefore k \neq 1$.

$\therefore k = -1$

故选: C.

4. 下列长度的三条线段能组成直角三角形的是 ()

A. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

B. 4, 5, 6

C. 7, 14, 15

D. 7, 24, 25

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理的逆定理, 熟练掌握定理是解题的关键.

利用勾股定理的逆定理, 进行计算逐一判断即可解答.

【详解】解: $\because \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{5}\right)^2$,

$\therefore$ 三角形不是直角三角形, 故 A 选项不符合题意;

$$\because 4^2 + 5^2 \neq 6^2,$$

$\therefore$ 三角形不是直角三角形，故 B 选项不符合题意；

$$\because 7^2 + 14^2 \neq 15^2,$$

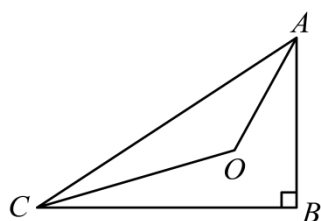
$\therefore$ 三角形不是直角三角形，故 C 选项不符合题意；

$$\because 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2,$$

$\therefore$ 三角形是直角三角形，故 D 选项符合题意；

故选：D.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点，且 $BC = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$ ，则点 O 到边 AB 的距离为 ()



A. 2cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 5cm

【答案】A

【解析】

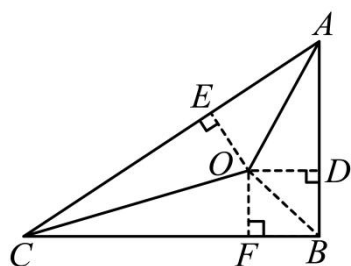
【分析】过点 O 作 $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，垂足分别为 D ， E ， F ，得到 $OD = OE = OF$ ，利用勾股定理，直角三角形的面积公式，图形的面积和解答即可.

本题考查了角的平分线性，勾股定理，直角三角形的面积性质，熟练掌握性质和定理是解题的关键.

【详解】解：过点 O 作 $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，垂足分别为 D ， E ， F ，

$\because$ 点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点，

$$\therefore OD = OE = OF,$$



$$\because \angle B = 90^\circ, \quad BC = 8\text{cm}, \quad AC = 10\text{cm},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6(\text{cm}), \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24(\text{cm}^2),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} CB \cdot OF = 24,$$

$$\therefore OD = \frac{24 \times 2}{AB + BC + CA} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2(\text{cm}),$$

故选: A.

6. 已知下列命题中:

- ①有两条边分别相等的两个直角三角形全等;
- ②顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等;
- ③如果 $a^2 = b^2$, 那么 $a = b$;
- ④两个三角形中, 两边与及其中一边的对角对应相等, 则这两个三角形全等.

其中假命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

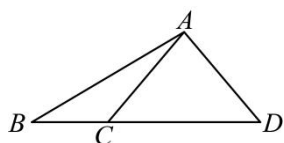
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是命题与定理, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理. 根据全等三角形的判定、实数的平方判断即可.

- 【详解】解: ①有两条边分别相等的两个直角三角形不一定全等, 故本选项命题是假命题;
- ②顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等, 是真命题;
- ③如果 $a^2 = b^2$, 那么 $a = \pm b$, 故本选项命题是假命题;
- ④两个三角形中, 两边与及其中一边的对角对应相等,

如图,



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中, $AC = AD$, 而 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 不全等, 故本选项命题是假命题;

故选: C.

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $0 \leq x < 4$

【解析】

【分析】 本题考查的是函数自变量的取值范围，根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为零列出不等式组，解不等式组得到答案.

【详解】 解：由题意得： $x \geq 0$ 且 $4-x > 0$,

解得： $0 \leq x < 4$,

故答案为： $0 \leq x < 4$.

8. $2-\sqrt{5}$ 的倒数_____.

【答案】 $-2-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据题意列出 $2-\sqrt{5}$ 的倒数，然后分母有理化即可.

【详解】 $2-\sqrt{5}$ 的倒数为 $\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -2-\sqrt{5}$

所以答案为 $-2-\sqrt{5}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式中的分母有理化，熟练掌握分母有理化的步骤和方法是关键.

9. 方程 $x^2-16=0$ 的解是_____

【答案】 $x_1=4, x_2=-4$

【解析】

【分析】 本题考查了直接开平方法解一元二次方程，根据直接开平方法解一元二次方程求解即可.

【详解】 解： $x^2=16$,

$x_1=4, x_2=-4$.

故答案为： $x_1=4, x_2=-4$

10. 若函数 $y=(k-1)x(k \neq 1)$ ，当自变量取值增加 2 的时候，函数值减少 3，那么 k 的值是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的性质，求函数值，熟练掌握求函数值是解题的关键．利用特殊值法解答即可．

【详解】 解：根据题意，当 $x = m$ 时， $y = m(k-1)$ ；当 $x = m+2$ 时， $y = (m+2)(k-1)$ ，

根据题意，得 $m(k-1) = (m+2)(k-1) + 3$ ，

解得 $k = -\frac{1}{2}$ ，

故答案为： $-\frac{1}{2}$ ．

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____．

【答案】 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】 根据方程的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0$ 且 $m \neq 0$ ，计算即可．

本题考查了根的判别式，熟练掌握判别式是解题的关键．

【详解】 $\because$ 一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0$ 且 $m \neq 0$ ，

解得 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$ ，

故答案为： $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$ ．

12. 判断命题的真假：命题“同位角相等”是_____命题．

【答案】 假

【解析】

【分析】 本题考查的是命题，熟练判断条件和结论是关键．

在判断命题为假命题时，只需找出反例即可．

【详解】 解：条件是“如果两个角是同位角”，结论是“这两个角相等”．两条直线不平行时，被第三条直线截出的同位角就不相等．此命题是错误的，故是假命题．

故答案为： 假 ．

13. 如果一个三角形的两边的垂直平分线交点在第三边上，则这个三角形的最大角的度数是_____°．

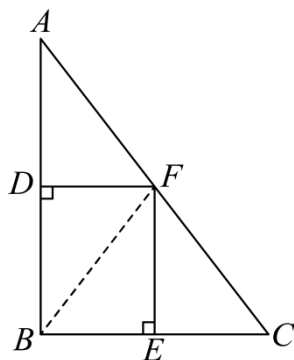
【答案】 90

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，根据垂直平分线的性质， $AF=BF$ ， $BF=CF$ ，再根据等边对等角的性质，得到 $\angle A = \angle ABF$ ， $\angle C = \angle CBF$ ，然后利用三角形内角和

定理，即可得到答案.

【详解】解：如图，连接 BF ，



由题意可知， DF 垂直平分 AB ， EF 垂直平分 BC ， DF 、 EF 交点 F 在 AC 上，

$$\therefore AF = BF, \quad BF = CF,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABF, \quad \angle C = \angle CBF,$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABF + \angle CBF + \angle C = 2(\angle ABF + \angle CBF) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle CBF = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这个三角形最大角的度数是 90° ，

故答案为：90.

14. 已知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ，则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了函数值的计算，熟练掌握计算是解题的关键.

当 $x=0$ 时，求函数值即可.

【详解】解：当 $x=0$ 时， $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$,

故答案为：-1.

15. 到点 $p(-3,0)$ 的距离等于 2 的点的轨迹是 .

【答案】 以 P 为圆心，2 为半径的圆.

【解析】

【分析】 根据圆的定义可得答案.

【详解】 到点 $p(-3,0)$ 的距离等于 2 的点的轨迹是以 P 为圆心，2 为半径的圆.

故答案为：以 P 为圆心，2 为半径的圆.

【点睛】 本题考查圆的定义，熟记圆的定义是解题的关键.

16. 在描述一个反比例函数的性质时，甲同学说：“从这个反比例函数图象上任意一点向 x 轴， y 轴作垂线，与两坐标轴所围成的矩形面积为 2024”，根据甲同学所描述，此反比例函数的解析式是_____.

【答案】 $y = \pm \frac{2024}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了根据实际问题列反比例函数的解析式，反比例函数的性质，反比例函数图象上点的坐标特征，矩形的性质，熟知以上知识是解题的关键. 根据甲同学的说法确定 $|k| = 2024$ ，得到反比例函数的解析式即可.

【详解】 解：根据题意，满足甲乙同学说法的反比例函数解析式为： $y = \pm \frac{2024}{x}$ ，
故答案为： $y = \pm \frac{2024}{x}$.

17. 在平面直角坐标系 xOy 内， $A(1, a)$ 在函数 $y = 2x$ 上， $B(b, 2)$ 在函数 $y = \frac{4}{x}$ 上， P 为 x 轴上的动点，

$AP + BP$ 值最小时，点 P 的坐标为 _____.

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】 本题考查轴对称最短问题，一次函数图象上的点的坐标特征，反比例函数图象上点的坐标特征，利用待定系数法求出 A, B 两点坐标，作点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(1, -2)$ ，连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P ，连接 AP ，此时 $PA + PB$ 的值最小，求出直线 $A'B$ 的解析式，即可得出点 P 的坐标.

【详解】 解： $\because A(1, a)$ 在函数 $y = 2x$ 上， $B(b, 2)$ 在函数 $y = \frac{4}{x}$ 上，

$$\therefore a = 2, \quad b = 2,$$

$$\therefore A(1, 2), \quad B(2, 2),$$

作点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(1, -2)$ ，连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P ，连接 AP ，此时 $PA + PB$ 的值最小，

设直线 $A'B$ 的解析式为 $y = kx + b$ ，则有
$$\begin{cases} 2k + b = 2 \\ k + b = -2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 4 \\ b = -6 \end{cases},$$

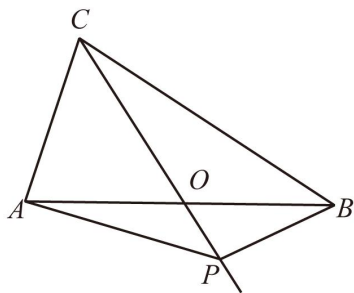
∴ 直线 $A'B$ 的解析式为 $y = 4x - 6$,

当 $y = 0$ 时, $x = \frac{3}{2}$,

∴ 点 $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

故答案为: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=4$, $AO=BO$, P 是射线 CO 上的一个动点, $\angle AOC=60^\circ$, 则当 $\triangle PAB$ 为直角三角形时, AP 的长为_____.



【答案】 2 或 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题根据题意分三种情况进行分类求解, 结合三角函数, 等边三角形的性质即可解题.

【详解】 解: 当 $\angle APB=90^\circ$ 时 (如图 1),

$$\because AO=BO,$$

$$\therefore PO=BO,$$

$$\because \angle AOC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP=60^\circ,$$

∴ $\triangle BOP$ 为等边三角形,

$$\because AB=BC=4,$$

$$\therefore AP = AB \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

当 $\angle ABP=90^\circ$ 时 (如图 2),

$$\because \angle AOC=\angle BOP=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BPO=30^\circ,$$

$$\therefore BP = \frac{OB}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

在直角三角形 ABP 中,

$$AP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7},$$

如图 3, $\because AO=BO, \angle APB=90^\circ$,

$$\therefore PO=AO,$$

$$\therefore \angle AOC=60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOP$ 为等边三角形,

$$\therefore AP=AO=2,$$

故答案为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ 或 2.

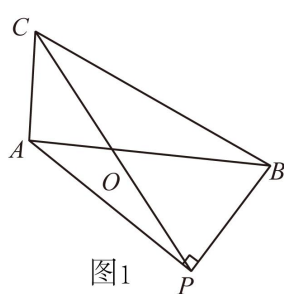


图1

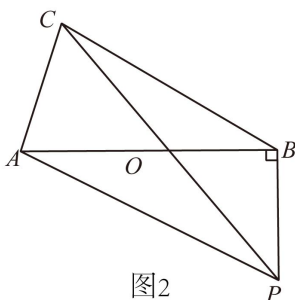


图2

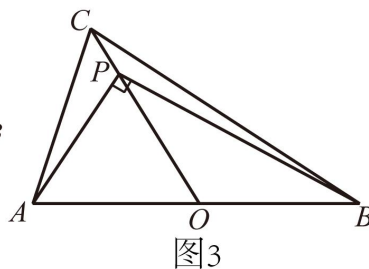


图3

【点睛】考点：勾股定理.

三. 解答题 (本大题共 7 题, 第 19-20 题各 8 分, 第 21 题 5 分, 第 22 题 5 分, 第 23 题 6 分, 第 24 题 12 分, 第 25 题 14 分, 共 58 分)

19. 计算:

$$(1) \sqrt{24} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{18} + \sqrt{32};$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

【答案】(1) $6\sqrt{2}-3$

(2) $2\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】本题考查的是二次根式的混合运算，平方差公式及零指数幂，熟知以上运算法则是解题的关键.

(1) 先算乘除，再算加减即可；

(2) 先把各根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \sqrt{24 \div 3} - \sqrt{\frac{1}{2} \times 18} + 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{8} - \sqrt{9} + 4\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 3 + 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} - 3;\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + 3\sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \sqrt{3} + 1 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 1.\end{aligned}$$

20. 解方程:

$$(1) (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0;$$

$$(2) 5x(x-1) = 3(x-1).$$

【答案】(1) $x_1 = -3, x_2 = 5$

$$(2) x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}$$

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程—因式分解法，解题的关键是掌握因式分解法解方程.

(1) 利用因式分解法解方程;

(2) 利用原式附加费解方程.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 &= 0, \\ (x-3+6)(x-3-4) &= 0, \\ (x+3)(x-7) &= 0, \\ x+3=0 \text{ 或 } x-7=0,\end{aligned}$$

$$x_1 = -3, x_2 = 7;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 5x(x-1) = 3(x-1),$$

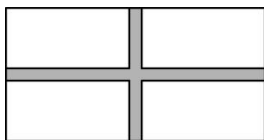
$$5x(x-1) - 3(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(5x-3) = 0,$$

$$x-1 = 0 \text{ 或 } 5x-3 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}.$$

21. 某校的分校区规划时决定在长为 32 米, 宽为 20 米的长方形草坪中央修筑同样宽的两条互相垂直的小路, 把长方形草坪分割成同样面积的四块小草坪, 每块小草坪的面积为 135 平方米, 问道路的宽是多少米?



【答案】道路的宽度为 2 米.

【解析】

【详解】试题分析: 把四块耕地拼到一起正好构成一个矩形, 矩形的长和宽分别是 $(32-x)$ 和 $(20-x)$, 根据矩形的面积公式, 列出关于道路宽的方程求解.

试题解析: 设道路的宽度为 x 米. 由题意得,

$$(32-x)(20-x) = 135 \times 4$$

整理得,

$$x^2 - 52x + 100 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 50 \text{ 不合题意, 舍去}$$

$$\therefore x = 2.$$

答: 道路的宽度为 2 米.

22. 已知函数 $y = y_1 - y_2$, 其中 y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例, 且当 $x=1$ 时, $y=1$; 当 $x=3$ 时, $y=5$. 求 y 关于 x 的函数解析式.

$$\text{【答案】 } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x-4}$$

【解析】

【分析】首先设 $y_1 = k_1x$, $y_2 = \frac{k_2}{x-2}$, 进而可得 $y = k_1x - \frac{k_2}{x-2}$, 再把当 $x=1$ 时, $y=1$; 当 $x=3$ 时, $y=5$

代入可得 $\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ 3k_1 - k_2 = 5 \end{cases}$, 解方程可得 k_1 、 k_2 的值, 进而可得函数解析式.

【详解】解: $\because y_1$ 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例,

$$\therefore \text{设 } y_1 = k_1 x, \quad y_2 = \frac{k_2}{x-2},$$

$$\therefore y = y_1 - y_2,$$

$$\therefore y = k_1 x - \frac{k_2}{x-2},$$

$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, } y=1; \text{ 当 } x=3 \text{ 时, } y=5,$$

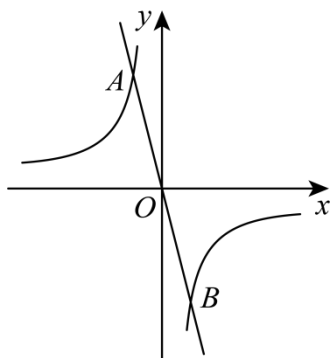
$$\therefore \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ 3k_1 - k_2 = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x-4}.$$

【点睛】本题主要考查了待定系数法求反比例函数解析式, 关键是正确掌握正比例函数与反比例函数解析式的形式.

23. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 内, 函数 $y = ax (a \neq 0)$ 和 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 交于 A 、 B 两点, 已知 $A(-1, 4)$.



- (1) 求点 B 的坐标;
- (2) 点 C 在坐标轴上, 且 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 求点 C 的坐标.

【答案】(1) $B(1, -4)$

(2) $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$ 或 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$

【解析】

【分析】(1) 根据函数图象的中心对称性解答即可；

(2) 当点 C 在 x 轴上时，设 $C(m, 0)$ ，根据 $\angle ACB = 90^\circ$ ，利用两点间距离公式，勾股定理解答即可；当点 C 在 y 轴上时，设 $C(0, n)$ ，根据 $\angle ACB = 90^\circ$ ，利用两点间距离公式，勾股定理解答即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 函数 $y = ax (a \neq 0)$ 和 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 交于 A 、 B 两点， $A(-1, 4)$ 。

根据图象的中心对称性，得 $B(1, -4)$ 。

【小问 2 详解】

解：当点 C 在 x 轴上时，设 $C(m, 0)$ ，且 $A(-1, 4)$ ， $B(1, -4)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4-4)^2} = 2\sqrt{17}, \quad AO^2 = (-1-0)^2 + (4-0)^2 = 17,$$

$$BO^2 = (1-0)^2 + (-4-0)^2 = 17,$$

$$\therefore AO = OB,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{17},$$

$$\therefore m = \sqrt{17} \text{ 或 } m = -\sqrt{17},$$

故点 C 的坐标为 $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$ ；

当点 C 在 y 轴上时，设 $C(0, n)$ ，且 $OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{17}$ ，

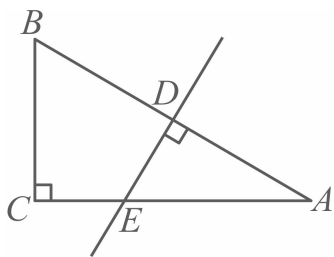
$$\therefore n = \sqrt{17} \text{ 或 } n = -\sqrt{17},$$

故点 C 的坐标为 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$ 。

故点 C 的坐标为 $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$ 或 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$ 。

【点睛】本题考查了图象的对称性质，两点间距离公式，直角三角形性质，图象的性质，熟练掌握直角三角形的性质，公式是解题的关键。

24. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ，点 D 是斜边 AB 的中点，作 $DE \perp AB$ ，交直线 AC 于点 E 。



(1) 若 $\angle A = 30^\circ$ ，求线段 CE 的长；

(2) 当点 E 在线段 AC 上时，设 $BC = \sqrt{x}$ ， $CE = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式；

(3) 若 $CE = 2$ ，求 BC 的长.

【答案】(1) 2

$$(2) y = 3 - \frac{x}{12} (0 < x \leq 36)$$

$$(3) 2\sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{15}$$

【解析】

【分析】(1) 连接 BE ，由线段垂直平分线的性质得 $AE = BE$ ，则 $\angle ABE = \angle BAE = 30^\circ$ ，再求出 $\angle CBE = 30^\circ$ ，然后由含 30° 角的直角三角形得 $CE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AE$ ，即可解决问题；

(2) 连接 BE ，则 $AE = BE = 6 - y$ ，在 $Rt\triangle BCE$ 中，由勾股定理得 $BC^2 + CE^2 = BE^2$ ，即 $(\sqrt{x})^2 + y^2 = (6 - y)^2$ ，则 $y = 3 - \frac{x}{12}$ ，再求出 $0 < x \leq 36$ 即可；

(3) 分两种情况，①当点 E 在线段 AC 上时，②当点 E 在 AC 延长线上时，分别求出 BC 的长即可.

【小问 1 详解】

解：如图 1，连接 BE ，

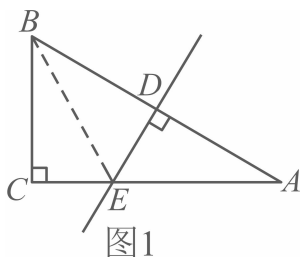


图 1

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

又 $\because DE$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 30^\circ,$$

又 $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AE,$$

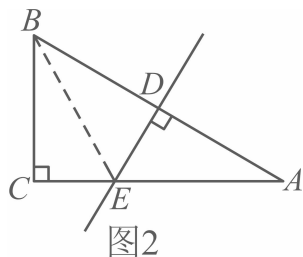
$\because AC = 6$,

$$\therefore CE + AE = CE + 2CE = 6,$$

$$\therefore CE = 2;$$

【小问2详解】

如图2, 连接 BE ,



则 $AE = BE = AC - CE = 6 - y$,

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, 由勾股定理得: $BC^2 + CE^2 = BE^2$,

$$\text{即 } (\sqrt{x})^2 + y^2 = (6 - y)^2,$$

$$\text{解得: } y = 3 - \frac{x}{12},$$

$$\because y \geq 0, \quad x > 0,$$

$$\therefore 3 - \frac{x}{12} \geq 0,$$

$$\therefore 0 < x \leq 36,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = 3 - \frac{x}{12} (0 < x \leq 36);$$

【小问3详解】

分两种情况:

①当点 E 在线段 AC 上时,

$$\text{由 (2) 得: } 2 = 3 - \frac{x}{12},$$

$$\text{解得: } x = 12,$$

$$\therefore BC = \sqrt{x} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

②当点 E 在 AC 延长线上时, 如图3,

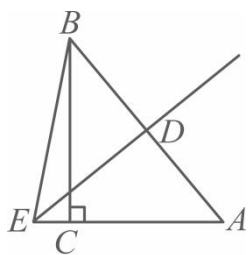


图3

$$AE = BE = AC + CE = 6 + 2 = 8,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, 由勾股定理得: $BC = \sqrt{BE^2 - CE^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$;

综上所述, BC 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{15}$.

【点睛】本题是三角形综合题, 考查了勾股定理、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、含 30° 角的直角三角形、函数关系式以及分类讨论等知识, 熟练掌握勾股定理和含 30° 角的直角三角形是解题的关键.

25. 【背景介绍】勾股定理是几何学中的明珠, 充满着魅力, 千百年来, 人们对它的证明精彩纷呈, 其中有著名的数学家, 也有业余数学爱好者, 向常春在 1994 年构造发现了一个新的证法.

【小试牛刀】(1) 把两个全等的直角三角形如图 1 放置, $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$, 已知 $AB = AD = a$, $AE = BC = b$, $DE = AC = c$, $AC \perp DE$, 试证明 $a^2 + b^2 = c^2$.

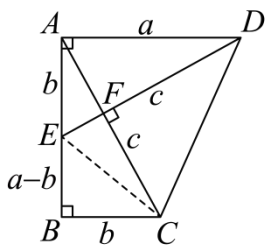


图1

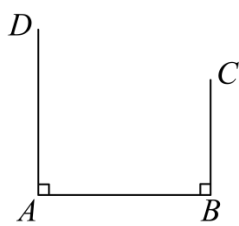


图2

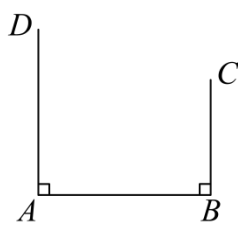


图3

【知识运用】

(2) 如图 2, 铁路上 A, B 两点 (看作直线上的两点) 相距 24 千米, C, D 为两个村庄 (看作两个点), $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, 垂足分别为 A, B, $AD = 23$ 千米, $BC = 16$ 千米, 则两个村庄的距离为 _____ 千米 (直接填空);

(3) 在 (2) 的背景下, 要在 AB 上建造一个供应站 P, 使得 $PC = PD$, 求 AP 的长.

(4) 【知识迁移】借助上面的思考过程与几何模型, 求代数式 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16-x)^2 + 81}$ 的最小值 _____.

【答案】(1) 见解析; (2) 25; (3) 6.3125 千米; (4) 20

【解析】

【分析】(1) 根据全等三角形的性质可得 $AB = AD = a$, $BC = AE = b$, $AC = DE = c$, 则 $BE = AB - AE = a - b$, 分别用含 a , b , c 的式子, 结合图形表示出梯形 $ABCD$ 、四边形 $AECD$ 、 $\triangle EBC$

的面积, 根据 $S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\text{四边形}AECD} + S_{\triangle BCE}$, 代入计算即可求解;

(2) 如图 2 所示, 连接 CD , 作 $CE \perp AD$ 于点 E , 可得 CE , DE 的长, 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 运用勾股定理即可求解;

(3) 如图 3 所示, 连接 CD , 作 CD 的垂直平分线交 AB 于 P 点, 则点 P 即为所求; 利用勾股定理得 $PD^2 = AP^2 + AD^2$, $PC^2 = PB^2 + BC^2$, 进而得 $AP^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2$, 再根据 $AB = 40$ 千米, $AD = 25$ 千米, $BC = 16$ 千米得 $PB = AB - AP = (40 - AP)$ 千米, 即可解答;

(4) 根据轴对称—最短路线的求法即可求出.

【详解】(1) 证明: 根据题意, $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DAE$, $AB = AD = a$, $AC = DE = c$, $BC = AE = b$, 则 $BE = AB - AE = a - b$,

$$\therefore \text{四边形} AECD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} ED \cdot AF + \frac{1}{2} \cdot ED \cdot CF = \frac{1}{2} DE \cdot AC = \frac{1}{2} c^2,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\text{四边形}AECD} + S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore \frac{1}{2} a(a+b) = \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} b(a-b),$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2;$$

(2) 解: 如图 2 所示, 连接 CD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ,

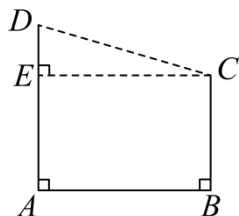


图2

$$\therefore BC \perp AB, AD \perp AB,$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle CEA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是矩形,

$$\therefore AE = BC = 16 \text{ 千米}, CE = AB = 24 \text{ 千米},$$

$$\therefore AD = 23 \text{ 千米},$$

$$\therefore DE = AD - AE = 23 - 16 = 7 \text{ (千米)},$$

$$\text{由勾股定理得: } CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \text{ (千米)},$$

则两个村庄之间的距离为 25 千米.

故答案为: 25;

(3) 解：如图 3 所示，连接 CD ，作线段 CD 的垂直平分线交 AB 于 P ，则点 P 即为所求；

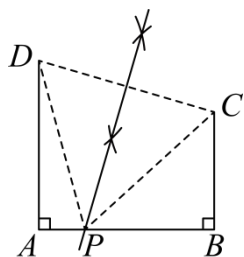


图3

连接 PC ， PD ，

$$\therefore PC = PD,$$

在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中，由勾股定理得： $PD^2 = AP^2 + AD^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中，由勾股定理得： $PC^2 = PB^2 + BC^2$ ，

$$\therefore AP^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2,$$

在 (2) 的背景下，则 $AB = 24$ 千米， $AD = 23$ 千米， $BC = 16$ 千米，

$$\therefore PB = AB - AP = (24 - AP) \text{ 千米},$$

$$\therefore AP^2 + 23^2 = (24 - AP)^2 + 16^2,$$

$$\therefore AP = 6.3125 \text{ 千米}.$$

即 AP 的长为 6.3125 千米；

(4) 解：如图 4， $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, $AD = 9$, $BC = 3$, $AB = 16$ ，

设 $BP = x$ ，则 $AP = 16 - x$ ，

先作出点 C 关于 AB 的对称点 F ，连接 DF ，过点 F 作 $EF \perp AD$ 于点 E ，

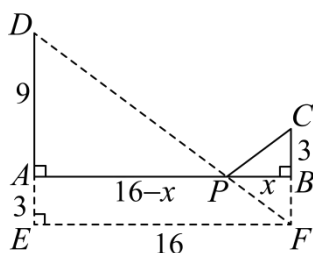


图4

$$\text{则 } DP = \sqrt{(16-x)^2 + 81}, CP = \sqrt{x^2 + 9},$$

当点 D, P, F 三点共线时， $DP + PF$ 有最小值，

由轴对称可得： $PC = PF$ ，

$$\therefore DP + PC \text{ 的最小值为 } \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16-x)^2 + 81},$$

即: DF 就是代数式 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(16-x)^2+81}$ 的最小值.

$\therefore$ 代数式 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(16-x)^2+81}$ 的最小值为 $\sqrt{DE^2+EF^2}=\sqrt{(AD+BC)^2+AB^2}=\sqrt{(9+3)^2+16^2}=20$.

故答案为: 20.

【点睛】 此题是三角形综合题, 主要考查了证明勾股定理, 勾股定理的应用, 轴对称—最短路线问题以及线段的垂直平分线等, 证明勾股定理常用的方法是利用面积证明, 是解本题的关键. 构造出直角三角形 DEF 是解本题的难点.