

上海市黄浦区 2024-2025 学年八年级上学期期末数学试卷

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{63a}$

C. $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$

D. $\sqrt{\frac{a}{3}}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义, 判定一个二次根式是不是最简二次根式的方法, 就是逐个检查最简二次根式的两个条件是否同时满足, 同时满足的就是最简二次根式, 否则就不是.

满足下列两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式:

- (1) 被开方数的因数是整数, 因式是整式;
- (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

可以此来判断哪个选项是正确的.

【详解】解: A、 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

B、 $\sqrt{63a}=3\sqrt{7a}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

C、 $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$ 是最简二次根式, 故本选项符合题意;

D、 $\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{\sqrt{3a}}{3}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

故选: C.

2. 下列函数中, 是正比例函数的是 ()

A. $y = 2(x-1)$

B. $y = \frac{1}{2x}$

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

D. $y = \frac{x}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了正比例函数的定义, 形如 $y = kx (k \neq 0)$ 的函数, 叫做正比例函数, 据此进行解答即可.

【详解】解：A. $y = 2(x-1)$ 是一次函数，不是正比例函数，故该选项错误，不符合题意；

B. $\frac{1}{2x}$ 不是整式，故该选项错误，不符合题意；

C. a 的指数是 2，不属于正比例函数，故该选项错误，不符合题意；

D. $y = \frac{x}{2}$ 是正比例函数的形式，故该选项正确，符合题意.

故选：D.

3. 下列关于 x 的方程中，有两个实数根的是 ()

A. $x^2 = 1$

B. $x^2 - x + 2 = 0$

C. $2x^2 + 1 = 0$

D. $(x+1)^2 = m$ (m 为常数)

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程根的判别式及解一元一次方程，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 根据一元二次方程根的判别式判断即可.

【详解】解：A、 $\because x^2 = 1$,

$$\therefore x = \pm 1,$$

$\therefore$ 方程有两个实数根，故 A 符合题意；

B、 $x^2 - x + 2 = 0$,

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$$

$\therefore$ 方程没有实数根，故 B 不符合题意；

C、由 $2x^2 + 1 = 0$ ，得 $2x^2 = -1$,

$$\therefore -1 < 0,$$

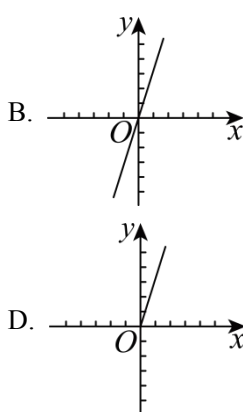
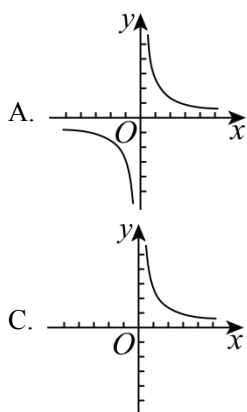
$\therefore$ 方程没有实数根，故 C 不符合题意；

D、 $(x+1)^2 = m$,

当 $m < 0$ 时，方程没有实数根，故 D 不符合题意；

故选：A.

4. 已知一个梯形面积为 6，下底长是上底长的 3 倍，设上底长 x ，高为 y ，那么 y 关于 x 的函数图象是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了求函数解析式和函数图象的判断，熟练掌握梯形的面积公式是解本题的关键.
根据梯形面积公式即可得出 y 关于 x 的函数解析式，再判断图象即可.

【详解】 解：根据题意可得： $\frac{(x+3x) \times y}{2} = 6$,

整理得： $y = \frac{3}{x}$ ，其中 $x > 0$ ，

则 y 关于 x 的函数图象是 C.

故选：C.

5. 下列命题中，是假命题的是（ ）

- A. 百米赛跑中，运动员的平均速度 v 与跑步成绩 t 成反比例
- B. 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ，当自变量 x 逐渐增大时， y 的值随着逐渐减小
- C. 三角形三边垂直平分线的交点到这个三角形三个顶点的距离相等
- D. 直角三角形可以分割成两个等腰三角形

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查的是命题与定理，熟知反比例函数的定义，反比例函数的性质，线段垂直平分线的性质，直角三角形的性质，是解题的关键. 分别根据反比例函数定义和性质，线段垂直平分线的性质，直角三角形的性质对各选项进行逐一分析即可.

【详解】 解：A、百米赛跑中，运动员的平均速度 v 与跑步成绩 t 成反比例，是真命题，不符合题意；

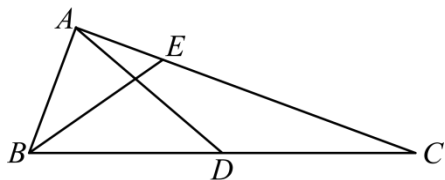
B、反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ，在同一象限内，当自变量 x 逐渐增大时， y 的值随着逐渐减小，原说法错误，是假命题，符合题意；

C、三角形三边垂直平分线的交点到该三角形三个顶点的距离相等，该说法正确，是真命题，不符合题意；

D、因为直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，所以直角三角形可以被斜边上的中线分割成两个等腰三角形，原说法正确，是真命题，不符合题意.

故选：B.

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=5, AC=12, BC=13$, AD 是 BC 边上的中线， BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，下列结论错误的是（ ）



- A. $AD \perp BE$
- B. 点 E 到 BC 的距离等于线段 AE 的长度
- C. 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上
- D. $13S_{\triangle ABE} = 5S_{\triangle BEC}$

【答案】A

【解析】

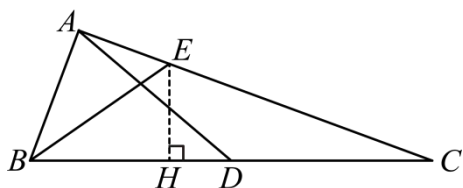
【分析】证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ，过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H ，得到 $AE = EH$ ，即可判断选项 B 正确；由 AD 是 BC 边上的中线得到 $AD = BD = CD = \frac{1}{2}BC$ ，则点 D 在线段 AC 的垂直平分线上，即可判断选项 C 正确；由 $AE = EH$ ， $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot AE = \frac{5}{2}AE$ ， $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}BC \cdot EH = \frac{13}{2}AE$ ，得到 $13S_{\triangle ABE} = 5S_{\triangle BEC}$ ，即可判断选项 D 正确；如果 $AD \perp BE$ ，则 $\angle AFB = \angle DFB = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle DBF$ (ASA)，则 $AB = BD$ ，得到 $\triangle ABD$ 是等边三角形，则 $AB = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}$ ，与已知 $AB = 5$ 矛盾，即可判断 A 错误.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 中， $AB=5, AC=12, BC=13$,

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$,

过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H ,



$\because BE$ 是 ABC 的角平分线, $AE \perp AB$,

$\therefore AE = EH$,

$\therefore$ 点 E 到 BC 的距离等于线段 AE 的长度,

故选项 B 正确;

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore AD = BD = CD = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore$ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上,

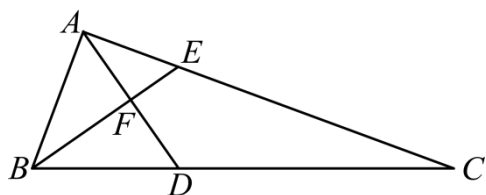
故选项 C 正确;

$\because AE = EH$, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot AE = \frac{5}{2}AE$, $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}BC \cdot EH = \frac{13}{2}AE$,

$\therefore 13S_{\triangle ABE} = 5S_{\triangle BEC}$,

故选项 D 正确;

如果 $AD \perp BE$, 则 $\angle AFB = \angle DFB = 90^\circ$, 如图,



$\because BE$ 是 ABC 的角平分线,

$\therefore \angle ABF = \angle DBF$,

$\because BF = BF$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DBF (ASA)$,

$\therefore AB = BD$,

$\therefore AB = BD = AD$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle C = 30^\circ$,

$\therefore AB = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}$, 与已知 $AB = 5$ 矛盾,

$\therefore AD \perp BE$ 错误,

故选项 A 错误,

故选: A

【点睛】此题考查了角平分线的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、直角三角形的性质、垂直平分线的判定等知识，熟练掌握直角三角形的性质和勾股定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 函数 $y = \sqrt{4-x}$ 中自变量的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 4$

【解析】

【分析】 本题考查了函数自变量的取值范围，函数有意义时字母的取值范围，一般从几个方面考虑：①当函数解析式是整式时，字母可取全体实数；②当函数解析式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；③当函数解析式是二次根式时，被开方数为非负数. 根据被开方数是非负数，列不等式求解即可.

【详解】解：由题意得：

$$4-x \geq 0,$$

解得： $x \leq 4$.

故答案为： $x \leq 4$.

8. 计算： $\sqrt{\frac{3}{20}} \div \sqrt{\frac{1}{5}} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的除法，利用二次根式的除法法则计算即可.

【详解】解： $\sqrt{\frac{3}{20}} \div \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{3}{20} \div \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{3}{20} \times 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 的图象在第一、三象限，那么 $\sqrt{(m-2)^2} =$ _____.

【答案】 $2-m$ 或 $-m+2$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图象和性质，二次根式的性质化简. 先根据反比例函数的性质得出 $2-m > 0$ ，可知 $m < 2$ ，再根据 $\sqrt{(m-2)^2} = |m-2|$ 即可得出结果.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 的图象在一、三象限，

$\therefore 2-m>0$ ，即： $m<2$ ，

则 $\sqrt{(m-2)^2} = |m-2| = 2-m$ ，

故答案为： $2-m$ 。

10. 方程 $(x+1)^2 = 4$ 的根为_____。

【答案】 $x_1 = 1$ ， $x_1 = -3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根的应用，根据平方根定义解方程即可。

【详解】 解： $(x+1)^2 = 4$ ，

开平方得： $x+1 = \pm 2$ ，

解得： $x_1 = 1$ ， $x_1 = -3$ 。

故答案为： $x_1 = 1$ ， $x_1 = -3$ 。

11. 在实数范围内分解因式： $2x^2 + x - 2 =$ _____。

【答案】 $2\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，解一元二次方程，正确的解一元二次方程是解题的关键。

先解方程 $2x^2 + x - 2 = 0$ ，再写成因式分解的形式即可。

【详解】 解： 令 $2x^2 + x - 2 = 0$ ，

$\therefore a = 2, b = 1, c = -2$ ，

则 $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 16 = 17$ ，

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ ，

解得： $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ， $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

$\therefore 2x^2 + x - 2 = 2\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$ ，

故答案为: $2\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$.

12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-1)x = \frac{1}{2}m$ 根的情况是_____.

【答案】有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 把原方程整理成一般形式, 算出一元二次方程根的判别式的值, 即可求解, 掌握一元二次方程根的判别式与一元二次方程根的关系是解题的关键.

【详解】解: $x^2 + (m-1)x = \frac{1}{2}m$

整理得到, $2x^2 + 2(m-1)x - m = 0$

$$\therefore \Delta = [2(m-1)]^2 - 4 \times 2 \times (-m) = 4m^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2 + (m-1)x = \frac{1}{2}m$ 有两个不相等的实数根,

故答案为: 有两个不相等的实数根.

13. 函数 $y = (\pi - 3)x$ 的图像经过第_____象限 (请全部写出).

【答案】一、三

【解析】

【分析】此题考查的是正比例函数的图像及性质, 根据正比例函数的比例系数的符号判断函数所经过的象限是解决此题的关键. 根据正比例函数的图像及性质判断即可.

【详解】解: $\because y = (\pi - 3)x$ 中, $\pi - 3 > 0$,

$\therefore$ 函数 $y = (\pi - 3)x$ 的图像经过第一、三象限.

故答案为: 一、三.

14. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图像上有两点 $A(3, y_1), B(1, y_2)$, 那么 $y_1 - y_2$ _____ 0. (用 “>”, “=” 或 “<” 填空)

【答案】<

【解析】

【分析】本题主要考查反比例函数的性质, 掌握反比例函数的性质是关键. 根据反比例函数的性质, 当 $k > 0$

时，反比例函数的图象在每一个象限内 y 随着 x 的增大而减小，从而可确定答案.

【详解】解： $\because y = \frac{k}{x} (k > 0)$,

$\therefore$ 反比例函数的图象在每一个象限内 y 随着 x 的增大而减小，

$\because 3 > 1$,

$\therefore y_1 < y_2$,

$\therefore y_1 - y_2 < 0$,

故答案为： $<$.

15. 勾股定理的逆命题是（写成“如果…那么”的形式）_____.

【答案】 如果一个三角形的三条边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形为直角三角形

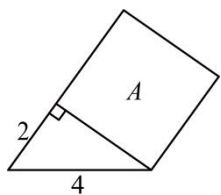
【解析】

【分析】 本题考查的是命题的概念，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题. 交换原命题的题设和结论即可得到原命题的逆命题.

【详解】 解： 勾股定理的逆命题是： 如果一个三角形的三条边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形为直角三角形.

故答案为： 如果一个三角形的三条边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形为直角三角形.

16. 如图所示的三角形为直角三角形，那么字母 A 所表示的正方形面积等于_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，根据勾股定理求出正方形的边长即可得到答案.

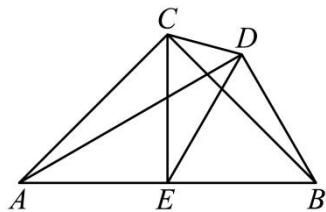
【详解】 解： 根据题意可得， 字母 A 所表示的正方形的边长为 $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 字母 A 所表示的正方形面积等于 $(2\sqrt{3})^2 = 12$

故答案为： 12 .

17. 将两块斜边长等于 2 的三角尺（ $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle ABD$ ）的斜边完全叠合按图所示摆放， E 为 AB 中

点，连接 EC 和 ED ，那么 $\triangle ECD$ 的面积等于_____.

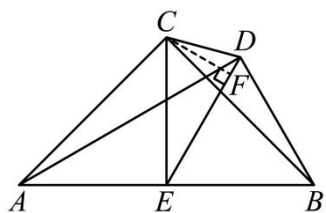


【答案】 $\frac{1}{4}$ ## 0.25

【解析】

【分析】过点 C 作 $CF \perp DE$ 于点 F ，根据直角三角形的性质得出 $CE \perp AB$ ， $CE = \frac{1}{2}AB = 1$ ，
 $DE = BE = \frac{1}{2}AB = 1$ ，证明 BDE 为等边三角形，得出 $\angle BED = 60^\circ$ ，求出 $\angle CED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，
 得出 $CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}$ ，根据三角形面积公式求出 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \times CF = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

【详解】解：过点 C 作 $CF \perp DE$ 于点 F ，如图所示：



根据三角尺的特点可知： $AC = BC$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ， $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore E$ 为 AB 中点，

$\therefore CE \perp AB$ ， $CE = \frac{1}{2}AB = 1$ ， $DE = BE = \frac{1}{2}AB = 1$ ，

$\therefore \angle CEB = 90^\circ$ ，

$\therefore DE = BE$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ，

$\therefore BDE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BED = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore CF \perp DE$ ，

$\therefore \angle CFE = 90^\circ$ ，

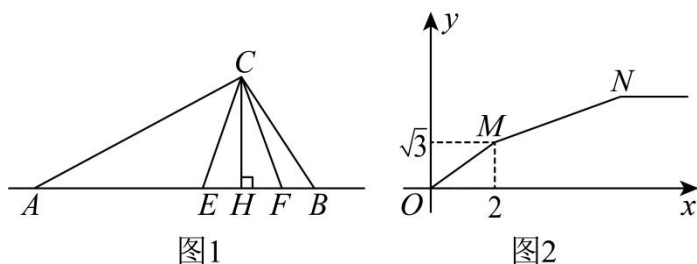
$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \times CF = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题主要考查了等边三角形的判定和性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，含 30° 角的直角三角形的性质，三角形面积计算，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握直角三角形的性质.

18. 如图 1, 已知直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, E, F$ 为直线 AB 上的两点, 且 $CE = CF$. 设 E, F 两点的距离为 x , $\triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y , 图 2 是 y 关于 x 的函数的图象. 根据两图信息, 图 2 中 MN 段函数的解析式是_____.



【答案】 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \leq x \leq 6)$

【解析】

【分析】由 M 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$ 得到 $EF = 2$, $\frac{1}{2}EF \cdot CH = \sqrt{3}$, 且点 F 和点 B 重合, 求出 $CH = \sqrt{3}$, $BH = \frac{1}{2}BC$, 进一步得到 $BH = 1$, $BC = 2$, $AB = 2BC = 4$, 则 $AC = 2\sqrt{3}$, $AH = 3$, 当点 E 运动到点 A 时, $\triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y 达到最大值, 此时则 $EF = 2AH = 6$, $y = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$, 即点 N 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$, 得到 $2 \leq x \leq 6$ 时, $y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}xCH + \frac{1}{2}BH \cdot CH = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即可求出答案.

【详解】解: 由题意可知, 点 M 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$, 即当 $x = 2$ 时, $y = \sqrt{3}$, 则此时 $EF = 2$, $\frac{1}{2}EF \cdot CH = \sqrt{3}$, 且点 F 和点 B 重合, 即 $\angle CBH = \angle CFH = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$, $\therefore CH = \sqrt{3}$, $BH = \frac{1}{2}BC$, $\therefore BC^2 = CH^2 + BH^2$, 即 $(2BH)^2 = CH^2 + BH^2$, 解得 $BH = 1$, 则 $BC = 2$, $\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2BC = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}, \quad AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 3,$$

当点 E 运动到点 A 时, $\triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y 达到最大值,

$$\therefore CE = CF.$$

$$\therefore \text{此时 } EF = 2AH = 6,$$

$$\text{此时 } y = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3},$$

即点 N 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$,

$$\text{当 } 2 \leq x \leq 6 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} xCH + \frac{1}{2} BH \cdot CH = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } MN \text{ 段函数的解析式是 } y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \leq x \leq 6)$$

【点睛】此题考查了从函数图象获取信息, 求函数解析式, 等腰三角形的判定和性质、勾股定理、直角三角形的性质等知识, 从函数图象获取正确的信息是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 第 19~21 题每题 6 分; 第 22 题 8 分, 共 26 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{48} - 2\sqrt{0.75} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

【答案】 -2

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的混合运算. 先化简二次根式为最简二次根式, 再合并同类二次根式即可.

$$\text{【详解】解: } \sqrt{48} - 2\sqrt{0.75} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}$$

$$= -2$$

$$20. \text{ 解方程: } 2(x-3)^2 + x = 3.$$

$$\text{【答案】 } x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

【解析】

【分析】此题考查了解一元二次方程，变形为 $(x-3)(2x-5)=0$ ，得到 $x-3=0$ 或 $2x-5=0$ ，即可求出答案即可.

【详解】解： $2(x-3)^2 + x = 3$

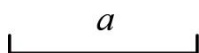
则 $2(x-3)^2 + (x-3) = 0$

$\therefore (x-3)(2x-5) = 0$

则 $x-3=0$ 或 $2x-5=0$

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{2}$

21. 如图，已知线段 a ,



(1) 求作等腰三角形 ABC ，使其底边 BC 长为 a ，底边上的高长为 $2a$ ；(尺规作图，不写作法，保留作图痕迹)，并写出结论.

(2) 如果 $a=2$ ，求等腰三角形 ABC 的腰长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{17}$

【解析】

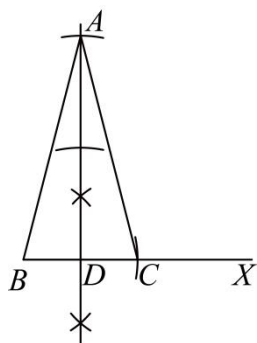
【分析】此题考查等腰三角形的定义、基本作图、勾股定理等知识

(1) 作线段 BC 长为 a ，作线段 BC 的垂直平分线，垂足为 D ，并截取 $AD = 2a$ ，连接 AB, AC 即可；

(2) 由题意得到 $BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = 1$ ， $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ ，利用勾股定理即可求出答案.

【小问1 详解】

解：如图，三角形 ABC 即为所求，



【小问2 详解】

$\therefore AD$ 垂直平分 BC

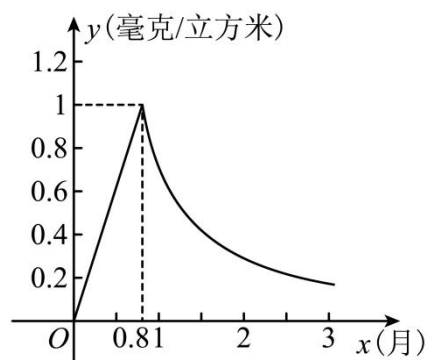
$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = 1, \quad \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$$

$$\therefore AD = 2a = 4$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

即等腰三角形 ABC 的腰长为 $\sqrt{17}$

22. 小明家在进行房屋装修时, 使用了某品牌的装修材料, 此材料会散发甲醛. 经过测试, 在自然扩散的情况下, 从施工开始到结束, 室内平均每立方米的甲醛含量 y (毫克/立方米) 与时间 x (月) 成正比例. 施工结束后, y 与 x 成反比例. 这两个变量之间的关系如图所示, 请根据图中信息, 回答下列问题:



(1) 施工过程中 y 关于 x 的函数解析式是_____;

(2) 已知国际上适宜居住的甲醛含量标准为小于或等于 0.08 毫克/立方米, 按照这个标准, 请问小明一家从施工开始计算, 至少经过多久才可以入住?

(3) 施工开始后的第 2 个月底到第 4 个月底, 室内的甲醛含量一直在下降, 假设这两个月每个月甲醛含量降低的百分率相同, 求这个降低的百分率. ($\sqrt{2} \approx 1.414$, 结果精确到 1%)

【答案】 (1) $y = \frac{5}{4}x (0 \leq x < 0.8)$

(2) 10 个月

(3) 29%

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的应用, 理解题意, 结合函数图象获得所需信息是解题关键.

(1) 利用待定系数法求出函数解析式即可;

(2) 利用待定系数法求出反比例函数解析式为 $y = \frac{0.8}{x} (x \geq 0.8)$, 当 $y = 0.08$ 时, $0.08 = \frac{0.8}{x}$, 解得 $x = 10$,

即可求出答案;

(3) 当 $x = 2$ 时, $y = \frac{0.8}{2} = 0.4$, 当 $x = 4$ 时, $y = \frac{0.8}{4} = 0.2$, 设这个降低的百分率为 a , 根据题意得到

一元二次方程，解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

当 $0 \leq x < 0.8$ 时，设直线解析式为 $y = k_1 x (k_1 \neq 0)$,

将点 $(0.8, 1)$ 代入，可得 $1 = 0.8k_1$ ，解得 $k_1 = \frac{5}{4}$,

所以施工过程中 y 关于 x 的函数解析式是 $y = \frac{5}{4}x (0 \leq x < 0.8)$,

【小问 2 详解】

当 $x \geq 0.8$ 时，设此阶段 y 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$,

将点 $(0.8, 1)$ 代入，可得 $1 = \frac{k_2}{0.8}$ ，解得 $k_2 = 0.8$,

所以施工结束后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{0.8}{x} (x \geq 0.8)$,

当 $y = 0.08$ 时， $0.08 = \frac{0.8}{x}$ ，解得 $x = 10$,

答：小明一家从施工开始计算，至少经过 10 个月才可以入住；

【小问 3 详解】

当 $x = 2$ 时， $y = \frac{0.8}{2} = 0.4$,

当 $x = 4$ 时， $y = \frac{0.8}{4} = 0.2$,

设这个降低的百分率为 a ，根据题意得，

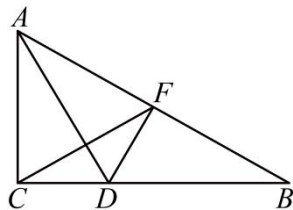
$$0.4(1-a)^2 = 0.2,$$

解得 $x = 29\%$ 或 $x = 1.71$ (不合题意，舍去)

$\therefore$ 这个降低的百分率为 29% .

四、解答题 (本大题共 3 题，第 23 ~ 24 题每题 8 分；第 25 题 10 分，共 26 分)

23. 如图，直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 BC 上一点，作 $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，同时 AD 恰好垂直平分 CF .



(1) 求证： AD 平分 $\angle BAC$ ；

(2) 如果 F 是 AB 中点， $BC = 3$ ，求 CD 长度.

【答案】(1) 见解析 (2) 1

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理、全等三角形判定和性质、直角三角形的性质等知识.

(1) 证明 $\triangle ADC \cong \triangle ADF$ (HL), 则 $\angle CAD = \angle BAD$, 即可得到结论;

(2) 由全等得到 $CD = DF$, 利用勾股定理求出解得 $AC = \sqrt{3}$, 则 $BF = AF = AC = \sqrt{3}$, 设 $CD = DF = x$, 则 $BD = BC - CD = 3 - x$, 则 $DF^2 + BF^2 = BD^2$, 得到 $x^2 + (\sqrt{3})^2 = (3 - x)^2$, 解方程即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because DF \perp AB$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle AFD = 90^\circ$,

$\because AD$ 恰好垂直平分 CF .

$\therefore AC = AF$,

又 $\because AD = AD$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF$ (HL),

$\therefore \angle CAD = \angle BAD$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$;

【小问 2 详解】

$\because \triangle ADC \cong \triangle ADF$ (HL)

$\therefore CD = DF$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\because F$ 是 AB 的中点,

$\therefore AB = 2AF$,

又 $AC = AF$,

$\therefore AB = 2AC$,

$\therefore AC^2 + 3^2 = (2AC)^2$,

解得 $AC = \sqrt{3}$,

$\therefore BF = AF = AC = \sqrt{3}$

设 $CD = DF = x$,

则 $BD = BC - CD = 3 - x$,

$\therefore \angle DFB = 90^\circ$,

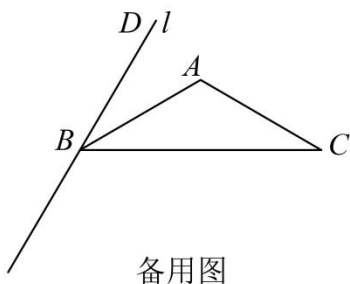
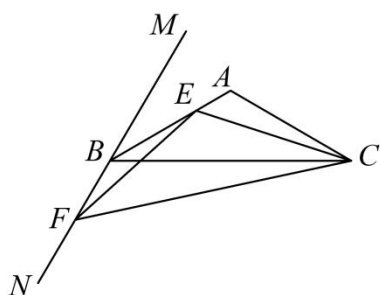
$\therefore DF^2 + BF^2 = BD^2$,

$\therefore x^2 + (\sqrt{3})^2 = (3 - x)^2$,

解得 $x = 1$

即 CD 长度为 1.

24. 如图, 已知直线 MN 与 BC 交于点 B , $\angle MBC = 60^\circ$, BA 平分 $\angle MBC$, 三角形 ABC 为等腰三角形, 且 $AB = AC = 2$. 点 E 是线段 BA 上的一点 (不与点 B 、 A 重合), 点 F 在射线 BN 上, 满足 $EC = EF$, 连接 CF .



(1) 求证: $\angle BFE = \angle ECB$;

(2) 设 $BE = x$, $\triangle BFE$ 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数解析式.

【答案】 (1) 证明过程见详解

(2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x (0 < x < 2)$

【解析】

【分析】 (1) 如图所示, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 作 $EH \perp BM$ 于点 H , 则 $\angle EGC = \angle EHF = 90^\circ$, 由角平分线的性质定理可得 $EG = EH$, 结合题意, 运用 “HL” 证明 $Rt\triangle ECG \cong Rt\triangle EFH$ (HL), 得到 $\angle BFE = \angle ECB$, 由此即可求解;

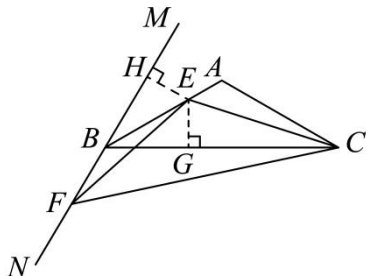
(2) 如图所示, 过点 A 作 $AI \perp BC$ 于点 I , 由等腰三角形的性质 “三线合一” 可得 $BC = 2BI$, 根据含 30° 角的直角三角形的性质可得 $BC = 2\sqrt{3}$, 同理可得 $EG = \frac{1}{2}x$, $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $CG = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则有

$S_{\triangle BEG} = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2$, $S_{\triangle ECG} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2$, 结合 (1) 中的证明可得 $S_{\triangle ECG} = S_{\triangle EFH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2$,

$$S_{\triangle EBG} = S_{\triangle EBH} = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2, \text{ 由 } S_{\triangle BEF} = S_{\triangle EFH} - S_{\triangle EBH}, \text{ 即可求解.}$$

【小问 1 详解】

证明: 如图所示, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 作 $EH \perp BM$ 于点 H , 则 $\angle EGC = \angle EHF = 90^\circ$,

 $\because BA$ 平分 $\angle MBC$,
$$\therefore EG = EH,$$

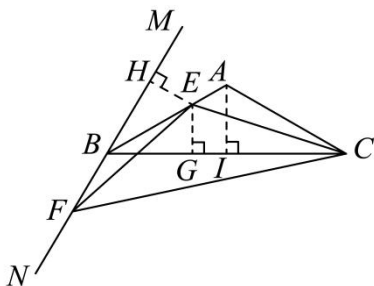
在 $Rt_{\Delta}ECG$ 和 $Rt_{\Delta}EFH$ 中,

$$\begin{cases} EC = EF \\ EG = EH \end{cases},$$

$$\therefore Rt_{\Delta}ECG \cong Rt_{\Delta}EFH (HL),$$
$$\therefore \angle BFE = \angle ECB;$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点A作 $AI \perp BC$ 于点I，


$$\because \angle MBC = 60^\circ, \quad BA \text{ 平分 } \angle MBC,$$
$$\therefore \angle MBA = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle MBC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$
$$\because AB = AC = 2,$$

$\therefore AI$ 是中线,

$$\therefore BI = CI = \frac{1}{2}BC,$$
$$\because AI \perp BC, \angle ABI = 30^\circ, AB = 2,$$

$$\therefore AI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \quad BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2BI = 2\sqrt{3},$$

同理，在 $Rt\triangle BEG$ 中， $BE = x, \angle EBG = 30^\circ$,

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x, \quad BG = \sqrt{BE^2 - EG^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore CG = BC - BG = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2}BG \cdot EG = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \times \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2,$$

$$S_{\triangle ECG} = \frac{1}{2}CG \cdot EG = \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \times \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2,$$

由 (1) 可得， $Rt\triangle ECG \cong Rt\triangle EFH (HL)$,

$$\therefore S_{\triangle ECG} = S_{\triangle EFH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2,$$

$$\therefore EG = EH, \angle EBG = \angle EBH = 30^\circ, EB = EB,$$

$$\therefore \triangle EBG \cong \triangle EBH (SAS),$$

$$\therefore S_{\triangle EBG} = S_{\triangle EBH} = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2,$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = S_{\triangle EFH} - S_{\triangle EBH},$$

$$\therefore S_{\triangle BFE} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

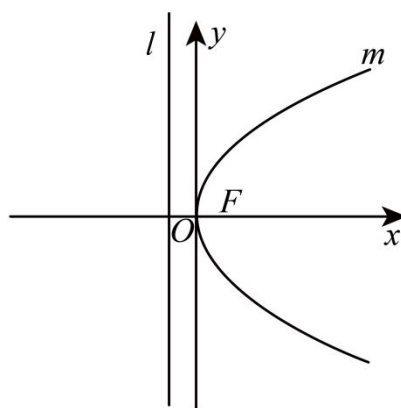
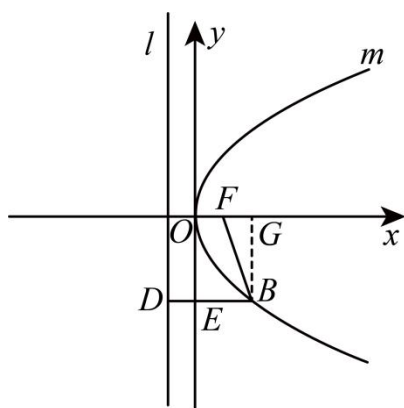
$\therefore$ 点 E 是线段 BA 上的一点 (不与点 B 、 A 重合),

$$\therefore 0 < BE < 2, \text{ 即 } 0 < x < 2,$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x (0 < x < 2).$$

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，角平分线的性质定理，含 30° 角的直角三角形的性质，函数关系的确定，掌握全等三角形的判定和性质，角平分线的性质定理，含 30° 角的直角三角形的性质，数形结合分析思想是解题的关键。

25. 平面内到一个定点和一条定直线（不经过定点）的距离相等的点的轨迹，称为抛物线，其中，这个定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线. 如图，直角坐标平面 xOy 中，曲线 m 是一条抛物线，点 F 是这条抛物线的焦点，直线 l 是抛物线 m 的准线. 如果点 B 为抛物线 m 上任意一点，连接 BF ，并作 $BD \perp l$ ，垂足为 D ， BD 交 y 轴于点 E ，那么由抛物线的定义可知 $BF = BD$. 已知抛物线 m 的准线 l 的表达式为 $x = -1$.



备用图

- (1) ①如图可知抛物线 m 经过原点，那么点 F 坐标为_____；
 ②如图，如果 $BD = BF = 3$ ，作 $BG \perp x$ 轴，那么 $BE = OG =$ ____， $GB =$ ____.
 (2) 直线 $y = x$ 与抛物线 m 在第一象限交于点 P ，求 P 点坐标；
 (3) 反比例函数图像与抛物线 m 交于点 A （位于第一象限），过点 A 作 $AH \perp x$ 轴，垂足为 H ，如果 $S_{\triangle AFH} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOH}$ ，直接写出这个反比例函数的函数解析式.

【答案】(1) ① $(1, 0)$ ；② 2 , $2\sqrt{2}$

(2) $P(4, 4)$

(3) $y = \frac{4\sqrt{2}}{x}$

【解析】

【分析】本题在新定义的基础上考查了勾股定理，反比例函数的定义等知识，解决问题的关键是紧扣定义.

- (1) ①根据定义得出点 O 到 l 的距离等于点 O 到 F 点距离，进而得出结果；
 ②可得出 $OG = BE = BD - DE = 2$ ， $FG = OG - OF = 1$ ，根据勾股定理求得 GB 的值.
 (2) 作 $PT \perp l$ 于 T ，交 y 轴于 R ，连接 PF ，作 $PQ \perp x$ 于 Q ，设 $P(a, a)$ ，可得出 $PR = PQ = a$ ，
 $PF = PR = a + 1$ ， $FQ = OQ - OF = x - 1$ ，在 $Rt\triangle PQF$ 中，根据勾股定理列出方程，进一步得出结果.

(3) 作 $AG \perp l$ ，交 y 轴于 V ，作 $AH \perp x$ 轴于 H ，根据得出 $AV = OH = 2OF = 2$ ， $FH = OF = 1$ ， $AF = AG = 2 + 1 = 3$ ，在 $\text{Rt}\triangle AFH$ 中根据勾股定理得出 AH ，进一步得出结果。

【小问 1 详解】

解：① $\because$ 点 O 到 l 的距离等于点 O 到 F 点距离，

$$\therefore OF = 1,$$

故答案为：(1,0)；

② $\because BD = 3$ ， $DE = 1$ ， $BD \perp l$ ，

$$\therefore OG = BE = BD - DE = 2,$$

$$\therefore FG = OG - OF = 1,$$

$\because BG \perp x$ 轴，

$$\therefore \angle BGF = 90^\circ,$$

$$\therefore GB = \sqrt{BF^2 - FG^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

故答案为：2, $2\sqrt{2}$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 1，

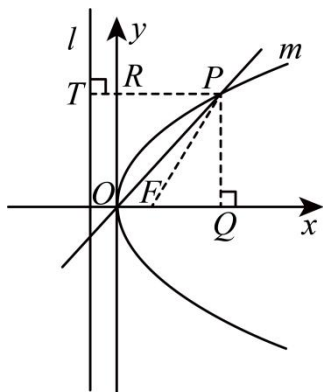


图1

作 $PT \perp l$ 于 T ，交 y 轴于 R ，连接 PF ，作 $PQ \perp x$ 于 Q ，

设 $P(a, a)$ ，

$$\therefore PR = PQ = a,$$

$$\therefore PF = PR = a + 1, \quad FQ = OQ - OF = x - 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle PQF$ 中， $PQ^2 + FQ^2 = PF^2$ ，

$$\therefore a^2 + (a-1)^2 = (a+1)^2,$$

$$\therefore a = 4 \text{ 或 } a = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore P(4, 4);$$

【小问 3 详解】

解: 如图 2,

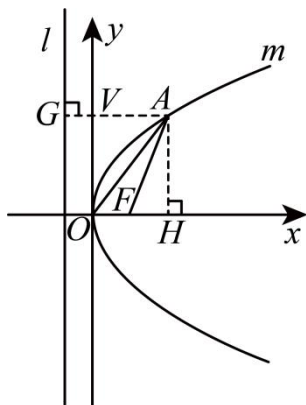


图2

作 $AG \perp l$, 交 y 轴于 V , 作 $AH \perp x$ 轴于 H ,

$$\therefore \angle AHF = 90^\circ,$$

$$\because S_{\triangle AFH} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOH},$$

$$\therefore AV = OH = 2OF = 2, \quad FH = OF = 1,$$

$$\therefore AF = AG = 2 + 1 = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AFH \text{ 中, } AH = \sqrt{AF^2 - FH^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore A(2, 2\sqrt{2}),$$

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$$\therefore 2\sqrt{2} = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{这个反比例函数的解析式为: } y = \frac{4\sqrt{2}}{x}.$$