

2024 学年第一学期期末质量调研卷

初二年级数学学科

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

注意事项:

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、学号等信息.
2. 请将答案正确填写在答题卡上, 作图痕迹和各种标记都需填写在答题卡上.
3. 第 22、23、26 题无需写出说理的依据.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式中, 最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{5x}$

B. $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$

C. $\sqrt{\frac{2}{ab}}$

D. $\sqrt{\frac{a}{2}}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式的定义, 最简二次根式必须满足两个条件: 被开方数不含分母, 被开方数不含能开得尽方的因数或因式, 熟练掌握最简二次根式的定义是解答本题的关键. 根据最简二次根式的定义解答即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{5x}$ 是最简二次根式, 故 A 选项符合题意;

B、 $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, 被开方数含有能开得尽的因式, 不是最简二次根式, 故 B 选项不符合题意;

C、 $\sqrt{\frac{2}{ab}}$, 被开方数含有分母, 不是最简二次根式, 故 C 选项不符合题意;

D、 $\sqrt{\frac{a}{2}}$, 被开方数含有分母, 不是最简二次根式, 故 D 选项不符合题意;

故选: A.

2. 下列方程中, 一元二次方程的是 ()

A. $9x - 1 = 0$

B. $x + \frac{1}{x^2} = 3$

C. $x^2 = (x-2)(x+1)$

D. $(x-2)(x+2) + 4 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的识别，根据只含有一个未知数，且含有未知数的项的最高次数为 2 的整式方程，叫做一元二次方程，进行判断即可.

【详解】 解：A、是一元一次方程，不符合题意；

B、是分式方程，不符合题意；

C、 $x^2 = (x-2)(x+1)$ ，化简，得： $x+2=0$ ，方程变为一元一次方程，不符合题意；

D、 $(x-2)(x+2)+4=0$ ，化简，得： $x^2=0$ ，是一元二次方程，符合题意；

故选 D.

3. 下列命题的逆命题中，真命题的是 ()

A. 全等三角形的对应角相等

B. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

C. 关于某一条直线对称的两个三角形全等

D. 对顶角相等

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是命题与定理，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题，判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

分别写出各个命题的逆命题，根据全等三角形的判定、直角三角形的判定、轴对称、对顶角相等判断即可.

【详解】 解：A、全等三角形的对应角相等，逆命题是对应角相等的三角形全等，是假命题，故 A 选项不符合题意；

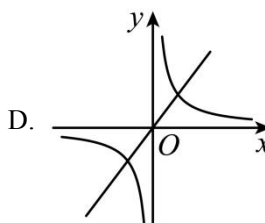
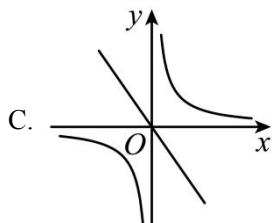
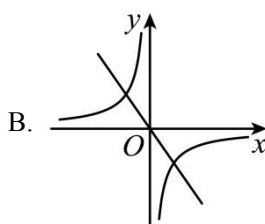
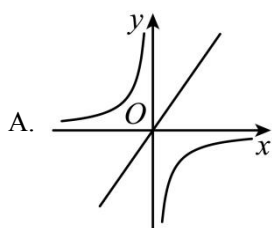
B、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，逆命题是一个三角形一边的中线是这边的一半，那么这个三角形是直角三角形，是真命题，故 B 选项符合题意；

C、关于某一条直线对称的两个三角形全等，逆命题是两个全等三角形关于某一条直线对称，是假命题，故 C 选项不符合题意；

D、对顶角相等，逆命题是相等的角是对顶角，是假命题，故 D 选项不符合题意；

故选：B.

4. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答.

【详解】解：∵ 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

∴ $k < 0$,

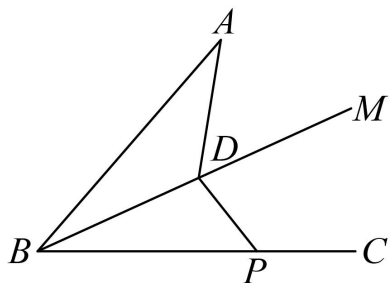
∴ 双曲线在第二、四象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

∴ B 选项满足题意

故选：B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键.

5. 如图， BM 是 $\angle ABC$ 的平分线，点 D 是 BM 上一点，点 P 为直线 BC 上的一个动点. 若 $\triangle ABD$ 的面积为 9， $AB = 6$ ，则线段 DP 的长不可能是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5.5

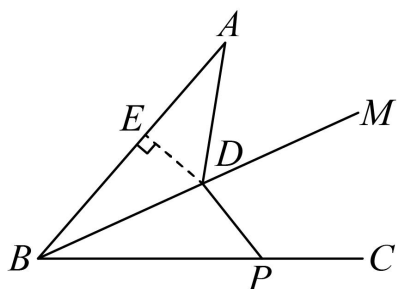
【答案】A

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质定理，垂线段最短，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，利用三角形的面积公式求出 DE

的长, 根据垂线段最短得到 $DP \perp BC$ 时, DP 最短, 此时 $DP = DE$, 进行判断即可.

【详解】解: 过点 D 作 $DE \perp AB$,



$$\text{则: } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6DE = 9,$$

$$\therefore DE = 3,$$

$\therefore$ 点 P 为直线 BC 上的一个动点,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, DP 最短,

$\therefore BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, $DP = DE = 3$,

$\therefore$ 线段 DP 的长不可能是 2;

故选 A.

6. 下列说法错误的是 ().

A. 在一个角的内部 (包括顶点) 到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线

B. 到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心, 半径长为 1cm 的圆

C. 到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线

D. 等腰三角形 ABC 的底边 BC 固定, 顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线

【答案】D

【解析】

【分析】根据角平分线的性质、圆的轨迹、平行线和等腰三角形的性质结合图形进行解答即可.

【详解】A. 在一个角的内部 (包括顶点) 到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线, 故该选项正确,

B. 到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心, 半径长为 1cm 的圆, 故该选项正确,

C. 到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线, 故该选项正确;

D. 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 固定, 顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线 (BC 的中点除外), 故该选项错误, 故选 D.

【点睛】本题考查的是点的轨迹, 掌握角平分线的性质、圆的轨迹、平行线和线段垂直平分线的性质是解

题的关键.

二、填空题 (本大题 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解: $\because \sqrt{16}=4$

$\therefore \sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

8. 关于 x 的方程 $x(x-1)+3(x-1)=0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1=-3, x_2=1$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程.

【详解】 $x(x-1)+3(x-1)=0$,

$(x-1)(x+3)=0$,

解得 $x_1=-3, x_2=1$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的求解, 准确计算是解题的关键.

9. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(3,4)$ 、 $B(-2,-6)$, 则 $AB=$ _____.

【答案】 $5\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查求两点间的距离, 作 $AC \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 利用勾股定理进行求解即可.

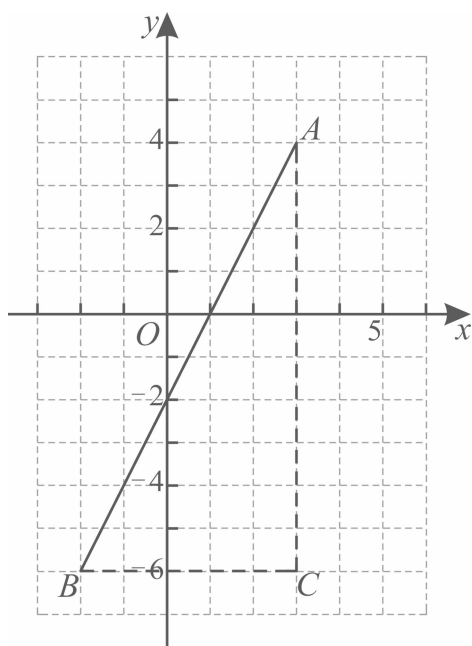
【详解】解: 如图作 $AC \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 则: $\angle ACB = 90^\circ$,

$\because A(3,4)$ 、 $B(-2,-6)$,

$\therefore AC = 4 + 6 = 10, BC = 3 + 2 = 5$,

$\therefore AB = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$;

故答案为: $5\sqrt{5}$.



10. 函数 $y = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，掌握以上知识点是解答本题的关键. 根据二次根式的被开方数是非负数以及分母不为 0，求出函数的定义域即可.

【详解】 解：由题意得：
$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ \frac{1}{x-2} \geq 0 \end{cases},$$

解得： $x > 2$,

故答案为： $x > 2$.

11. 如果正比例函数 $y = (m-1)x^{m^2-1}$ 的图象经过第二、四象限，那么 m 的值为_____.

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 首先根据正比例函数的定义可得 $m^2-1=1$ ，且 $m-1 \neq 0$ ，解出 m 的值，再根据图象经过第二、四象限，可得 $m-1 < 0$ ，进而确定 m .

【详解】 解：由题意得： $m^2-1=1$ ，且 $m-1 \neq 0$,

解得： $m = \pm \sqrt{2}$,

$\because$ 图象经过第二、四象限,

$$\therefore m-1 < 0,$$

解得 $m < 1$,

$$\therefore m = -\sqrt{2},$$

故答案为: $-\sqrt{2}$.

【点睛】此题主要考查了正比例函数的定义和性质, 关键是掌握正比例函数的定义条件: k 为常数且 $k \neq 0$, 自变量次数为 1.

12. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 2x - 5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2})$

【解析】

【分析】将原式变形为 $2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{2}$, 再利用平方差公式分解即可得.

【详解】解: $2x^2 - 2x - 5$

$$= 2(x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{11}{2}$$

$$= 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{2}$$

$$= 2\left[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4}\right]$$

$$= 2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}),$$

故答案为: $2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2})$.

【点睛】本题主要考查实数范围内分解因式, 解题的关键是熟练掌握完全平方公式和平方差公式.

13. 平面直角坐标系中, 点 A 坐标为 $(2\sqrt{3}, 3)$, 将点 A 沿 x 轴向左平移 a 个单位后恰好落在正比例函数

$y = -2\sqrt{3}x$ 的图象上, 则 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】根据点的平移规律可得平移后点的坐标是 $(2\sqrt{3} - a, 3)$, 代入 $y = -2\sqrt{3}x$ 计算即可.

【详解】解: $\because$ A 坐标为 $(2\sqrt{3}, 3)$,

∴ 将点 A 沿 x 轴向左平移 a 个单位后得到的点的坐标是 $(2\sqrt{3}-a, 3)$,

∴ 恰好落在正比例函数 $y = -2\sqrt{3}x$ 的图象上,

$$\therefore -2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-a) = 3,$$

$$\text{解得: } a = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

【点睛】此题主要考查了正比例函数图象上点的坐标特点, 以及点的平移规律, 关键是要懂得左右移动改变点的横坐标, 左减, 右加; 上下移动改变点的纵坐标, 下减, 上加.

14. 若三个点 $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(2, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图像上, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是_____.

$$\text{【答案】 } y_3 < y_1 < y_2$$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是明确题意, 利用反比例函数的性质来解答.

先根据反比例函数中 $k < 0$ 判断出函数图象所在象限及增减性, 再根据各点横坐标的特点即可得出结论.

【详解】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 函数图象位于二、四象限, 且在每一象限内 y 随 x 的增大而增大,

$$\because -2 < 0, \quad -1 < 0,$$

$\therefore$ 点 $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$ 位于第二象限,

$$\therefore y_1 > 0, \quad y_2 > 0,$$

$$\because -2 < -1 < 0,$$

$$\therefore 0 < y_1 < y_2,$$

$$\because 2 > 0,$$

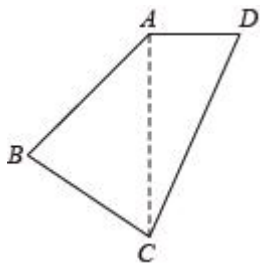
$\therefore$ 点 $(2, y_3)$ 位于第四象限,

$$\therefore y_3 < 0,$$

$$\therefore y_3 < y_1 < y_2,$$

故答案为: $y_3 < y_1 < y_2$.

15. 如图，在四边形 ABCD 中，AB: BC: CD: DA=2: 2: 3: 1，且 $\angle ABC=90^\circ$ ，则 $\angle DAB$ 的度数是_____°.



【答案】 135°

【解析】

【分析】由已知可得 $AB=BC$ ，从而可求得 $\angle BAC$ 的度数. 设 $AB=2x$ ，通过计算证明 $AC^2+AD^2=CD^2$ ，从而证得 $\triangle ACD$ 是直角三角形，即可得到 $\angle DAC=90^\circ$ ，从而求得 $\angle DAB$ 的度数.

【详解】解： $\because AB: BC: CD: DA=2: 2: 3: 1$ ，且 $\angle ABC=90^\circ$ ，

$$\therefore AB=BC,$$

$$\therefore \angle BAC=\angle ACB=45^\circ,$$

$$\therefore \text{设 } AB=2x, \text{ 则 } BC=2x, CD=3x, DA=x,$$

$$\therefore AC^2=AB^2+BC^2=(2x)^2+(2x)^2=8x^2$$

$$\text{又 } CD^2-AD^2=(3x)^2-x^2=8x^2$$

$$\therefore AC^2=CD^2-AD^2$$

$$\therefore AC^2+AD^2=CD^2$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形，

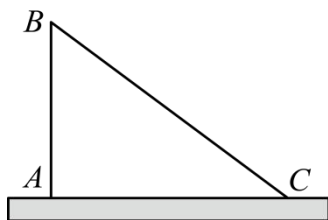
$$\therefore \angle DAC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB=45^\circ+90^\circ=135^\circ.$$

故答案是： 135° .

【点睛】此题主要考查学生对勾股定理及逆定理的理解和运用能力，正确得出 $\angle DAC=90^\circ$ 是解题关键.

16. 如图，一根木杆在离地面 3m 的 B 处折断，木杆顶端 C 落在离木杆底端 A 的 4m 处. 则木杆折断之前的长度为_____.



【答案】 8m ## 8 米

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理的应用，主要考查学生对勾股定理在实际生活中的运用能力.

由于木杆离地面部分、折断部分及地面正好构成直角三角形，利用勾股定理求出折断部分的长，进而可得出结论.

【详解】解：∵木杆离地面部分、折断部分及地面正好构成直角三角形，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 3m$, $BC = 4m$,

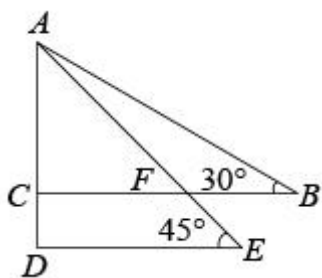
$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(m),$$

$$\therefore AB + AC = 3 + 5 = 8(m),$$

答：木杆折断之前的高度为 $8m$.

故答案为： $8m$.

17. 将一副三角尺如图所示叠放在一起，点 A 、 C 、 D 在同一直线上， AE 与 BC 交于点 F ，若 $AB = 14cm$ ，则 $AF =$ _____ cm .



【答案】 $7\sqrt{2}$

【解析】

【分析】求出 $\angle AFC = \angle E = 45^\circ$ ，由直角三角形的性质求出 $AC = 7cm$ ，由勾股定理可得出答案.

【详解】解：由题意知， $\angle ACB = \angle D = 90^\circ$,

$$\therefore CF \parallel DE,$$

$$\therefore \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = CF,$$

$$\therefore AB = 14cm, \angle B = 30^\circ,$$

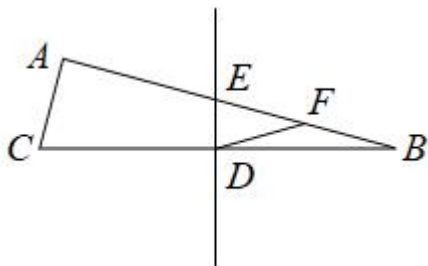
$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 7cm,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = 7\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

故答案为： $7\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查含 30 度直角三角形的性质及勾股定理，熟练掌握含 30 度直角三角形的性质及勾股定理是解题的关键.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 15^\circ$ ，斜边 BC 的垂直平分线交边 AB 于点 E ，垂足为点 D ，取线段 BE 的中点 F ，联结 DF ，如果 $AC = 4$ ，则 $DF =$ _____.

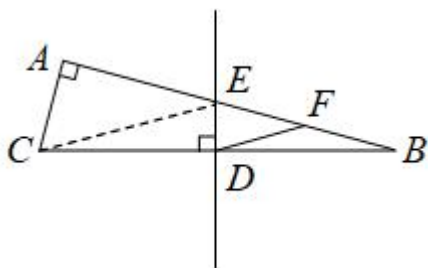


【答案】 4

【解析】

【分析】 先根据线段垂直平分线的性质得 $AE = BE$ ，再利用直角三角形斜边中线的性质得 $DF = BE$ ，最后根据直角三角形 30 度的性质得 $AC = \frac{1}{2} AE$ ，从而得出 $DF = AC$ ，即可得出答案.

【详解】 证明：如图，联结 CE ，



$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$\therefore AE = BE, \angle EDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAB = \angle B = 15^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 30^\circ$,

$Rt\triangle EDB$ 中， $\because F$ 是 BE 的中点，

$\therefore DF = \frac{1}{2} BE$,

$Rt\triangle ACE$ 中， $\because \angle AEC = 30^\circ$ ，

$\therefore AC = \frac{1}{2} AE$,

$\therefore AC = DF = 4$.

故答案为： 4 .

【点睛】 本题考查了垂直平分线的性质，直角三角形斜边上的中线的性质以及 30° 所对的直角边的性质，

熟练掌握这些基本性质得出线段关系是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 满分 20 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6}$.

【答案】 $-4 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 先化简各式, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} - 2\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{4}$

$$= -2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2$$
$$= -4 - \sqrt{3}.$$

20. 已知 y 与 $2x-3$ 成反比例, 且当 $x=2$ 时, $y=4$, 求 y 关于 x 的函数解析式.

【答案】 $y = \frac{4}{2x-3}$

【解析】

【分析】 根据题意可以设出 $y = \frac{k}{2x-3}$ ($k \neq 0$), 把“ $x=2$, $y=4$ ”代入, 进行求解即可得出函数解析式.

【详解】 解: 依题意可设 $y = \frac{k}{2x-3}$ ($k \neq 0$),

$\because$ 当 $x=2$ 时, $y=4$,

$$\therefore 4 = \frac{k}{2 \times 2 - 3},$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = \frac{4}{2x-3}.$$

答: y 关于 x 的函数解析式是 $y = \frac{4}{2x-3}$.

【点睛】 本题考查待定系数法求反比例函数解析式, 注意设函数解析式时, 系数 k 不为零.

21. 已知: 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 - 2mx + m+3 = 0$. 当 m 为何值时, 方程有两个实数根?

【答案】 当 $m \leq \frac{3}{2}$ 且 $m \neq 1$ 时方程有两个实数根

【解析】

【分析】 由方程是一元二次方程, 可知 $m-1 \neq 0$, 由方程有两个实数根, 可得 $\Delta \geq 0$, 计算求解可得 m 的取

值范围.

【详解】解: $\because$ 方程是一元二次方程,

$$\therefore m-1 \neq 0,$$

解得 $m \neq 1$,

$\because$ 方程有两个实数根,

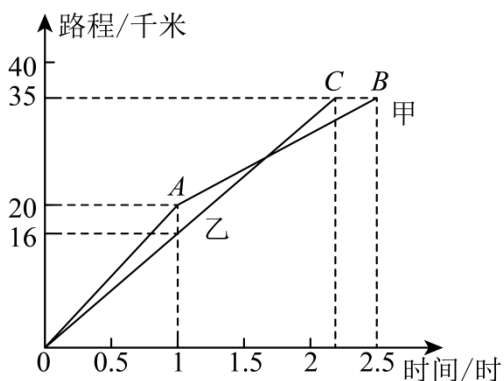
$$\therefore \Delta = (-2m)^2 - 4 \times (m-1)(m+3) \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 当 $m \leq \frac{3}{2}$ 且 $m \neq 1$ 时方程有两个实数根.

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义, 方程根的个数与判别式的关系. 解题的关键在于明确: 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

22. 甲、乙两队参加赛龙舟比赛, 上午 9 时同时出发. 其中甲、乙两队在比赛时, 路程 y (千米) 与时间 x (小时) 的函数关系如图所示. 甲队在上午 11 时 30 分到达终点.



(1) 比赛中_____的速度始终保持不变, 为_____千米/小时;

(2) _____先到达终点, 时间相差_____小时;

(3) 比赛开始后_____小时, 他们第一次相遇.

【答案】(1) 乙队, 16

(2) 乙队, $\frac{5}{16}$

(3) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】本题考查利用函数图象表示变量之间的关系, 从函数图象中有效的获取信息, 是解题的关键:

(1) 观察图象可知, 乙队的速度始终不变, 利用路程除以时间进行求解即可;

(2) 乙队先到达终点, 利用路程除以速度求出乙队所用时间, 进而求出时间差即可;

(3) 求出甲队在 AB 段的速度，列出方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：观察图象可知，乙队的速度始终不变，1 小时行驶了 16 千米，

$\therefore$ 乙队的速度为：16 千米/小时；

故答案为：乙队，16；

【小问 2 详解】

由图象可知，乙队先达到终点，所用时间为： $\frac{35}{16}$ ，甲队到达终点所用时间为：2.5 小时，

$\therefore$ 时间相差 $2.5 - \frac{35}{16} = \frac{5}{16}$ 小时；

故答案为：乙队， $\frac{5}{16}$ ；

【小问 3 详解】

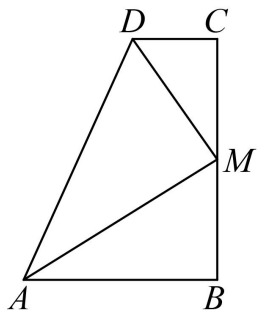
甲队 AB 段的速度为： $(35 - 20) \div (2.5 - 1) = 10$ 千米/小时，

当他们第一次相遇时， $16x = 20 + 10(x - 1)$ ，解得： $x = \frac{5}{3}$ ；

故比赛开始后 $\frac{5}{3}$ 小时，他们第一次相遇.

四、解答题 (本大题共 4 题, 23 题 6 分, 24、25 题每题 8 分, 26 题 10 分, 满分 32 分)

23. 如图，已知 $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点， DM 平分 $\angle ADC$ 。求证：



(1) AM 平分 $\angle DAB$ ；

(2) $DM \perp AM$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

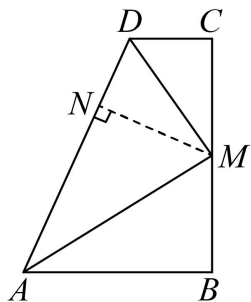
【分析】本题主要考查了角平分线的判定与性质、三角形的内角和定理、平行线的判定和性质，解决本题的关键是根据角平分线的性质找边和角之间的关系.

(1) 过点 M 作 $MN \perp AD$ ，根据角平分线的性质可证 $MN = MC$ ，根据中点的定义可知 $MC = MB$ ，所以可证 $MC = MB = MN$ ，根据到角两边的距离相等的点在角平分线上，可证结论成立；

(2) 根据 $\angle B = \angle C = 90^\circ$ 可知 $DC \parallel AB$ ，根据两直线平行同旁内角互补可得 $\angle ADC + \angle DAB = 180^\circ$ ，根据角平分线的定义可知 $\angle ADM + \angle DAM = 90^\circ$ ，根据三角形的内角和定理可证 $\angle AMD = 90^\circ$ ，从而可证结论成立.

【小问 1 详解】

证明：如下图所示，过点 M 作 $MN \perp AD$ ，



$\because DM$ 平分 $\angle ADC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore MC \perp DC$ ，

$\therefore MN = MC$ ，

$\because M$ 是 BC 的中点，

$\therefore MC = MB$ ，

$\therefore MC = MB = MN$ ，

$\therefore AM$ 平分 $\angle DAB$ ；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 可知 AM 平分 $\angle DAB$ ，

$\therefore \angle CDM = \angle ADM = \frac{1}{2} \angle ADC$ ，

又 $\because DM$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle DAM = \angle BAM = \frac{1}{2} \angle DAB$ ，

$\because \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore DC \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ADC + \angle DAB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ADM + \angle DAM = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle DAB) = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ADM$ 中， $\angle AMD = 180^\circ - \angle ADM - \angle DAM = 90^\circ$ ，

$\therefore DM \perp AM$ 。

24. 某商品的进价为每件 40 元, 售价为每件 50 元, 每个月可卖出 200 件. 如每件商品的售价每上涨 1 元, 则每个月少卖 5 件. 设每件商品的售价上涨 x 元, 每个月销售利润为 y 元.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 每件商品的售价定为多少元时, 每个月可获得最大利润? 最大的月利润是多少元?

(3) 每件商品的售价定在什么范围时, 每个月的利润不低于 3000 元?

【答案】 (1) $y = -5x^2 + 150x + 2000$; (2) 每件商品售价定为 65 元时, 每个月获得最大利润, 最大的月利润是 3125 元; (3) 售价定为 60 ~ 70 的范围时, 每个月的利润不低于 3000 元

【解析】

【分析】 (1) 根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 卖出的数量, 可以求得 y 与 x 的函数关系式;

(2) 根据 (1) 中函数解析式, 将其化为顶点式即可解答本题;

(3) 根据题意可以得到关于 x 的不等式, 从而可以解答本题.

【详解】 (1) 由题意可得,

$$y = (50 + x - 40)(200 - 5x) = -5x^2 + 150x + 2000,$$

即 y 与 x 的函数关系式是 $y = -5x^2 + 150x + 2000$;

$$(2) \because y = -5x^2 + 150x + 2000 = -5(x - 15)^2 + 3125,$$

$\therefore$ 当 $x = 15$ 时, y 取得最大值, 此时 $y = 3125$, $50 + x = 65$,

答: 每件商品售价定为 65 元时, 每个月获得最大利润, 最大的月利润是 3125 元;

(3) 由题意可得,

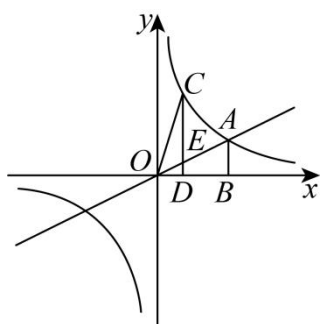
$$-5x^2 + 150x + 2000 \geq 3000,$$

解得, $10 \leq x \leq 20$,

$\therefore$ 售价定为 60 ~ 70 的范围时, 每个月的利润不低于 3000 元.

【点睛】 本题考查了二次函数的应用、一元二次方程的应用, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用函数和方程的思想解答.

25. 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A 点, 且点 A 的横坐标为 4, 曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上有一动点 $C(m, n) (0 < m < 4)$, 过点 A 作 x 轴垂线, 垂足为 B , 过点 C 作 x 轴垂线, 垂足为 D , 连接 OC .



- (1) 求 k 的值;
- (2) 设 $\triangle COD$ 与 $\triangle AOB$ 的重合部分的面积为 S , 求 S 关于 m 的函数关系;
- (3) 连接 AC , 当第 (2) 问中 S 的值为 1 时, 求 $\triangle ACO$ 的面积.

【答案】(1) $k=8$

(2) $S = \frac{1}{4}m^2$

(3) $S_{\triangle AOC} = 6$

【解析】

【分析】本题是反比例函数的综合题, 考查了待定系数法求函数的解析式, 三角形的面积的计算, 反比例函数系数 k 的几何意义, 正确地求得 k 的值是解题的关键.

(1) 首先将 A 点横坐标代入 $y = \frac{1}{2}x$ 求出 $A(4, 2)$, 然后代入 $y = \frac{k}{x}$ 求解即可;

(2) E 点的坐标为 $E\left(m, \frac{1}{2}m\right)$, 则 $OD = m$, 由 $S = \frac{1}{2}OD \cdot DE$ 即可建立函数解析式;

(3) 根据三角形的面积公式得到 $E(2, 1)$, 求得 $OD = 2$, 根据梯形的面积公式即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 的横坐标是 4,

$$\therefore \text{将 } x=4 \text{ 代入 } y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

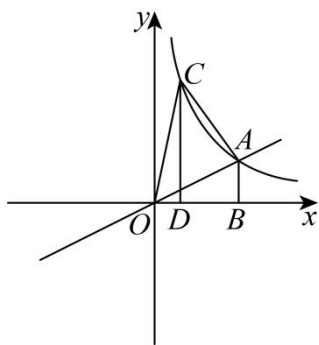
$$\therefore A(4, 2),$$

$$\therefore \text{将 } A(4, 2) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x}, \text{ 得 } k = 8,$$

$\therefore k$ 的值为 8;

【小问 2 详解】

解: 如图, 设 $\triangle COD$ 与 $\triangle AOB$ 的重合部分的面积值为 S ,



$\because E$ 在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上,

$\therefore E$ 点的坐标为 $E\left(m, \frac{1}{2}m\right)$,

$\therefore OD = m$,

$\therefore S = \frac{1}{2}OD \cdot DE = \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{2}m = \frac{1}{4}m^2$,

【小问 3 详解】

解: 由题意得, $\frac{1}{4}m^2 = 1$,

解得 $m = 2$ 或 -2 (舍去),

$\therefore E(2, 1)$,

$\therefore OD = 2$,

$\because$ 点 C 在函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象上,

$\therefore CD = y = \frac{8}{2} = 4$

$\because S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = \frac{8}{2} = 4$,

$\therefore S_{\triangle CEO} = \text{梯形 } ABDE \text{ 的面积} = 4 - S_{\triangle ODE} = 3$,

由 (1) 知 $A(4, 2)$,

$\therefore OB = 4$, $AB = 2$,

$\therefore BD = 4 - 2 = 2$,

$\therefore \text{梯形 } ABDC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}BD \cdot (DC + AB) = \frac{1}{2} \times 2 \times (4 + 2) = 6$,

$\therefore S_{\triangle AOC} = \text{梯形 } ABDC \text{ 的面积} = 6$.

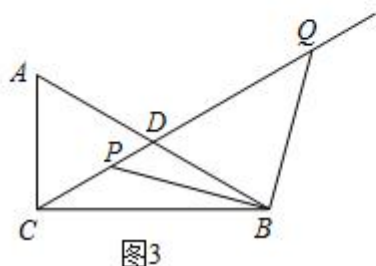
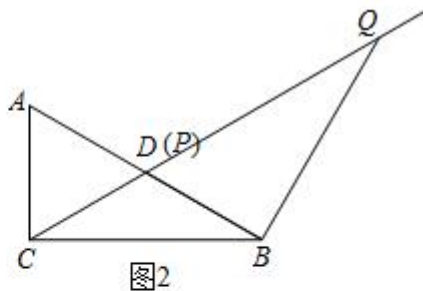
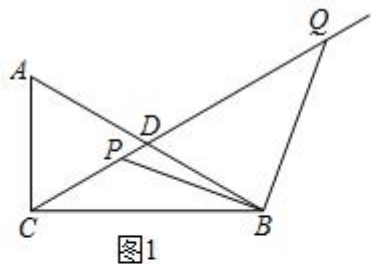
26. 如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 6$, D 是 AB 的中点 P 是射线 CD 上一个

动点，联结 PB ，过点 B 作 PB 的垂线，交射线 CD 于 Q 。

(1) 如图 2，如果点 P 与点 D 重合，求证： $PQ = 2PC$ ；

(2) 如图 3，如果 $BP = BQ$ ，求 PQ 的长；

(3) 设 $CP = x$, $BP = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围。



【答案】(1) 证明见详解；(2) $PQ = 6\sqrt{3}$ ；(3) $y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} (0 < x \leq 9)$, $y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} (x > 9)$,

【解析】

【分析】(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 6$ ， D 是 AB 的中点可得 $DC = AD = BD$ ，可求 $\angle DCB = \angle DBC = 30^\circ$ ，由外角性质 $\angle QDB = \angle DCB + \angle DBC = 60^\circ$ ，由 $QB \perp DB$ ，可求 $\angle DQB = 90^\circ - \angle QDB = 30^\circ$ ，可得 $DQ = 2DB = 2DC$ ，由 D 与 P 重合，可证 $PQ = 2PC$ ；

(2) 过 B 作 $BH \perp PQ$ 于 H ，由 $AC = 6$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，可求 $AB = 2AC = 12$ ，在 $Rt\triangle ACB$ 中由勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6\sqrt{3}$ ，由 $\angle HCB = 30^\circ$ ， $\angle CHB = 90^\circ$ ，可求 $CB = 2BH = 6\sqrt{3}$ ，可得 $BH = 3\sqrt{3}$ ，由 $\angle PBQ = 90^\circ$ ， $BP = BQ$ ，可求 $PQ = 2BH = 6\sqrt{3}$ ；

(3) 由 (2) 得 $BH = 3\sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle CBH$ 中，由勾股定理求出 $CH = 9$ ，当 $CP \leq 9$ 时 $PH = 9 - PC = 9 - x$ ，当 $CP > 9$ 时 $PH = PC - 9 = x - 9$ ，分两种情况，在 $Rt\triangle PBH$ 中由勾股定理得： $PB^2 = PH^2 + BH^2$ 即可求出。

【详解】解：(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 6$ ， D 是 AB 的中点，
 $\therefore DC = AD = BD$ ，
 $\therefore \angle DCB = \angle DBC = 30^\circ$ ，
 又 $\therefore \angle QDB = \angle DCB + \angle DBC = 60^\circ$ ，

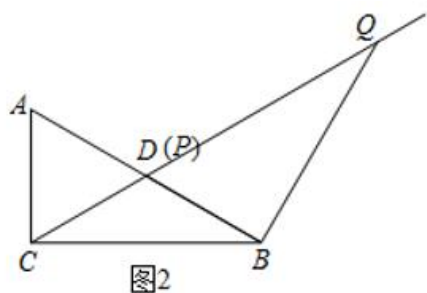
$\therefore QB \perp DB$,

$\therefore \angle DQB = 90^\circ - \angle QDB = 30^\circ$,

$\therefore DQ = 2DB = 2DC$,

$\therefore D$ 与 P 重合,

$PQ = 2PC$;



(2) 过 B 作 $BH \perp PQ$ 于 H ,

$\therefore AC = 6$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2AC = 12$,

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中由勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6\sqrt{3}$,

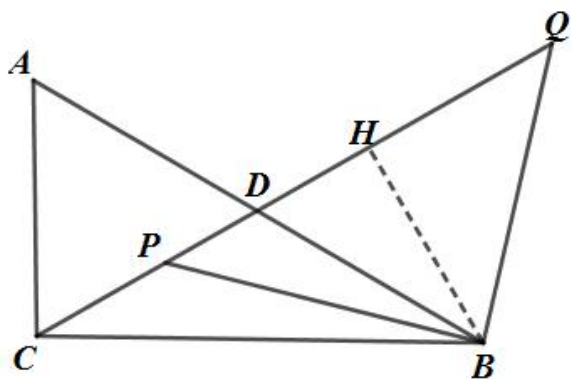
又因为 $\angle HCB = 30^\circ$, $\angle CHB = 90^\circ$,

$\therefore CB = 2BH = 6\sqrt{3}$,

$\therefore BH = 3\sqrt{3}$,

$\therefore \angle PBQ = 90^\circ$, $BP = BQ$,

$\therefore PQ = 2BH = 6\sqrt{3}$;



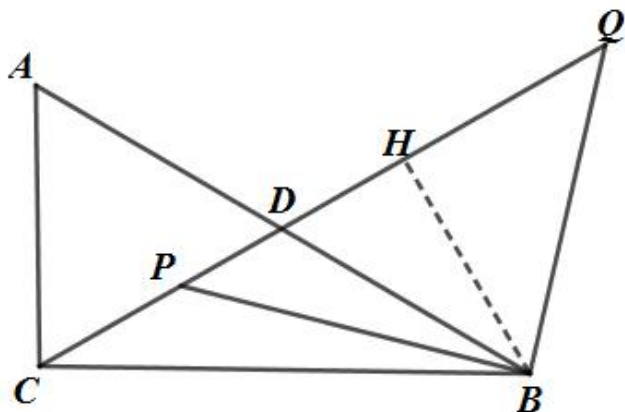
(3) 由 (2) 得 $BH = 3\sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle CBH$ 中, $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 9$,

当 $CP \leq 9$ 时 $PH = 9 - PC = 9 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中由勾股定理得: $PB^2 = PH^2 + BH^2$,

$$y^2=(9-x)^2+27,$$

$$\text{即 } y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} \quad (0 < x \leq 9).$$

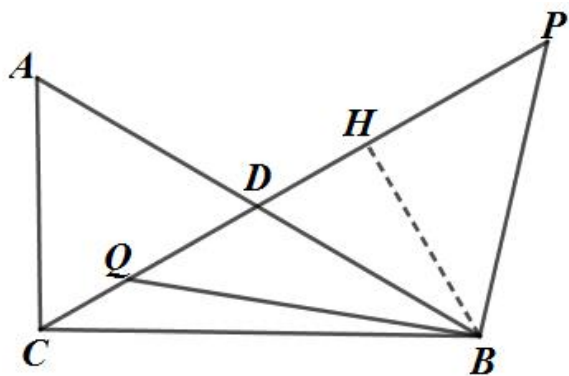


当 $CP > 9$ 时 $PH = PC - 9 = x - 9$,

在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中由勾股定理得: $PB^2 = PH^2 + BH^2$,

$$y^2 = (x-9)^2 + 27,$$

$$\text{即 } y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} \quad (x > 9),$$



【点睛】 本题考查直角三角形性质，勾股定理，等腰直角三角形性质函数关系，掌握直角三角形性质，勾股定理，等腰直角三角形性质函数关系，解题关键是在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中利用勾股定理构造等式求出函数关系.