

2024 学年第一学期初二年级期末考试数学学科试卷

(时间: 100 分钟满分: 100 分)

2025.1

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列代数式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{a^2b}$

B. $\sqrt[3]{2}$

C. $\sqrt{a^2-b^2}$

D. $\sqrt{0.7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义判断即可.

本题考查了最简二次根式, 熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】A. $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$, 不符合题意;

B. $\sqrt[3]{2}$, 不是二次根式, 不符合题意;

C. $\sqrt{a^2-b^2}$, 符合题意;

D. $\sqrt{0.7} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$, 不符合题意;

故选: C.

2. 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上有三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 若 $x_1 > x_2 > 0 > x_3$, 则下列各式正确的是 ()

A. $y_3 > y_1 > y_2$

B. $y_3 > y_2 > y_1$

C. $y_1 > y_2 > y_3$

D. $y_1 > y_3 > y_2$

【答案】B

【解析】

【分析】先根据函数解析式中的比例系数 k 确定函数图像所在的象限, 再根据各象限内点的坐标特点及函数的增减性解答.

此题考查的是反比例函数图像上点的坐标特点及平面直角坐标系中各象限内点的坐标特点, 比较简单, 熟练掌握性质是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上有三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$,

$\therefore$ 此函数图像在二、四象限, 且在每个象限内 y 随 x 的增大而增大,

$\because x_1 > x_2 > 0 > x_3$,

$\therefore$ 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在第四象限, (x_3, y_3) 在第二象限,

$\therefore y_1 < y_2 < 0, y_3 > 0,$

$\therefore y_1, y_2, y_3$ 的大小关系为 $y_3 > y_2 > y_1$.

故选: B.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 的一个根为 0, 则 k 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. 1 或 -1

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的定义与解, 解一元二次方程, 将 $x=0$ 代入原方程可得出关于 k 的一元二次方程, 解之即可得出 k 的值, 根据一元二次方程的定义可得出 $k-1 \neq 0$, 进而可得出 $k \neq 1$, 据此可得答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 的一个根为 0,

$\therefore$ 将 $x=0$ 代入 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$, 得: $k^2 - 1 = 0$,

解得 $k_1 = -1, k_2 = 1$.

$\because$ 方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 是一元二次方程,

$\therefore k-1 \neq 0$,

$\therefore k \neq 1$.

$\therefore k = -1$

故选: C.

4. 下列长度的三条线段能组成直角三角形的是 ()

A. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

B. 4, 5, 6

C. 7, 14, 15

D. 7, 24, 25

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的逆定理, 熟练掌握定理是解题的关键.

利用勾股定理的逆定理, 进行计算逐一判断即可解答.

【详解】 解: $\because \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{5}\right)^2$,

∴ 三角形不是直角三角形，故 A 选项不符合题意；

$$\because 4^2 + 5^2 \neq 6^2,$$

∴ 三角形不是直角三角形，故 B 选项不符合题意；

$$\because 7^2 + 14^2 \neq 15^2,$$

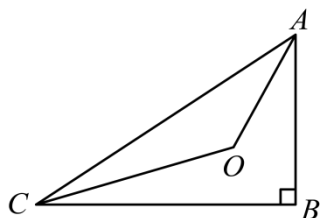
∴ 三角形不是直角三角形，故 C 选项不符合题意；

$$\because 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2,$$

∴ 三角形是直角三角形，故 D 选项符合题意；

故选：D.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点，且 $BC = 8\text{cm}, AC = 10\text{cm}$ ，则点 O 到边 AB 的距离为（ ）



A. 2cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 5cm

【答案】A

【解析】

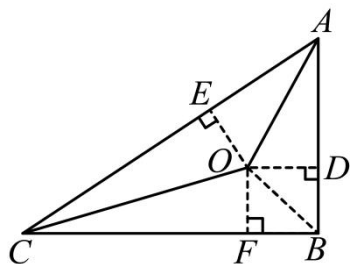
【分析】过点 O 作 $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，垂足分别为 D ， E ， F ，得到 $OD = OE = OF$ ，利用勾股定理，直角三角形的面积公式，图形的面积和解答即可.

本题考查了角的平分线性质的应用，勾股定理，直角三角形的面积性质，熟练掌握性质和定理是解题的关键.

【详解】解：过点 O 作 $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，垂足分别为 D ， E ， F ，

∵ 点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点，

$$\therefore OD = OE = OF,$$



$$\because \angle B = 90^\circ, \quad BC = 8\text{cm}, \quad AC = 10\text{cm},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6(\text{cm}), \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24(\text{cm}^2),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} CB \cdot OF = 24,$$

$$\therefore OD = \frac{24 \times 2}{AB + BC + CA} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2(\text{cm}),$$

故选：A.

6. 已知下列命题中：

- ①有两条边分别相等的两个直角三角形全等；
- ②顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等；
- ③如果 $a^2 = b^2$ ，那么 $a = b$ ；
- ④两个三角形中，两边及其中一边的对角对应相等，则这两个三角形全等.

其中假命题的个数是（ ）个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定，等腰三角形的性质，平方的意义，熟练掌握全等三角形的判定，等腰三角形的性质是解题的关键. 根据全等三角形的判定，等腰三角形的性质，平方的意义，解答即可.

【详解】解：①有两条边分别相等的两个直角三角形不一定全等，若一个直角三角形的斜边等于另一个直角三角形的直角边，这样的两个直角三角形一定不全等，

故本命题是假命题；

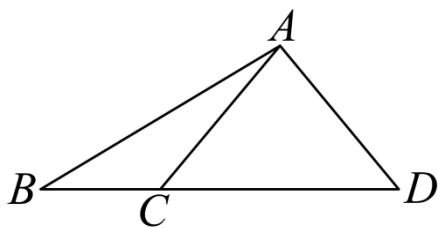
②顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等，由顶角相等一定得到它们的底角分别对应相等，利用角角边或角边角都能判定全等，

故本命题是真命题；

③如果 $a^2 = b^2$ ，那么 $a = \pm b$ ，

故本命题是假命题；

④两个三角形中，两边与及其中一边的对角对应相等，如图，



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中, $AB = AB$, $AC = AD$, $\angle D = \angle D$, 但 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABC$ 不全等,
故本命题是假命题;

故假命题的个数是 3 个,

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $0 \leq x < 4$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的定义域, 解一元一次不等式组, 根据题意列出不等式组是解题的关键.

根据题意得到 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$, 求出 $0 \leq x < 4$, 即可得到函数 $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域.

【详解】 解: 根据题意得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$,

解得: $0 \leq x < 4$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域是 $0 \leq x < 4$,

故答案为: $0 \leq x < 4$.

8. $2-\sqrt{5}$ 的倒数_____.

【答案】 $-2-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据题意列出 $2-\sqrt{5}$ 的倒数, 然后分母有理化即可.

【详解】 $2-\sqrt{5}$ 的倒数为 $\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -2-\sqrt{5}$

所以答案为 $-2-\sqrt{5}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式中的分母有理化，熟练掌握分母有理化的步骤和方法是关键.

9. 方程 $x^2 - 16 = 0$ 的解为_____.

【答案】 $x_1 = 4, x_2 = -4$

【解析】

【分析】 本题考查了直接开平方法求解方程的根，选择适当解方程的方法是解题的关键. 利用直接开平方法计算即可.

【详解】 解： $\because x^2 - 16 = 0$,

$$\therefore x^2 = 16,$$

$$\therefore x = \pm 4,$$

$$\text{即 } x_1 = 4, x_2 = -4.$$

故答案为： $x_1 = 4, x_2 = -4$.

10. 若函数 $y = (k-1)x (k \neq 1)$ ，当自变量取值增加 2 的时候，函数值减少 3，那么 k 的值是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的性质，求函数值，熟练掌握求函数值是解题的关键. 利用特殊值法解答即可.

【详解】 解：根据题意，当 $x = m$ 时， $y = m(k-1)$ ；当 $x = m+2$ 时， $y = (m+2)(k-1)$ ，

根据题意，得 $m(k-1) = (m+2)(k-1) + 3$ ，

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为： } -\frac{1}{2}.$$

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】 根据方程的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0$ 且 $m \neq 0$ ，计算即可.

本题考查了根的判别式，熟练掌握判别式是解题的关键.

【详解】 $\because$ 一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

解得 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$,

故答案为: $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$.

12. 判断命题的真假: 命题“同位角相等”是_____命题.

【答案】假

【解析】

【分析】本题考查的是命题, 熟练判断条件和结论是关键.

在判断命题为假命题时, 只需找出反例即可.

【详解】解: 条件是“如果两个角是同位角”, 结论是“这两个角相等”. 两条直线不平行时, 被第三条直线截出的同位角就不相等. 此命题是错误的, 故是假命题.

故答案为: 假.

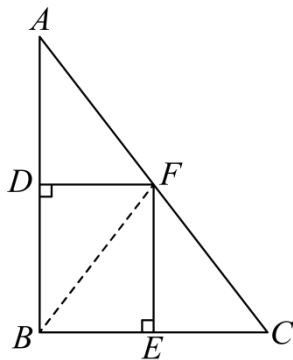
13. 如果一个三角形的两边的垂直平分线交点在第三边上, 则这个三角形的最大角的度数是_____°.

【答案】90

【解析】

【分析】本题考查了垂直平分线的性质, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 根据垂直平分线的性质, $AF=BF$, $BF=CF$, 再根据等边对等角的性质, 得到 $\angle A = \angle ABF$, $\angle C = \angle CBF$, 然后利用三角形内角和定理, 即可得到答案.

【详解】解: 如图, 连接 BF ,



由题意可知, DF 垂直平分 AB , EF 垂直平分 BC , DF 、 EF 交点 F 在 AC 上,

$$\therefore AF = BF, \quad BF = CF,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABF, \quad \angle C = \angle CBF,$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABF + \angle CBF + \angle C = 2(\angle ABF + \angle CBF) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle CBF = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这个三角形最大角的度数是 90° ,

故答案为: 90.

14. 已知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, 则 $f(0) =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了函数值的计算, 熟练掌握计算是解题的关键.

当 $x=0$ 时, 求函数值即可.

【详解】 解: 当 $x=0$ 时, $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$,

故答案为: -1.

15. 到点 $P(-3,0)$ 的距离等于 2 的点的轨迹是_____.

【答案】 以 P 为圆心, 2 为半径的圆.

【解析】

【分析】 根据圆的定义可得答案.

【详解】 到点 $P(-3,0)$ 的距离等于 2 的点的轨迹是以 P 为圆心, 2 为半径的圆.

故答案为: 以 P 为圆心, 2 为半径的圆.

【点睛】 本题考查圆的定义, 熟记圆的定义是解题的关键.

16. 在描述一个反比例函数的性质时, 甲同学说: “从这个反比例函数图像上任意一点向 x 轴, y 轴作垂线, 与两坐标轴所围成的矩形面积为 2024.” 根据甲同学所描述, 此反比例函数的解析式是_____.

【答案】 $y = \pm \frac{2024}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质, 反比例函数图像上点的坐标特征, 熟练掌握以上知识是解题的关键, 根据甲同学的说法确定 $|k| = 2024$, 得到反比例函数解析式即可.

【详解】 解: 根据题意, 满足甲同学说法的反比例函数解析式为: $y = \pm \frac{2024}{x}$,

故答案为: $y = \pm \frac{2024}{x}$.

17. 在平面直角坐标系 xOy 内, $A(1,a)$ 在函数 $y=2x$ 上, $B(b,2)$ 在函数 $y=\frac{4}{x}$ 上, P 为 x 轴上一动点,

$AP+BP$ 值最小时, 点 P 的坐标为_____.

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】根据 $A(1, a)$ 在函数 $y = 2x$ 上, 得到 $a = 2$, 于是点 $A(1, 2)$; $B(b, 2)$ 在函数 $y = \frac{4}{x}$ 上, 得 $b = \frac{4}{2} = 2$, 于是点 $B(2, 2)$, 确定点 $A(1, 2)$ 关于 x 轴的对称点坐标为 $A'(1, -2)$, 连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P , 此时的交点 P 就是 $AP + BP$ 值最小时的位置, 利用待定系数法确定解析式, 计算与 x 轴的交点即可.

【详解】解: $\because A(1, a)$ 在函数 $y = 2x$ 上,

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore \text{点 } A(1, 2);$$

$$\because B(b, 2) \text{ 在函数 } y = \frac{4}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore b = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\therefore \text{点 } B(2, 2),$$

$\therefore$ 点 $A(1, 2)$ 关于 x 轴的对称点坐标为 $A'(1, -2)$, 连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P , 此时的交点 P 就是 $AP + BP$ 值最小时的位置,

设直线 $A'B$ 的解析式 $y = kx + b$, 根据题意, 得

$$\begin{cases} 2k + b = 2 \\ k + b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 4 \\ b = -6 \end{cases},$$

故 $A'B$ 解析式为 $y = 4x - 6$,

当 $y = 0$ 得 $4x - 6 = 0$,

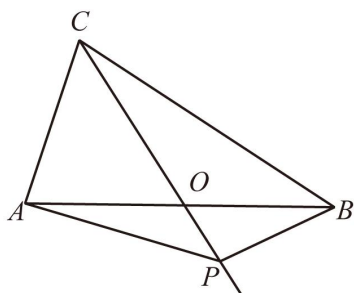
$$\text{解得 } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{故点 } P\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

故答案为: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

【点睛】 本题考查了图象过点的意义, 待定系数法求解析式, 轴对称求线段和最小, 图象与 x 轴的交点, 熟练掌握待定系数法, 线段和最小确定是解题的关键.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=4$, $AO=BO$, P 是射线 CO 上的一个动点, $\angle AOC=60^\circ$, 则当 $\triangle PAB$ 为直角三角形时, AP 的长为_____.



【答案】 2 或 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题根据题意分三种情况进行分类求解, 结合三角函数, 等边三角形的性质即可解题.

【详解】 解: 当 $\angle APB=90^\circ$ 时 (如图 1),

$$\because AO=BO,$$

$$\therefore PO=BO,$$

$$\because \angle AOC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP=60^\circ,$$

$\therefore \triangle BOP$ 为等边三角形,

$$\because AB=BC=4,$$

$$\therefore AP = AB \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

当 $\angle ABP=90^\circ$ 时 (如图 2),

$$\because \angle AOC=\angle BOP=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BPO=30^\circ,$$

$$\therefore BP = \frac{OB}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

在直角三角形 ABP 中,

$$AP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7},$$

如图 3, $\because AO=BO, \angle APB=90^\circ$,

$$\therefore PO=AO,$$

$$\because \angle AOC=60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOP$ 为等边三角形,

$$\therefore AP=AO=2,$$

故答案为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ 或 2.

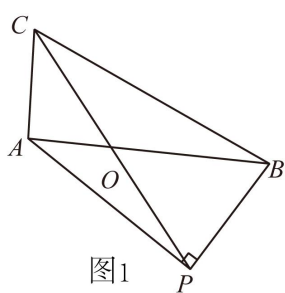


图1

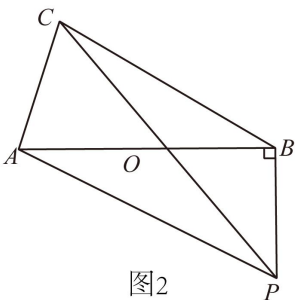


图2

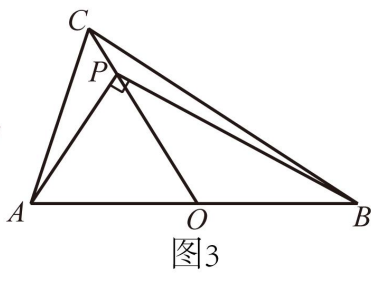


图3

【点睛】考点：勾股定理.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19–20 题各 8 分, 第 21 题 5 分, 第 22 题 5 分, 第 23 题 6 分, 第 24 题 12 分, 第 25 题 14 分, 共 58 分)

19. 计算:

$$(1) \sqrt{24} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{18} + \sqrt{32};$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

【答案】(1) $6\sqrt{2}-3$

(2) $2\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】(1) 关键二次根式加减乘除的混合运算计算即可;

(2) 根据二次根式混合运算, 分母有理化计算即可.

本题考查了二次根式的混合运算, 分母有理化, 熟练掌握运算是解题的关键.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{24} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{18} + \sqrt{32}$$

$$= 2\sqrt{2} - 3 + 4\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2} - 3.$$

【小问 2 详解】

$$) \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{3} + 1 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 1.$$

20. 解方程:

$$(1) (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0;$$

$$(2) 5x(x-1) = 3(1-x).$$

【答案】 (1) $x_1 = -3, x_2 = 7$

$$(2) x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = 1$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 把 $x-3$ 看做整体，再运用因式分解法进行解方程，即可作答.

(2) 先移项，再运用因式分解法进行解方程，即可作答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0,$$

$$\therefore [(x-3)+6][(x-3)-4] = 0,$$

$$\text{则 } (x+3)(x-7) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -3, x_2 = 7;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because 5x(x-1) = 3(1-x),$$

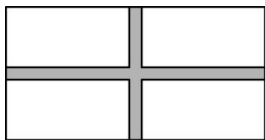
$$\therefore 5x(x-1) - 3(1-x) = 0,$$

$$\text{则 } 5x(x-1) + 3(x-1) = 0,$$

$$(5x+3)(x-1)=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = 1.$$

21. 某校的分校区规划时决定在长为 32 米, 宽为 20 米的长方形草坪中央修筑同样宽的两条互相垂直的小路, 把长方形草坪分割成同样面积的四块小草坪, 每块小草坪的面积为 135 平方米, 问道路的宽是多少米?



【答案】 道路的宽度为 2 米.

【解析】

【详解】 试题分析: 把四块耕地拼到一起正好构成一个矩形, 矩形的长和宽分别是 $(32-x)$ 和 $(20-x)$, 根据矩形的面积公式, 列出关于道路宽的方程求解.

试题解析: 设道路的宽度为 x 米. 由题意得,

$$(32-x)(20-x)=135 \times 4$$

整理得,

$$x^2-52x+100=0$$

$$x_1=2, x_2=50 \text{ 不合题意, 舍去}$$

$$\therefore x=2.$$

答: 道路的宽度为 2 米.

22. 已知函数 $y = y_1 - y_2$, 其中 y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例, 且当 $x=1$ 时, $y=3$; 当 $x=3$ 时, $y=5$. 求 y 关于 x 的函数解析式.

【答案】 $y = 2x - \frac{1}{x-2}$

【解析】

【分析】 根据 y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例, 不妨设 $y_1 = k_1x$, $y_2 = \frac{k_2}{x-2}$, 结合

$y = y_1 - y_2$ 得 $y = k_1x - \frac{k_2}{x-2}$, 根据题意, 构造方程组解答即可.

本题考查了成正比, 成反比的意义, 解方程组, 熟练掌握解方程组是解题的关键.

【详解】 解: $\because y_1$ 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例,

$$\text{不妨设 } y_1 = k_1x, y_2 = \frac{k_2}{x-2},$$

$$\therefore y = y_1 - y_2,$$

$$\therefore y = k_1 x - \frac{k_2}{x-2},$$

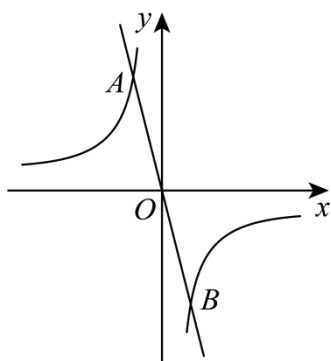
$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, } y=3; \text{ 当 } x=3 \text{ 时, } y=5.$$

$$\therefore \begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ 3k_1 - k_2 = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{故 } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式 } y = 2x - \frac{1}{x-2}.$$

23. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 内, 函数 $y = ax (a \neq 0)$ 和 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 交于 A 、 B 两点, 已知 $A(-1, 4)$.



(1) 求点 B 的坐标;

(2) 点 C 在坐标轴上, 且 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $B(1, -4)$

(2) $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$ 或 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图象的中心对称性解答即可;

(2) 当点 C 在 x 轴上时, 设 $C(m, 0)$, 根据 $\angle ACB = 90^\circ$, 利用两点间距离公式, 勾股定理解答即可; 当点 C 在 y 轴上时, 设 $C(0, n)$, 根据 $\angle ACB = 90^\circ$, 利用两点间距离公式, 勾股定理解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 函数 $y = ax (a \neq 0)$ 和 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 交于 A 、 B 两点, $A(-1, 4)$.

根据图象的中心对称性, 得 $B(1, -4)$.

【小问 2 详解】

解: 当点 C 在 x 轴上时, 设 $C(m, 0)$, 且 $A(-1, 4)$, $B(1, -4)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4-4)^2} = 2\sqrt{17}, \quad AO^2 = (-1-0)^2 + (4-0)^2 = 17,$$

$$BO^2 = (1-0)^2 + (-4-0)^2 = 17,$$

$$\therefore AO = OB,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{17},$$

$$\therefore m = \sqrt{17} \text{ 或 } m = -\sqrt{17},$$

故点 C 的坐标为 $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$;

当点 C 在 y 轴上时, 设 $C(0, n)$, 且 $OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{17}$,

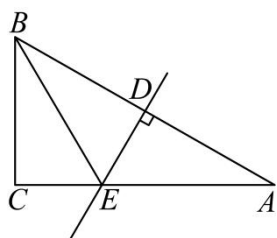
$$\therefore n = \sqrt{17} \text{ 或 } n = -\sqrt{17},$$

故点 C 的坐标为 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$.

故点 C 的坐标为 $(\sqrt{17}, 0)$ 或 $(-\sqrt{17}, 0)$ 或 $(0, \sqrt{17})$ 或 $(0, -\sqrt{17})$.

【点睛】 本题考查了图象的对称性质, 两点间距离公式, 直角三角形性质, 图象的性质, 熟练掌握直角三角形的性质, 公式是解题的关键.

24. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, 点 D 是斜边 AB 中点, 作 $DE \perp AB$, 交直线 AC 于点 E .



(1) 若 $\angle A = 30^\circ$, 求线段 CE 的长;

(2) 当点 E 在线段 AC 上时, 设 $BC = \sqrt{x}$, $CE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式;

(3) 若 $CE = 2$, 求 BC 的长.

【答案】 (1) 2 (2) $y = -\frac{1}{12}x + 3 (0 \leq x \leq 36)$

(3) $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 (1) 根据点 D 是斜边 AB 中点, $DE \perp AB$, 得到 DE 是线段 AB 的垂直平分线, 于是得到 $EA = EB$,

$\angle EBA = \angle A$ ，结合 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，得到 $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle EBA = \angle A = \angle CBE = 30^\circ$ ，于是得到 $EA = EB = 2CE$ ，根据 $AC = 6$ 得线段 $CE + EA = AC = 6$ ，解答即可；

(2) 根据题意，得 $EA = EB$ ，且 $BC = \sqrt{x}$ ， $CE = y$ ，结合 $CE + EA = AC = 6$ ，得到

$EA = EB = 6 - CE = 6 - y$ ，利用勾股定理，解答即可；

(3) 根据 $CE = 2$ ，分点 E 在 AC 上或延长线上，得到 $EA = EB = 6 - CE = 4$ 或 $EA = EB = 6 + CE = 8$ ，利用勾股定理求 BC 的长.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 D 是斜边 AB 中点， $DE \perp AB$ ，

$\therefore DE$ 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore EA = EB$ ， $\angle EBA = \angle A$ ，

$\because \angle A = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle EBA = \angle A = \angle CBE = 30^\circ$ ，

$\therefore EA = EB = 2CE$ ，

$\because AC = 6$ ，

$\therefore CE + EA = AC = 6$ ，

$\therefore CE + 2CE = 6$ ，

解得 $CE = 2$ 。

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 D 是斜边 AB 中点， $DE \perp AB$ ，

$\therefore DE$ 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore EA = EB$ ，

$\because BC = \sqrt{x}$ ， $CE = y$ ， $CE + EA = AC = 6$ ，

$\therefore EA = EB = 6 - CE = 6 - y$ ，

根据勾股定理，得 $(6 - y)^2 = (\sqrt{x})^2 + y^2$ ，

解得 $y = -\frac{1}{12}x + 3$ 。

故 y 关于 x 的函数解析式 $y = -\frac{1}{12}x + 3$ ($0 \leq x \leq 36$)。

【小问 3 详解】

解：如图 2，当点 E 在 AC 上，

$$\therefore CE = 2,$$

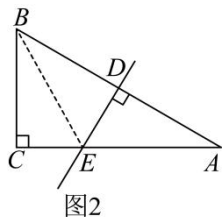


图2

$$\therefore EA = EB = 6 - CE = 4,$$

$$\therefore BC = \sqrt{EB^2 - CE^2} = 2\sqrt{3}.$$

故 BC 的长为 $2\sqrt{3}$.

如图 3, 当点 E 在 AC 的延长线上,

$$\therefore CE = 2,$$

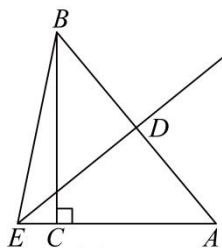


图3

$$\therefore EA = EB = 6 + CE = 8,$$

$$\therefore BC = \sqrt{EB^2 - CE^2} = 2\sqrt{15}.$$

故 BC 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{15}$.

【点睛】 本题考查了线段垂直平分线的判定和性质, 勾股定理, 直角三角形的性质, 函数的应用, 熟练掌握勾股定理, 直角三角形的性质, 线段垂直平分线的判定和性质是解题的关键.

25. **【背景介绍】** 勾股定理是几何学中的明珠, 充满着魅力. 千百年来, 人们对它的证明从未停止过探索, 其中有著名的数学家, 也有业余数学爱好者. 向常春在 1994 年构造发现了一个新的证法.

【小试牛刀】 (1) 把两个全等的直角三角形如图 1 放置, $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$, 已知 $AB = AD = a$,

$AE = BC = b, DE = AC = c, AC \perp DE$. 试证明 $a^2 + b^2 = c^2$.

【知识运用】 (2) 如图 2, 铁路上 A 、 B 两点 (看作直线上的两点) 相距 24 千米, C 、 D 为两个村庄 (看作两个点), $AD \perp AB, BC \perp AB$, 垂足分别为 A 、 B , $AD = 23$ 千米, $BC = 16$ 千米, 则两个村庄的距离为_____千米 (直接写答案).

(3) 在 (2) 的条件下, 要在 AB 上建造一个供应站 P , 使得 $PC = PD$, 求 AP 的长.

【知识迁移】(4) 借助上面的思考过程与几何模型, 求代数式 $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{(16-x)^2+81}$ 的最小值 ($0 < x < 16$).

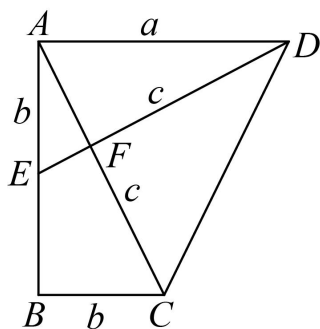


图 1

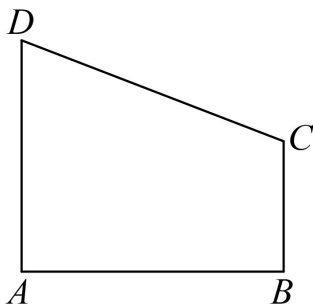


图 2

【答案】(1) 见解析 (2) 25 千米 (3) 6.3125 千米 (4) 20.

【解析】

【分析】(1) 利用梯形面积, 直角三角形的面积等证明即可.

(2) 连接 CD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E , 结合 $AD \perp AB, BC \perp AB$, 得到矩形 $CEAB$, 结合 $AB = 24$ 千米, $AD = 23$ 千米, $BC = 16$ 千米, 得到 $CE = AB = 24$ 千米, $AE = BC = 16$ 千米, $DE = AD - AE = AD - BC = 7$ 千米, 利用勾股定理 $CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 25$ 解答即可.

(3) 作 CD 的垂直平分线, 交 AB 与点 P , 连接 PC, PD , 则 $PC = PD$, 设 $AP = x$, 则 $PB = AB - AP = (24 - x)$ 千米, 由 $PC^2 = PD^2$, 根据勾股定理, 得 $PA^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2$, 解答即可.

(4) 根据题意, 令 $AB = 16$, $AD = 9$, $BC = 3$, 设 $BP = x$, 则 $AP = AB - BP = (16 - x)$, 根据勾股定理, 得 $PC = \sqrt{x^2 + 9}, PD = \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$,

要求 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$ 的最小值就转化为 $PC + PD$ 的和的最小值, 于是延长 CB 到点 F , 使得 $CB = BF$, 连接 FD , 交 AB 于点 P , 此时的点 P 位置就是使得 $PC + PD$ 和最小, 过点 F 作 $FE \parallel AB$ 交 DA 的延长线于点 E , 利用勾股定理解答即可.

【详解】(1) 连接 CE ,

$\because \triangle AED \cong \triangle BCA$, $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$, $AB = AD = a$, $AE = BC = b, DE = AC = c$ $AC \perp DE$.

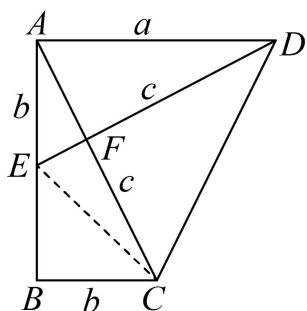
$\therefore BE = AB - AE = a - b, AD \parallel BC$, $S_{\text{四边形}AECD} = S_{\triangle AED} + S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}c^2$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab$, $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}(a - b) \cdot b = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2$,

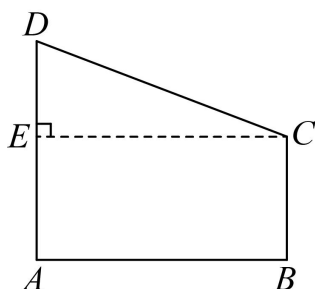
$$\because S_{\text{四边形}AECD} = S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab - \left(\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$



(2) 解: 连接 CD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ,



$$\because AD \perp AB, BC \perp AB,$$

$$\therefore \text{矩形 } CEAB,$$

$$\therefore AB = 24 \text{ 千米}, AD = 23 \text{ 千米}, BC = 16 \text{ 千米},$$

$$\therefore CE = AB = 24 \text{ 千米}, AE = BC = 16 \text{ 千米}, DE = AD - AE = AD - BC = 7 \text{ 千米},$$

$$\therefore CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 25 \text{ (千米)},$$

故答案为: 25.

(3) 解: 作 CD 的垂直平分线, 交 AB 与点 P , 连接 PC, PD , 则 $PC = PD$,

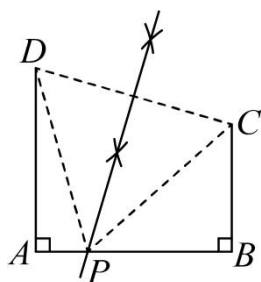
设 $AP = x$, 则 $PB = AB - AP = (24 - x)$ 千米,

由 $PC^2 = PD^2$, 根据勾股定理, 得 $PA^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2$,

$$\therefore x^2 + 23^2 = (24 - x)^2 + 16^2,$$

$$\therefore x^2 + 23^2 = 24^2 - 48x + x^2 + 16^2,$$

解得 $x = 6.3125$,



故 AP 的长为 6.3125 千米.

(4) 解: 根据题意, 令 $AB=16$, $AD=9$, $BC=3$, 设 $BP=x$, 则 $AP=AB-BP=(16-x)$,

根据勾股定理, 得 $PC=\sqrt{x^2+9}$, $PD=\sqrt{(16-x)^2+81}$,

要求 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(16-x)^2+81}$ 的最小值就转化为 $PC+PD$ 的和的最小值,

$\therefore$ 延长 CB 到点 F , 使得 $CB=BF$,

连接 FD , 交 AB 于点 P , 此时的点 P 位置就是使得 $PC+PD$ 和最小,

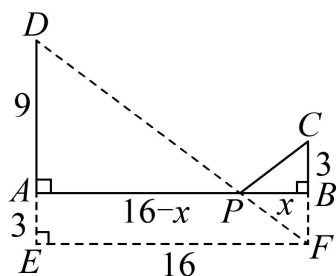
过点 F 作 $FE \parallel AB$ 交 DA 的延长线于点 E ,

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 矩形,

$\therefore FE=AB=24$, $AE=BF=BC=3$,

$\therefore DF=\sqrt{DE^2+FE^2}=\sqrt{(AD+AE)^2+16^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$,

故 $PC+PD$ 的最小值为 20,



故代数式 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(16-x)^2+81}$ 的最小值为 20.

【点睛】 本题考查了勾股定理的证明, 勾股定理的应用, 矩形的判定和性质, 线段和最小的计算, 线段垂直平分线的应用, 熟练掌握勾股定理, 线段和的最小计算, 矩形的判定和性质是解题的关键.