

2024 学年第一学期八年级数学期末检测试卷

(完卷时间: 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题;
2. 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出解题的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

1. 下列各组二次根式中, 不是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{45}$ 和 $\sqrt{20}$ B. $\frac{1}{3}\sqrt{8}$ 和 $\frac{1}{5}\sqrt{2}$ C. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{18}$ D. $\sqrt{24}$ 和 $\sqrt{54}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义: 将二次根式化成最简二次根式后, 被开方数相同, 这样的二次根式叫做同类二次根式. 先利用二次根式化简各数, 再根据同类二次根式的定义逐项判断即可解答.

【详解】解: A. $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 的被开方数相同, 所以两数是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

B. $\frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ 与 $\frac{1}{5}\sqrt{2}$ 的被开方数相同, 所以它们是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 所以它们不是同类二次根式, 故本选项符合题意;

D. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ 的被开方数相同, 所以它们是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

故选: C.

2. 下列方程中, 属于一元二次方程的是 ()

- A. $x^2 - 16 = 0$ B. $3x^2 - 4y = 0$
C. $x^2 + \frac{1}{x} + 1 = 0$ D. $(x+1)(x+4) = x(x+2)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 根据一元二次方程的定义逐项分析即可得解, 熟练掌握一元二次方程的定义是解此题的关键.

【详解】解：A、 $x^2 - 16 = 0$ 符合一元二次方程的定义，故符合题意；

B、 $3x^2 - 4y = 0$ 中含有两个未知数，故不是一元二次方程，故不符合题意；

C、 $x^2 + \frac{1}{x} + 1 = 0$ 不是整式方程，故不是一元二次方程，故不符合题意；

D、化简得 $3x + 4 = 0$ ，故不是一元二次方程，故不符合题意；

故选：A.

3. 若正比例函数 $y = (2m - 1)x$ 的图象经过第二、四象限，则 m 的取值范围是 ()

A. $m \neq \frac{1}{2}$

B. $m > \frac{1}{2}$

C. $m < \frac{1}{2}$

D. $m \geq \frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数的图象与所经过的象限的问题. 根据正比例函数的图象经过第二、四象限列出关于 m 的不等式，求出 m 的取值范围即可.

【详解】解：∵ 正比例函数 $y = (2m - 1)x$ 的图象经过第二，四象限，

$$\therefore 2m - 1 < 0,$$

$$\therefore m < \frac{1}{2}.$$

故选：C.

4. 下列命题中，逆命题是真命题的为 ()

A. 直角都相等

B. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $a + b > 0$

C. 全等三角形的面积相等

D. 直角三角形的两个锐角互余

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查命题的逆命题以及判定命题的真假. 分别写出各命题的逆命题，再判断即可.

【详解】解：A、逆命题为：相等的两个角是直角，为假命题，不符合题意；

B、逆命题为：若 $a + b > 0$ ，则 $a > 0$ ， $b > 0$. 取 $a = 3$ ， $b = -2$ ，显然为假命题，不符合题意；

C、逆命题为：面积相等的三角形一定全等. 显然为假命题，不符合题意；

D、逆命题为：若锐角互余的三角形，一定是直角三角形. 是真命题，符合题意.

故选：D.

二、填空题 (本大题共 14 题, 每题 2 分, 满分 28 分)

5. 二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义的条件是: _____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 根据二次根式的被开放数为非负数可得 $2x-3 \geq 0$, 计算即可得解, 熟练掌握二次根式有意义的条件是解此题的关键.

【详解】 解: 根据题意可得: $2x-3 \geq 0$,

解得: $x \geq \frac{3}{2}$,

故答案为: $x \geq \frac{3}{2}$.

6. 已知 $f(x) = \frac{x}{3x+1}$, 则 $f(-1) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数的值, 将 $x = -1$ 代入 $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ 计算即可得解.

【详解】 解: 由题意可得 $f(-1) = \frac{-1}{3 \times (-1) + 1} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

7. 化简: $\sqrt{18a^3} =$ _____;

【答案】 $3a\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质与化简, 根据二次根式的性质, 将被开方数里开得尽方的因数或因式开出来即可.

【详解】 解: $\sqrt{18a^3} = \sqrt{9 \times 2 \times a^2 \times a} = 3a\sqrt{2a}$.

故答案为: $3a\sqrt{2a}$

8. 不等式 $2x-1 < \sqrt{3}x$ 的解集为: _____.

【答案】 $x < 2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了求一元一次不等式的解集，涉及了分母有理化，由题意得 $x < \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ ，即可

求解；

【详解】 解： $2x-1 < \sqrt{3}x$ ，

$$2x - \sqrt{3}x < 1,$$

$$(2 - \sqrt{3})x < 1,$$

$$x < \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

故答案为： $x < 2 + \sqrt{3}$

9. 方程 $x^2 = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法，常用的方法有直接开平方法，配方法，因式分解法，求根公式法，熟练掌握各种方法是解答本题的关键.

移项后再因式分解求得两根即可.

【详解】 解： $x^2 - x = 0$ ，

$$\therefore x(x-1) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0,$$

解得： $x = 0, x = 1$ ，

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = 1$.

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = 1$.

10. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 3xy - y^2 =$ _____.

【答案】 $2 \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

【解析】

【分析】 首先解关于 x 的方程，进而分解因式得出即可.

【详解】 当 $2x^2 - 3xy - y^2 = 0$ 时，

解得: $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}y$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}y$,

则 $2x^2 - 3xy - y^2 = 2 \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

故答案为 $2 \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

【点睛】此题主要考查了实数范围内分解因式，正确解方程是解题关键.

11. 已知 $A(-3, y_1)$ 、 $B(-1, y_2)$ 、 $C(3, y_3)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是：_____. (用“<”连接).

【答案】 $y_2 < y_1 < y_3$

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的图象与性质，由反比例函数解析式可得函数的图象在第一、三象限，且每个象限内， y 随着 x 的增大而减小，结合 $-3 < -1 < 0 < 3$ 即可得解，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解此题的关键.

【详解】解：∵ 函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$,

∴ 函数的图象在第一、三象限，且每个象限内， y 随着 x 的增大而减小，

∵ $-3 < -1 < 0 < 3$,

∴ $y_2 < y_1 < y_3$,

故答案为: $y_2 < y_1 < y_3$.

12. 已知平面直角坐标系内两点 $A(3, -1)$ 和 $B(-1, 2)$ ，则 $AB =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了直角坐标系内点的坐标，两点的间的距离公式，熟记两点间的距离公式是解题的关键. 利用两点间的距离公式求解即可.

【详解】解：∵ $A(3, -1)$ 和 $B(-1, 2)$,

$$\therefore AB = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (-1 - 2)^2} = 5,$$

故答案为: 5.

13. 到点 A 的距离等于 2 厘米的点的轨迹是_____.

【答案】以点 A 为圆心，2 厘米长为半径的圆

【解析】

【分析】本题考查了轨迹，主要是对圆的轨迹定义的考查，比较简单。根据圆的定义解答。

【详解】解：到点 A 的距离等于 2 厘米的点的轨迹是：以点 A 为圆心，2 厘米长为半径的圆。

故答案为：以点 A 为圆心，2 厘米长为半径的圆。

14. 已知等腰三角形一腰上的高线长等于腰长的一半，则这个等腰三角形的顶角的度数为_____

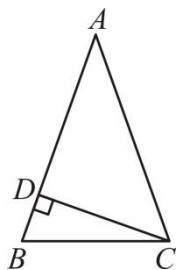
【答案】 30° 或 150°

【解析】

【分析】根据题意可作图进行分类求解即可。

【详解】解：由题意得：

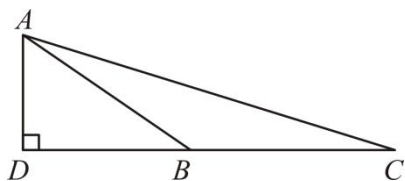
①如图，当 $AB=AC$ ， $CD \perp AB$ 时，



$$\therefore AC=2CD,$$

$$\therefore \angle A=30^\circ;$$

②如图，



$$\therefore AB=BC, AD \perp BC, AB=2AD,$$

$$\therefore \angle ABD=30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC=150^\circ;$$

故答案为 30° 或 150° 。

【点睛】本题主要考查等腰三角形的定义及含 30° 直角三角形的性质，熟练掌握等腰三角形的定义及含 30° 直角三角形的性质是解题的关键。

15. 某种产品原来每件 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为 578 元，如果每次的降价的百分率是 x ，则可列方程：_____。

【答案】 $800(1-x)^2=578$.

【解析】

【分析】 根据等量关系： 原价 $\times$ （1-降价的百分率）²=现在的售价， 把相关数值代入即可.

【详解】 第一次降价后的价格为 $800\times(1-x)$,

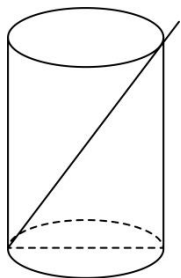
第二次降价后的价格为 $800(1-x)^2$,

可列方程为 $800(1-x)^2=578$.

故答案为 $800(1-x)^2=578$.

【点睛】 此题考查了由实际问题抽象出一元二次方程；得到现在售价的等量关系是解决本题的关键.

16. 如图，一透明圆柱状玻璃杯，从内部测得底面半径为6cm，高为16cm，今有一根长22cm的吸管任意放入杯中，若不计吸管粗细，则吸管露在杯口外的长度最少为_____cm.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查的是勾股定理的应用，解答此类题目的关键是构造出直角三角形，再利用勾股定理解答. 吸管露出杯口外的长度最少，即在杯内最长，可用勾股定理解答.

【详解】 解： 如图所示： ABC 是直角三角形，

$\because$ 底面半径为半径为6cm，高为16cm，

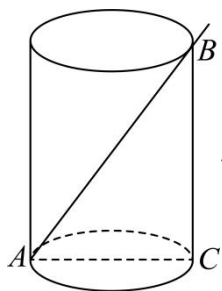
$\therefore AC=12\text{cm}, BC=16\text{cm}$,

由勾股定理得： $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20(\text{cm})$,

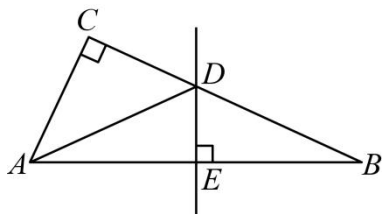
$\therefore$ 吸管露在杯口外的长度最少为： $22-20=2(\text{cm})$,

答： 吸管露在杯口外的长度最少2厘米，

故答案为： 2.



17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 AB 的垂直平分线交边 AB 于点 E ，交边 BC 于点 D ，如果 $\angle B = 28^\circ$ ，那么 $\angle CAD =$ ____ 度.



【答案】 34

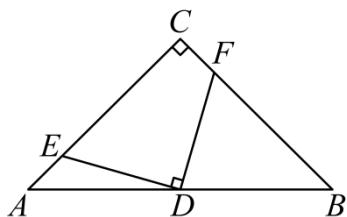
【解析】

【分析】 本题主要考查直角三角形的性质，垂直平分线的性质，等边对等角，根据直角三角形的性质可得 $\angle CAB = 62^\circ$ ，根据垂直平分线的性质可得 $\angle DAB = \angle B = 28^\circ$ ，再根据 $\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB$ 即可求解.

【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 28^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAB = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ ，
 $\because DE$ 垂直平分 AB ，
 $\therefore AD = BD$ ，
 $\therefore \angle DAB = \angle B = 28^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = 62^\circ - 28^\circ = 34^\circ$ ，

故答案为： 34.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $AB = 4$ ， D 是 AB 的中点，点 E 、 F 分别在 AC 、 BC 上运动（点 E 不与点 A 、 C 重合），且始终保持 $\angle EDF = 90^\circ$ ，则 $AE + BF =$ ____.

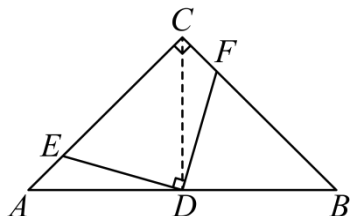


【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理等知识，连接 CD ，证明 $\triangle EDC \cong \triangle FDB$ (ASA)，得出 $CE = BF$ ，则 $AE + BF = AE + CE = AC$ ，然后根据勾股定理求解即可.

【详解】 解：连接 CD .



$\because D$ 是 AB 中点， $AC = BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$ ， $AD = BD = \frac{1}{2}AB = 2$ ， $CD \perp AB$ ， $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ ，

$\therefore CD = AD = 2$ ，

$\because \angle EDC + \angle CDF = 90^\circ$ ， $\angle CDF + \angle FDB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EDC = \angle FDB$ ，

在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle FDB$ 中，

$$\begin{cases} \angle EDC = \angle FDB \\ CD = DB \\ \angle ECD = \angle B = 45^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle EDC \cong \triangle FDB$ (ASA)，

$\therefore CE = BF$ ，

$\therefore AE + BF = AE + CE = AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}$ ，

故答案为： $2\sqrt{2}$.

三、简答题 (本大题共 5 题，每题 6 分，满分 30 分)

19. 计算： $\frac{\sqrt{12}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - (\sqrt{3} - 1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)^0$

【答案】 $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，先逐项化简，再算加减即可.

【详解】 解： 原式 $= \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{3} + 1$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 3.$$

20. 解方程： $y - \frac{y^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}.$

【答案】 $y_1 = 1 + \sqrt{3}, y_2 = 1 - \sqrt{3}.$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先把原方程化为一般式，再利用配方法解方程即可.

【详解】 解： $\because y - \frac{y^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2},$

$$\therefore 2y - y^2 + 1 = -1,$$

$$\therefore y^2 - 2y - 2 = 0,$$

$$\therefore y^2 - 2y = 2,$$

$$\therefore y^2 - 2y + 1 = 3,$$

$$\therefore (y - 1)^2 = 3,$$

$$\therefore y - 1 = \pm\sqrt{3},$$

解得 $y_1 = 1 + \sqrt{3}, y_2 = 1 - \sqrt{3}.$

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m - 1)x + \frac{9}{4}m - 1 = 0$

(1) 如果方程的根的判别式的值为 3，求 m 的值.

(2) 如果方程有实数根，求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $m = -1$

(2) $m \neq 0$ 且 $m \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$

有如下关系：① $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根，② $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根，③ $\Delta < 0$ ，方

程没有实数根.

(1) 根据一元二次方程根的判别式结合题意可得 $-2m+1=3$, 求解即可;

(2) 由题意可得 $m \neq 0$ 且 $\Delta \geq 0$, 计算即可得解.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $\Delta = (3m-1)^2 - 4m\left(\frac{9}{4}m-1\right) = 9m^2 - 6m + 1 - 9m^2 + 4m = -2m + 1$,

$\therefore D=3$,

$\therefore -2m+1=3$,

$\therefore m=-1$;

【小问 2 详解】

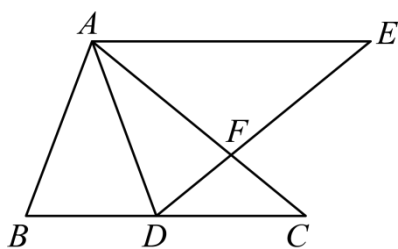
解: 由题意得: $m \neq 0$ 且 $\Delta \geq 0$,

$\therefore m \neq 0$ 且 $-2m+1 \geq 0$

$\therefore m \neq 0$ 且 $m \leq \frac{1}{2}$,

$\therefore m$ 的取值范围是: $m \neq 0$ 且 $m \leq \frac{1}{2}$.

22. 如图, 在 $\triangle ABC$, 点 D 是 BC 上一点, $AD = AB$, $AE = AC$, $AE \parallel BC$, $\angle BAD = \angle CAE$, 连接 DE 交 AC 于点 F .



(1) 求证: $\triangle BAC \cong \triangle DAE$;

(2) 求证: $\triangle DFC$ 是等腰三角形

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质, 平行线的性质, 等腰三角形的判定等知识, 掌握相关知识是解题的关键.

(1) 根据 $\angle BAD = \angle CAE$, 得到 $\angle BAC = \angle DAE$, 再根据 SAS 即可得到 $\triangle BAC \cong \triangle DAE$;

(2) 由 $\triangle BAC \cong \triangle DAE$ ，得到 $\angle C = \angle E$ ，由 $AE \parallel BC$ ，得到 $\angle E = \angle FDC$ ，从而得到 $\angle C = \angle FDC$ ，可得 $FD = FC$ ，即可证明 $\triangle DFC$ 是等腰三角形.

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle BAD = \angle CAE$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle DAE (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle BAC \cong \triangle DAE$ ，

$$\therefore \angle C = \angle E,$$

$$\because AE \parallel BC,$$

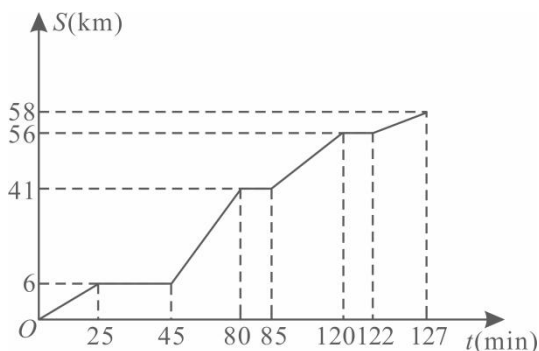
$$\therefore \angle E = \angle FDC,$$

$$\therefore \angle C = \angle FDC,$$

$$\therefore FD = FC,$$

$$\therefore \triangle DFC \text{ 是等腰三角形.}$$

23. 张老师下班后乘坐公共交通回家，她会经历如下几次换乘：先准时（5 点 35 分）乘坐东滩 1 路到陈家镇长江大桥枢纽站，经过短暂的候车，再乘坐申崇二线到五洲大道地铁站，又经过短暂的候车，再乘坐地铁到达曹路站，出站后扫共享单车骑行回家，张老师离学校的距离 $S(\text{km})$ 与她回家所用的时间 $t(\text{min})$ 之间的函数关系如图所示，根据图像回答下列问题：



(1) 张老师回家共用了_____分钟；

(2) 申崇二线的平均速度是每小时_____千米;

(3) 曹路地铁站与张老师家相距_____千米;

【答案】(1) 127 (2) 60

(3) 2

【解析】

【分析】 本题考查了函数与图象, 能根据图象信息做判断是解题的关键.

(1) 根据图象最后对应的时间回答即可;

(2) 求出图象上对应的路程变化量与时间变化量的比值即可求解;

(3) 用张老师的行驶路程减去对应的曹路地铁站对应的路程即可求解.

【小问 1 详解】

解: 依题意, 张老师回家共用了 127 分钟,

故答案为: 127;

【小问 2 详解】

申崇二线的平均速度是: $\frac{41-6}{\frac{1}{60}(80-45)} = 60$ (千米/时);

故答案为: 60.

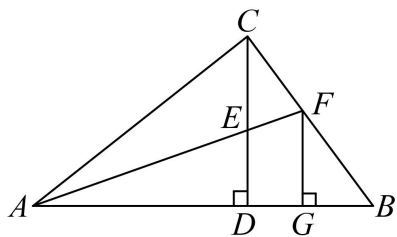
【小问 3 详解】

曹路地铁站与张老师家相距 $58-56=2$ (千米),

故答案为: 2.

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 24 题 8 分, 第 25 题 10 分, 第 26 题 12 分, 满分 30 分)

24. 如图, CD 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高, $\angle BAC$ 的平分线分别交 CD , CB 于点 E , F , $FG \perp AB$, 垂足为 G .



(1) 求证: $\angle CFA = \angle AED$.

(2) 若 $CE = 3$ 厘米, $BG = 4$ 厘米, 求 BC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 8 厘米

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质定理、等腰三角形的判定与性质、勾股定理，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 由垂线的定义可得 $\angle ACF = \angle ADE = 90^\circ$ ，从而得出 $\angle CAF + \angle CFA = 90^\circ$ ， $\angle FAG + \angle AED = 90^\circ$ ，由角平分线的定义可得 $\angle CAF = \angle FAG$ ，即可得证；

(2) 结合对顶角相等可得 $\angle CEF = \angle CFA$ ，由等角对等边可得 $CE = CF = 3$ 厘米，由角平分线的性质定理可得 $FG = CF = 3$ 厘米，再由勾股定理可得 $BF = 5$ 厘米，即可得解.

【小问 1 详解】

证明：由题意得： $AC \perp BC$ ， $CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ACF = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle CFA = 90^\circ, \quad \angle FAG + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle FAG,$$

$$\therefore \angle CFA = \angle AED;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because \angle CEF = \angle AED,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CFA,$$

$$\therefore CE = CF = 3 \text{ 厘米},$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle CAB, \quad AC \perp BC, \quad FG \perp AB,$$

$$\therefore FG = CF = 3 \text{ 厘米},$$

$$\therefore \angle FGB = 90^\circ,$$

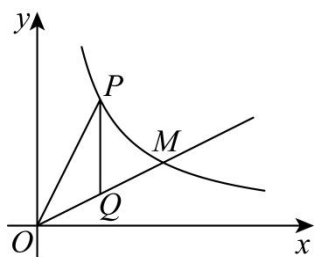
$$\therefore FG^2 + BG^2 = BF^2,$$

$$\therefore 3^2 + 4^2 = BF^2,$$

$$\therefore BF = 5 \text{ 厘米},$$

$$\therefore BC = BF + CF = 8 \text{ 厘米}.$$

25. 如图，在第一象限内，已知反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图像经过横坐标为 4 的点 M



(1) 求 M 点的坐标及直线 OM 的解析式;

(2) 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 图像上有一点 P , 线段 OM 上有一点 Q , $PQ \parallel y$ 轴, 且 $\triangle OPQ$ 的面积为 3, 求点 P 坐标;

(3) 在第 (2) 小题的前提下, 求点 P 到直线 OM 的距离.

【答案】 (1) $M(4, 2)$, $y = \frac{1}{2}x$

(2) $P(2, 4)$

(3) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与反比例函数综合;

(1) 把 $x = 4$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 得 $M(4, 2)$; 设直线 OM 的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$ 把 $M(4, 2)$ 代入即可求解;

(2) 设 $P\left(a, \frac{8}{a}\right)$, 则 $Q\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, $PQ = \left|\frac{8}{a} - \frac{1}{2}a\right| = \frac{8}{a} - \frac{1}{2}a$, 推出 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot a = 3$, 即可求解;

(3) 由题意得 $Q(2, 1)$; $OQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, 设点 P 到直线 OM 的距离为 h , 根据 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot h = 3$, 即可求解;

【小问 1 详解】

解: 把 $x = 4$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 得: $y = 2$,

$\therefore M(4, 2)$

设直线 OM 的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$

把 $M(4, 2)$ 代入 $y = kx$ 得: $4k = 2$,

解得: $k = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 OM 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 P 在 $y = \frac{8}{x}$ 上, 点 Q 在线段 OM 上, $PQ \parallel y$ 轴,

$\therefore$ 设 $P\left(a, \frac{8}{a}\right)$, 则 $Q\left(a, \frac{1}{2}a\right)$,

$$\therefore PQ = \frac{8}{a} - \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot a = 3$$

$$\text{即: } \frac{1}{2} \left(\frac{8}{a} - \frac{1}{2}a \right) a = 3,$$

解得: $a = 2$ 或 $a = -2$ (舍去)

$$\therefore P(2, 4);$$

【小问 3 详解】

解: $\because a = 2$

$$\therefore Q(2, 1);$$

$$\therefore OQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

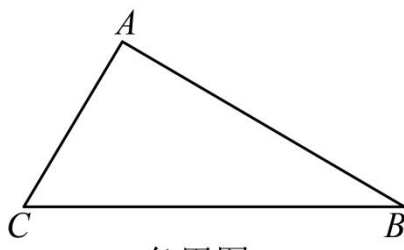
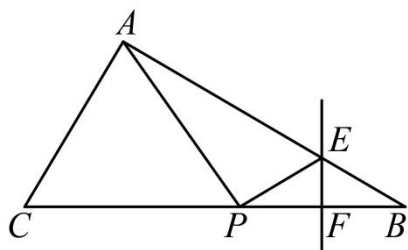
设点 P 到直线 OM 的距离为 h

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot h = 3,$$

$$\therefore h = \frac{6\sqrt{5}}{5};$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 到直线 } OM \text{ 的距离为 } \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

26. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 4\sqrt{3}$, 点 P 是射线 CB 上的一点 (不与点 B 重合), EF 是线段 PB 的垂直平分线, 交 PB 与点 F , 交射线 AB 与点 E , 联结 PE 、 AP .



备用图

- (1) 求 $\angle B$ 的度数;
- (2) 当 P 是 BC 的中点时, 求 $S_{\triangle APE}$
- (3) 当点 P 在线段 CB 上时, 设 $EF = x$, $\triangle APE$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;
- (4) 如果 $EF = 1$, 求 $S_{\triangle APE}$

【答案】(1) 30°

(2) $2\sqrt{3}$

(3) $y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2, 0 < x \leq 2$

(4) $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查含 30° 直角三角形，线段垂直平分线．熟练掌握含 30° 直角三角形的性质，勾股定理，线段垂直平分线性质，三角形面积公式，分类讨论，是解题的关键．

(1) 根据 $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = \frac{1}{2}BC$ ，可得 $\angle B = 30^\circ$ ；

(2) 由勾股定理求出 $AB = 6$ ，由中点求出 $PB = 2\sqrt{3}$ ，由垂直平分线得 $PF = FB = \sqrt{3}$ ，设 $EF = x$ ，得 $BE = 2x$ ，有 $3 = 4x^2 - x^2$ ，解得 $x = 1$ ， $EF = 1$ ，得 $AE = 4$ ，过点 P 作 $PH \perp AE$ ，垂足为 H ，则 $PH = \sqrt{3}$ ，得 $S_{\triangle APE} = 2\sqrt{3}$ ；

(3) 由 30° 度的直角三角形得 $BE = 2x$ ， $BF = \sqrt{3}x$ ，得 $AE = 6 - 2x$ ，由垂直平分线得 $PB = 2BF = 2\sqrt{3}x$ ，得 $PH = \sqrt{3}x$ ，即得 $S_{\triangle APE} = -\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x$ ，定义域： $0 < x \leq 2$ ；

(4) 当点 P 在线段 BC 上时， $S_{\triangle APE} = -\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x$ ， $x = 1$ 代入，得 $S_{\triangle APE} = 2\sqrt{3}$ ；

当点 P 在线段 CB 的延长线上时， $AE = 6 + 2x$ ，得 $S_{\triangle APE} = \sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x$ ， $x = 1$ 代入，得 $S_{\triangle APE} = 4\sqrt{3}$ ．

【小问 1 详解】

解： $\because \angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4\sqrt{3}$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

解： $\because \angle CAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 6,$$

$\because P$ 是 BC 的中点，

$$\therefore PB = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3},$$

$\because EF$ 垂直平分 PB ,

$$\therefore \angle EFB = 90^\circ, \quad BF = \frac{1}{2}PB = \sqrt{3},$$

设 $EF = x$,

$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = 2x, \quad BF^2 = BE^2 - EF^2,$$

$$\text{即 } 3 = 4x^2 - x^2,$$

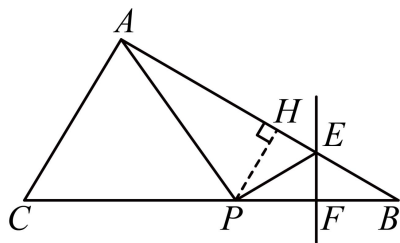
$$\therefore x = 1,$$

$$\text{即 } EF = 1,$$

$$\therefore BE = 2,$$

$$\therefore AE = 4,$$

过点 P 作 $PH \perp AE$, 垂足为 H ,



$$\therefore \angle PHE = 90^\circ,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2}PB = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot PH = 2\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

$$\because \angle EFB = 90^\circ, \quad \angle B = 30^\circ, \quad EF = x,$$

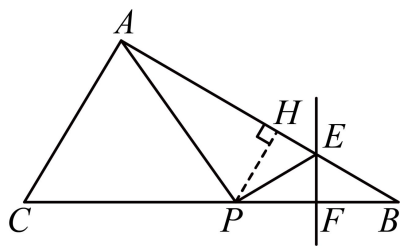
$$\therefore BE = 2x, \quad BF = \sqrt{BE^2 - EF^2} = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore AE = 6 - 2x,$$

$\because EF$ 垂直平分 PB ,

$$\therefore PB = 2BF = 2\sqrt{3}x,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2}PB = \sqrt{3}x,$$



$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot (6 - 2x) \cdot \sqrt{3}x = -\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x,$$

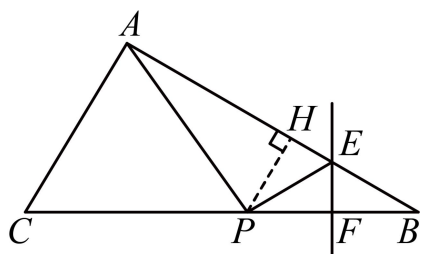
$$\because 0 < PB \leq CB,$$

$$\therefore 0 < 2\sqrt{3}x \leq 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{定义域: } 0 < x \leq 2;$$

【小问 4 详解】

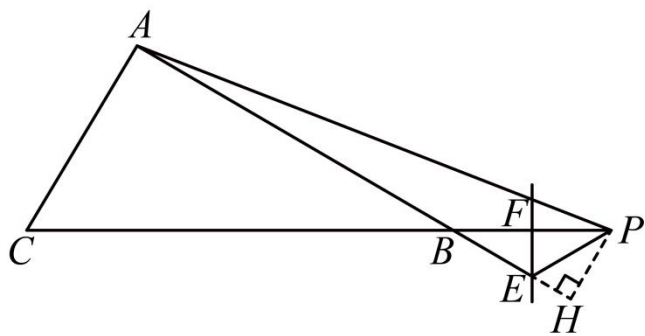
当点 P 在线段 BC 上时,



$$\text{由 (3) 可知, } S_{\triangle APE} = -\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x,$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } S_{\triangle APE} = 2\sqrt{3};$$

当点 P 在线段 CB 的延长线上时,



$$AE = 6 + 2x,$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot (6 + 2x) \cdot \sqrt{3}x = \sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x,$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时,}$$

$$S_{\triangle APE} = 4\sqrt{3}.$$

