

2024 学年第一学期初二年级数学期末考试试卷

(测试时间 90 分钟 满分 100+20 分)

一、选择题 (本大题共有 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 若正比例函数 $y = mx$ 的图像经过第二、四象限, 则 ()

- A. $m \geq 0$ B. $m > 0$ C. $m \leq 0$ D. $m < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数图像的性质, 对于正比例函数 $y = mx (m \neq 0)$, 当 $m > 0$ 时, 函数图像经过第一、三象限, 当 $m < 0$ 时, 函数图像经过第二、四象限, 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = mx$ 的图像经过第二、四象限,
 $\therefore m < 0$,
故选: D.

2. 下列二次根式中与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式是 ()

- A. $\sqrt{9}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{0.3}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式, 根据被开方数相同的最简二次根式, 叫做同类二次根式, 进行判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{9} = 3$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;
B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, 符合题意;
C、 $\sqrt{0.3} = \frac{\sqrt{30}}{10}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;
D、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;
故选 B.

3. 下列关于 x 的方程说法正确的是 ()

- A. $x^2 = -x$ 没有实数根
B. $x^2 + 1 = 0$ 有实数根
C. $4x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根

D. $x^2 - mx - 2 = 0$ (其中 m 是实数) 一定有实数根

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了利用一元二次方程的根的判别式判断根的情况，理解并掌握一元二次方程的根的判别式是解题关键. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，其根的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根. 据此逐项分析判断即可.

【详解】解：A. 对于方程 $x^2 = -x$ ，整理可得 $x^2 + x = 0$ ，

因为 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0$ ，所以该方程有两个不相等的实数根，本选项不符合题意；

B. 对于方程 $x^2 + 1 = 0$ ，

因为 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$ ，所以该方程无实数根，本选项不符合题意；

C. 对于方程 $4x^2 - 2x + 1 = 0$ ，

因为 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 1 = -12 < 0$ ，所以该方程无实数根，本选项不符合题意；

D. 对于方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ ，

因为 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = m^2 + 8$ ，

又因为 m 是实数，

所以 $m^2 \geq 0$ ，

所以 $m^2 + 8 > 0$ ，即 $\Delta > 0$ ，

所以该方程一定有实数根，本选项符合题意.

故选：D.

4. 下列函数中， y 随 x 的增大而减小的是 ()

A. $y = 2x$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = -2x$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】反比例函数的增减性有限制条件 (即范围)，一次函数当一次项系数为负数时， y 随着 x 增大而减

小.

【详解】解：A、函数 $y=2x$ 的图象是 y 随着 x 增大而增大，故本选项错误；

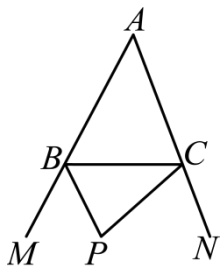
C、函数 $y=-2x$ 中的 $k<0$ ， y 随着 x 增大而减小，故本选项正确；

B、D 两个答案考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，故 B、D 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了一次函数、反比例函数的增减性. 关键是明确各函数的增减性的限制条件.

5. 如图， BP 平分 $\angle MBC$ ， CP 平分 $\angle BCN$ ，下列结论正确的是（ ）



A. $\angle MBP = \angle P$

B. $BP \parallel AN$

C. 若连接 AP ，则被 BC 平分

D. 点 P 到 AM 与到 AN 的距离相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据角平分线的性质，角平分线上的点到角两边的距离相等证明即可.

【详解】 $\because BP$ 平分 $\angle MBC$,

$\therefore$ 点 P 到 BM 和 BC 的距离相等,

$\because CP$ 平分 $\angle BCN$,

$\therefore$ 点 P 到 CN 和 BC 的距离相等,

$\therefore$ 点 P 到 AM 与到 AN 的距离相等,

故选 D.

【点睛】本题主要考查了角平分线的性质，熟练掌握角平分线的性质是解决本题的关键.

6. 下列说法正确的是（ ）

A. 命题一定有逆命题

B. 所有的定理一定有逆定理

C. 真命题的逆命题一定是真命题

D. 假命题的逆命题一定是假命题

【答案】A

【解析】

【分析】 根据命题的定义和定理及其逆定理之间的关系，分别举出反例，再进行判断，即可得出答案.

【详解】 解：A、命题一定有逆命题，故此选项符合题意；

B、定理不一定有逆定理，如：全等三角形对应角相等没有逆定理，故此选项不符合题意；

C、真命题的逆命题不一定是真命题，如：对顶角相等的逆命题是：相等的两个角是对顶角，它是假命题而不是真命题，故此选项不符合题意；

D、假命题的逆命题定不一定是假命题，如：相等的两个角是对顶角的逆命题是：对顶角相等，它是真命题，故此选项不符合题意.

故选：A.

【点睛】 本题考查了命题与定理，掌握好命题的真假及互逆命题的概念是解题的关键. 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，所有的命题都有逆命题；正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了函数的定义域，二次根式和分式有意义的条件. 根据二次根式和分式有意义的条件即可求出 x 的范围.

【详解】 解： $\because$ 要使 $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ 有意义，

$$\therefore 3x - 2 > 0,$$

$$\text{解得：} x > \frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为：} x > \frac{2}{3}.$$

8. 已知 $a < 0$ ，化简： $\sqrt{a^2b} =$ _____.

【答案】 $-a\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质，根据二次函数的性质，进行化简即可.

【详解】 解： $\because a < 0$,

$$\therefore \sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -a\sqrt{b};$$

故答案为: $-a\sqrt{b}$.

9. 分母有理化: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化, 根据 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 分子和分母同时乘上 $(2+\sqrt{3})$, 化简即可作答.

【详解】 解: 依题意, $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1 \times (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$

故答案为: $2+\sqrt{3}$.

10. 在实数范围内因式分解: $2x^2-2x-1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 先在实数范围内提公因式得: $2\left(x^2-x-\frac{1}{2}\right)$, 然后利用配方法以及平方差公式将括号里的进行因

式分解变形得出答案

【 详 解 】

$$\begin{aligned} 2x^2-2x-1 &= 2\left(x^2-x-\frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right] = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

故答案为 $2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

【点睛】 本题主要考查了因式分解的基本方法, 熟练掌握相关方法是关键

11. 如果反比例函数的图像经过点 $A(2024, -2025)$ 、 $B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$, 且 $x_1 < x_2 < 0$, 那么 y_1 与 y_2

的大小关系是 y_1 _____ y_2 . (填 “>”, “<” 或 “=”)

【答案】<

【解析】

【分析】 本题考查比较反比例函数的函数值大小，根据点 A 的坐标，确定双曲线所过象限，根据反比例函数的增减性，判断函数值大小即可.

【详解】 解： $\because A(2024, -2025)$ 在第四象限，

$\therefore$ 双曲线过二，四象限，在每一个象限内， y 随 x 的增大而增大，

$\because B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ 在反比例函数的图象上，且 $x_1 < x_2 < 0$ ，

$\therefore y_1 < y_2$ ；

故答案为：<.

12. 某件商品原价为 200 元，经过两次促销降价后的价格为 128 元，如果连续两次降价的百分率相同，设两次降价的百分率都是 x ，那么可以列出方程_____.

【答案】 $200(1-x)^2 = 128$

【解析】

【分析】 本题考查根据实际问题列一元二次方程，根据平均变化率的等量关系 $a(1 \pm x)^2 = b$ ，增长为加，降低为减，列出方程即可.

【详解】 解：由题意，可列方程为： $200(1-x)^2 = 128$ ；

故答案为： $200(1-x)^2 = 128$

13. 若点 P 在 x 轴上，点 A 坐标是 $(2, -1)$ ，且 $PA = \sqrt{5}$ 则点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(0, 0)$ 或 $(4, 0)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了两点距离计算公式，设出点 P 的坐标，根据两点距离计算公式建立方程求解即可.

【详解】 解：设点 P 的坐标为 $(m, 0)$ ，

$\because$ 点 A 坐标是 $(2, -1)$ ，且 $PA = \sqrt{5}$ ，

$\therefore (2-m)^2 + (-1-0)^2 = (\sqrt{5})^2$ ，

解得 $m = 0$ 或 $m = 4$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(4,0)$,

故答案为: $(0,0)$ 或 $(4,0)$.

14. 过已知点 A 且半径为 3 厘米的圆的圆心的轨迹是_____.

【答案】以 A 为圆心, 半径为 3 厘米的圆

【解析】

【分析】本题考查圆的定义, 就是到定点的距离等于定长的点的集合.

根据圆的定义即可得答案.

【详解】 $\because$ 所求圆心的轨迹, 就是到 A 点的距离等于 3 厘米的点的集合,

$\therefore$ 是一个以 A 为圆心, 半径为 3 厘米的圆.

故答案为: 以 A 为圆心, 半径为 3 厘米的圆

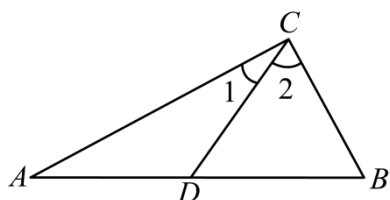
15. 命题“一边上的中线是这边的一半的三角形一定是直角三角形”是_____. (填“真命题”或“假命题”)

【答案】真命题

【解析】

【分析】本题主要考查了等边对等角, 三角形内角和定理, 判断命题真假, 根据等边对等角和三角形内角和定理求出 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数, 即可得到答案.

【详解】解: 如图所示, CD 是 AB 上的中线, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$,



$$\therefore CD = AD = BD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle A, \quad \angle 2 = \angle B,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

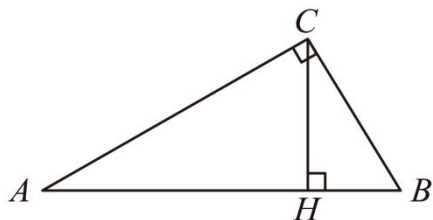
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore$ 命题“一边上的中线是这边的一半的三角形一定是直角三角形”是真命题,

故答案为: 真.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $CH \perp AB$ 于 H , 如果 $CH = \frac{1}{2}AC$, 那么 $BH =$ _____.



【答案】1

【解析】

【分析】本题考查勾股定理, 解一元二次方程, 设 $CH = x$, 则 $AC = 2x$, $AH = \sqrt{3}x$, 进而得到 $BH = AB - AH = 4 - \sqrt{3}x$, 再根据 $BC^2 = AB^2 - AC^2 = CH^2 + BH^2$, 列出方程进行求解即可.

【详解】解: $\because CH \perp AB$,

$\therefore \angle CHA = \angle CHB = 90^\circ$,

$\because CH = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore$ 设 $CH = x$, 则 $AC = 2x$,

$\therefore AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{3}x$,

$\therefore BH = AB - AH = 4 - \sqrt{3}x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC^2 = AB^2 - AC^2$,

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, $BC^2 = CH^2 + BH^2$,

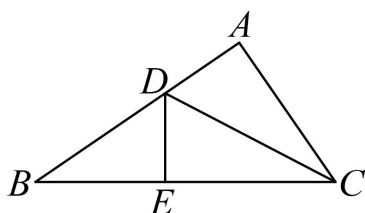
$\therefore AB^2 - AC^2 = CH^2 + BH^2$, 即: $16 - (2x)^2 = x^2 + (4 - \sqrt{3}x)^2$,

解得: $x = 0$ (舍去) 或 $x = \sqrt{3}$;

$\therefore BH = AB - AH = 4 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$;

故答案为: 1.

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 点 D 在边 AB 上, $DE \perp BC$, 垂足为点 E , $AD = DE$, $\angle B = 32^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数为_____.



【答案】 29° 度

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的判定，三角形的内角和定理，先利用三角形的内角和定理，求出 $\angle ACB$ 的度数，证明 CD 平分 $\angle ACB$ ，进而求出 $\angle BCD$ 的度数即可.

【详解】 解： $\because \angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 32^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ;$$

$$\because \angle A = 90^\circ, DE \perp BC, AD = DE,$$

$\therefore CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 29^\circ;$$

故答案为： 29° .

18. 我们规定：在四边形 $ABCD$ 中， O 是边 BC 上的一点. 如果 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 全等，那么点 O 叫做该四边形的“等形点”. 在四边形 $EFGH$ 中， $\angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ， $EF = 1$ ， $FG = 3$ ，如果该四边形的“等形点”在边 FG 上，那么四边形 $EFGH$ 的周长是_____.

【答案】 8 或 $6 + \sqrt{10}$

【解析】

【分析】 根据平行线的性质，得到 $\angle FGH = 90^\circ$ ，分两种情况讨论：当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时，证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，据此即可求出四边形 $EFGH$ 的周长；当 $\triangle OEF \cong \triangle OGH$ 时，根据全等三角形的性质，推出 $GH = 2$ ， $\angle EOH = 90^\circ$ ，利用勾股定理，依次求出 $OE = \sqrt{5}$ ， $EH = \sqrt{10}$ ，即可求出四边形 $EFGH$ 的周长.

【详解】 解： $\because \angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ，

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EFGH$ 的“等形点”在边 FG 上，

如图 1，当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时，则 $EF = HG = 1$ ，

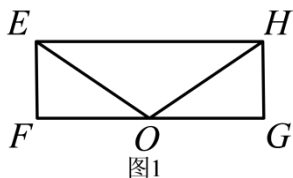


图1

$$\because EF \parallel GH,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$$\therefore EH = FG = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } (1+3) \times 2 = 8;$$

如图 2, 当 $\triangle OEF \cong \triangle HOG$ 时,

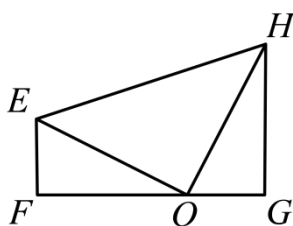


图2

$$\therefore EF = OG = 1, \quad OF = GH, \quad OE = OH, \quad \angle OEF = \angle HOG,$$

$$\because FG = 3,$$

$$\therefore OF = FG - OG = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore GH = 2,$$

$$\because \angle EFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HOG + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOH = 180^\circ - (\angle HOG + \angle EOF) = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFO \text{ 中, } OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore OE = OH = \sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle EOH \text{ 中, } EH = \sqrt{OE^2 + OH^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } 1 + 3 + 2 + \sqrt{10} = 6 + \sqrt{10},$$

故答案为: 8 或 $6 + \sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了全等三角形的性质, 平行四边形的判定和性质, 勾股定理等知识, 熟练掌握全等三角形的性质是解题关键.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 58 分)

19. 计算: $\frac{2x}{3}\sqrt{18x} + x^2\sqrt{\frac{2}{x}} + 6x\sqrt{\frac{x}{8}}$.

【答案】 $\frac{9x}{2}\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的加减运算, 先化简各式, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{2x}{3} \cdot 3\sqrt{2x} + x^2 \cdot \frac{\sqrt{2x}}{x} + 6x \cdot \frac{\sqrt{2x}}{4}$
 $= 2x\sqrt{2x} + x\sqrt{2x} + \frac{3x}{2}\sqrt{2x}$
 $= \frac{9x}{2}\sqrt{2x}.$

20. 解方程: $(x+1)(x-3)=5$.

【答案】 $x_1=4, x_2=-2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握解一元二次方程的方法是解答本题的关键.

先整理方程, 然后利用因式分解, 求出答案.

【详解】 解: 根据题意得:

$$(x+1)(x-3)=5,$$

方程整理得: $x^2 - 2x - 8=0$,

分解因式得: $(x-4)(x+2)=0$,

解得: $x_1=4, x_2=-2$.

21. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 没有实数根, 试判断关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m(m+1) = 0$ 的根的情况.

【答案】 方程 $x^2 + 2mx + m(m+1) = 0$ 有两个不相等的实数根, 理由见解析

【解析】

【分析】 首先根据已知方程无实根可得 $\Delta_1 < 0$, 可求出 m 的取值范围, 再计算新方程的判别式, 结合 m 的取值范围确定新方程判别式 Δ_2 的情况, 进而得出新方程根的情况即可.

【详解】 $\because x^2 - 2x - m = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta_1 = (-2)^2 - 4 \cdot (-m) = 4 + 4m < 0, \text{ 即 } m < -1.$$

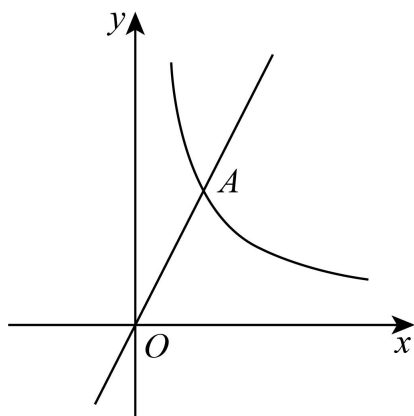
对于方程 $x^2 + 2mx + m(m+1) = 0$,

$$\Delta_2 = (2m)^2 - 4m(m+1) = -4m > 4,$$

∴ 方程 $x^2 + 2mx + m(m+1) = 0$ 有两个不相等的实数根.

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 正比例函数 $y = 2x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像交于点 A, 点 A 的纵坐标为 4.



(1) 求反比例函数解析式;

(2) 点 B 在反比例函数的图像上, 且在点 A 右侧, 过点 B 作 $BC \parallel y$ 轴交正比例函数的图像于点 C, 如果 $\triangle OBC$ 的面积是 12, 求点 B 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{8}{x}$

(2) $B\left(6, \frac{4}{3}\right)$

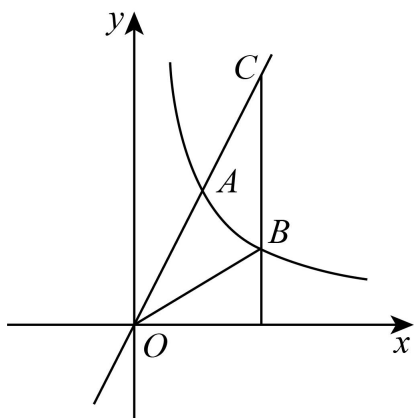
【解析】

【分析】(1) 由正比例函数解析式求得 A 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得反比例函数的解析式;

(2) 设 $B\left(x, \frac{8}{x}\right)$, 则 $C(x, 2x)$, $BC = 2x - \frac{8}{x}$, 利用三角形面积公式即可得到 $\frac{1}{2}\left(2x - \frac{8}{x}\right) \cdot x = 12$, 求得 $x = 6$, 即可求得 $B\left(6, \frac{4}{3}\right)$.

【小问 1 详解】

解: 点 A 在正比例函数 $y = 2x$ 的图象上, 点 A 的纵坐标为 4,



$$\therefore A(2,4),$$

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象过点 A,

$$\therefore m = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{8}{x};$$

【小问 2 详解】

解: 设 $B\left(x, \frac{8}{x}\right)$, 则 $C(x, 2x)$,

$$\therefore BC = 2x - \frac{8}{x},$$

$\because \triangle OBC$ 的面积是 12,

$$\therefore \frac{1}{2} \left(2x - \frac{8}{x} \right) \cdot x = 12,$$

$$\therefore x^2 - 4x - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 6, \quad x_2 = -2,$$

$\because B$ 在点 A 右侧,

$$\therefore B\left(6, \frac{4}{3}\right).$$

【点睛】本题是反比例函数与一次函数的交点问题, 考查了一次函数图像上点的坐标特征, 待定系数法求反比例函数的解析式, 坐标与图形、三角形的面积, 正确表示出点的坐标是解题的关键.

23. 综合与实践

问题情境: 小莹妈妈的花卉超市以 15 元/盆的价格新购进了某种盆栽花卉, 为了确定售价, 小莹帮妈妈调查了附近 A, B, C, D, E 五家花卉店近期该种盆栽花卉的售价与日销售量情况, 记录如表 1:

表 1

	售价 (元/盆)	日销售量 (盆)
A	20	50
B	30	30
C	18	54
D	22	46
E	26	38

表 2

售价 (元/盆)					
日销售量 (盆)					

数据整理

(1) 请将以上调查数据按照一定顺序重新整理，填写在表 2 中：

模型建立

(2) 根据上表中的数据，请判断 $y = kx$ 、 $y = \frac{k}{x}$ 和 $y = kx + b$ (k , b 为常数) 哪一个能正确反映日销售量 y 与售价 x 的函数关系？并求出 y 关于 x 的表达式；

拓广应用

- (3) 根据以上信息，小莹妈妈在销售该种花卉中，
- ①若售价定为 20 元一盆，则每天的利润可以达到多少？
- ②要想每天获得 400 元的利润，且售价不可以超过题目中所提到的五家花店售价的最高价，应如何定价？

【答案】 (1) 见解析；(2) $y = -2x + 90$ ；(3) ①250 元；②售价应该定为 25 元

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的实际应用，一元二次方程的实际应用：

- (1) 按照售价从低到高的顺序列表即可；
- (2) 由表格可知，售价每增加 2 元，日销售量就减少 4 盆，故日销售量 y 与售价 x 满足 $y = kx + b$ ，据此利用待定系数法求解即可；
- (3) ①根据日利润等于每盆的利润乘以销售量列式求解即可；②根据日利润等于每盆的利润乘以销售量建

立方程求解即可.

【详解】解: (1) 列表如下:

售价 (元/盆)	18	20	22	26	30
日销售量 (盆)	54	50	46	38	30

(2) 由表格可知, 售价每增加 2 元, 日销售量就减少 4 盆, 故日销售量 y 与售价 x 满足 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 18k + b = 54 \\ 20k + b = 50 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 90 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x + 90;$$

$$(3) \textcircled{1} (20 - 15) \times 50 = 250 \text{ 元},$$

$\therefore$ 若售价定为 20 元一盆, 则每天的利润可以达到 250 元;

$$\textcircled{2} \text{由题意得, } (x - 15)(-2x + 90) = 400,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 60x + 875 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 25 \text{ 或 } x = 35 \text{ (舍去)},$$

答: 售价应该定为 25 元.

24. 本学期, 我们学习了勾股定理, 勾股定理的提出可以追溯到三千多年前的周朝, 当时商高提出了“勾三股四弦五”的特例. 中国古代的数学家们不仅很早就发现并应用勾股定理, 而且很早就尝试对勾股定理作理论的证明. 最早对勾股定理进行证明的, 是三国时期吴国的数学家赵爽. 赵爽创制了一幅“勾股圆方图”, 用形数结合得到方法, 给出了勾股定理的详细证明. 目前已知的勾股定理的证明方法约有 500 多种.

(1) 请写出勾股定理的内容_____.

(2) 请写出一种勾股定理的证明方法.

【答案】(1) 一个直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查勾股定理及其证明:

(1) 直接写出勾股定理即可;

(2) 利用赵爽弦图进行证明即可.

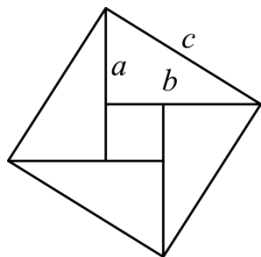
【小问 1 详解】

解：勾股定理内容为：一个直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方；

【小问 2 详解】

如图，大正方形由 4 个全等的直角三角形（直角边为 a, b ($b > a$)，斜边为 c) 和一个小正方形组成，则：

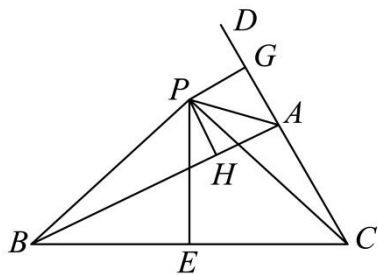
大正方形的面积的等于 4 个直角三角形的面积加上小正方形的面积，



$$\therefore c^2 = 4 \times \frac{1}{2} ab + (b - a)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2.$$

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， PE 垂直平分边 BC ，交 BC 于点 E ， AP 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle BAD$ ， $PG \perp AD$ ，垂足为点 G ， $PH \perp AB$ ，垂足为点 H 。



(1) 求证： $\angle PBH = \angle PCG$ ；

(2) 若 $\angle BAC = 90^\circ$ ，求证： $BC = 2PE$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质：

(1) 通过 HL 证明 $\triangle PHB \cong \triangle PGC$ ，即可求证；

(2) 证明 $\triangle BPC$ 为等腰直角三角形，进而得到 $\triangle BEP$ 为等腰直角三角形，得到 $PE = BE = \frac{1}{2}BC$ 即可得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because PE$ 垂直平分边 BC ，

$$\therefore PB = PC,$$

$\because AP$ 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle BAD$, $PG \perp AD$, $PH \perp AB$,

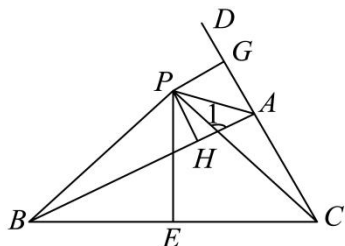
$\therefore PH = PG$, $\angle PHB = \angle PGC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle PHB \cong \triangle PGC$ (HL),

$\therefore \angle PBH = \angle PCG$;

【小问 2 详解】

$\because \angle PBH = \angle PCG$, $\angle 1 = \angle PBH + \angle BPC = \angle PCG + \angle BAC$,



$\therefore \angle BPC = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore PB = PC$,

$\therefore \angle PBC = \angle PCE = 45^\circ$,

$\because PE$ 垂直平分边 BC ,

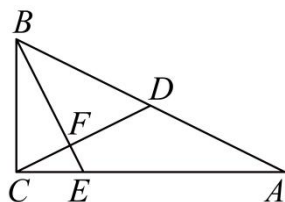
$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC$, $\angle PEB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BEP$ 为等腰直角三角形,

$\therefore PE = BE = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore BC = 2PE$.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点, 过点 B 作 $\angle CBE = \angle A$, BE 与射线 CA 相交于点 E , 与射线 CD 相交于点 F .



(1) 如图, 当点 E 在线段 CA 上时, 求证: $BE \perp CD$;

(2) 若 $BE = CD$, 那么线段 AC 与 BC 之间具有怎样的数量关系? 并证明你所得到的结论;

(3) 若 $\triangle BDF$ 是等腰三角形, 求 $\angle A$ 的度数.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $AC = 2BC$; (3) 22.5° 或 67.5° .

【解析】

【分析】(1) 根据角之间的等量关系及中点的特点即可得出答案;

(2) 根据题意易证 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形比例关系即可得出结论;

(3) 分①点 E 在线段 CA 上时; ②点 E 在线段 CA 延长线上讨论求解.

【详解】(1) $\because \angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点, $\therefore CD = AD$, $\therefore \angle A = \angle DCA$.

$\because \angle CBE = \angle A$, $\therefore \angle DCA = \angle CBE$.

$\because \angle CBE + \angle BEC = 90^\circ$, $\therefore \angle BEC + \angle DCA = 90^\circ$, $\therefore BE \perp CD$;

(2) 线段 AC 与 BC 之间的数量关系是: $AC = 2BC$.

$\because \angle CBE = \angle A$, $\angle BCE = \angle ACB$, $\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB$, $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AB}$.

$\because BE = CD$, $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, $\therefore AC = 2BC$.

(3) $\because \triangle BDF$ 是等腰三角形, $\angle BFD = 90^\circ$, $\therefore \angle BDF = 45^\circ$.

①当点 E 在线段 CA 上时, 如图 1, $\angle A = \frac{1}{2} \angle BDF = 22.5^\circ$;

②当点 E 在线段 CA 延长线上时, 如图 2, $\angle CDA = \angle BDF = 45^\circ$, $\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle CDA}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$.

综上所述: $\angle BAC$ 的度数为 22.5° 或 67.5° .

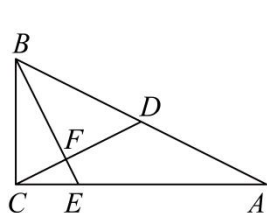


图1

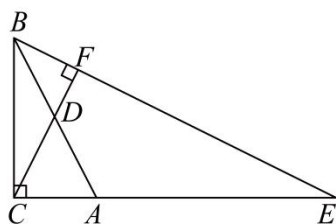


图2

【点睛】本题考查了直角三角形斜边中线的性质及相似三角形的证明及性质, 难度适中.

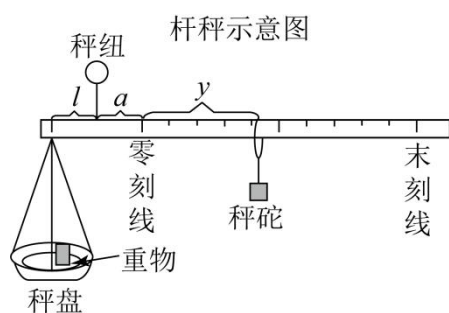
四、附加题:

27. 【综合与实践】

有言道: “杆秤一头称起人间生计, 一头称起天地良心”. 某兴趣小组将利用物理学中杠杆原理制作简易杆秤. 小组先设计方案, 然后动手制作, 再结合实际进行调试, 请完成下列方案设计中的任务.

【知识背景】如图, 称重物时, 移动秤砣可使杆秤平衡, 根据杠杆原理推导得: $(m_0 + m) \cdot l = M \cdot (a + y)$.

其中秤盘质量 m_0 克, 重物质量 m 克, 秤砣质量 M 克, 秤纽与秤盘的水平距离为 l 厘米, 秤纽与零刻线的水平距离为 a 厘米, 秤砣与零刻线的水平距离为 y 厘米.



【方案设计】

目标：设计简易杆秤. 设定 $m_0 = 10$, $M = 50$, 最大可称重物质量为 1000 克, 零刻线与末刻线的距离定为 50 厘米.

任务一：确定 l 和 a 的值.

- (1) 当秤盘不放重物, 秤砣在零刻线时, 杆秤平衡, 请列出关于 l, a 的方程;
- (2) 当秤盘放入质量为 1000 克的重物, 秤砣从零刻线移至末刻线时, 杆秤平衡, 请列出关于 l, a 的方程;
- (3) 根据 (1) 和 (2) 所列方程, 求出 l 和 a 的值.

任务二：确定刻线的位置.

- (4) 根据任务一, 求 y 关于 m 的函数解析式;
- (5) 从零刻线开始, 每隔 100 克在秤杆上找到对应刻线, 请写出相邻刻线间的距离.

【答案】(1) $l = 5a$

(2) $101l - 5a = 250$

(3) $l = 2.5, a = 0.5$

(4) $y = \frac{1}{20}m$

(5) 相邻刻线间的距离为 5 厘米

【解析】

【分析】(1) 根据题意可直接进行求解;

(2) 根据题意可直接代值求解;

(3) 由 (1) (2) 可建立二元一次方程组进行求解;

(4) 根据 (3) 可进行求解;

(5) 分别把 $m = 0, m = 100, m = 200, m = 300, m = 400, m = 500, m = 600, m = 700, m = 800, m = 900, m = 1000$ 代入求解, 然后问题可求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得： $m = 0, y = 0$,

$$\therefore 10l = 50a,$$

$$\therefore l = 5a;$$

【小问 2 详解】

解：由题意得： $m = 1000, y = 50,$

$$\therefore (10 + 1000)l = 50(a + 50),$$

$$\therefore 101l - 5a = 250;$$

【小问 3 详解】

解：由 (1) (2) 可得：
$$\begin{cases} l = 5a \\ 101l - 5a = 250 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} l = 2.5 \\ a = 0.5 \end{cases};$$

【小问 4 详解】

解：由任务一可知： $l = 2.5, a = 0.5,$

$$\therefore 2.5(10 + m) = 50(0.5 + y),$$

$$\therefore y = \frac{1}{20}m;$$

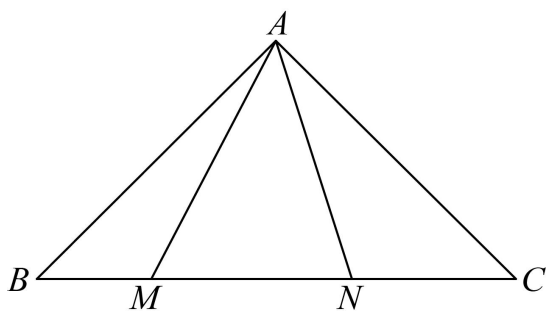
【小问 5 详解】

解：由 (4) 可知 $y = \frac{1}{20}m,$

$\therefore$ 当 $m = 0$ 时，则有 $y = 0$ ；当 $m = 100$ 时，则有 $y = 5$ ；当 $m = 200$ 时，则有 $y = 10$ ；当 $m = 300$ 时，则有 $y = 15$ ；当 $m = 400$ 时，则有 $y = 20$ ；当 $m = 500$ 时，则有 $y = 25$ ；当 $m = 600$ 时，则有 $y = 30$ ；当 $m = 700$ 时，则有 $y = 35$ ；当 $m = 800$ 时，则有 $y = 40$ ；当 $m = 900$ 时，则有 $y = 45$ ；当 $m = 1000$ 时，则有 $y = 50$ ；
 $\therefore$ 相邻刻线间的距离为 5 厘米.

【点睛】 本题主要考查一次函数的应用，解题的关键是理解题意.

28. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 M 、 N 在边 BC 上，满足 $\angle MAN = 45^\circ$ ，那么线段 BM 、 MN 、 NC 是否有可能使等式 $MN^2 = BM^2 + NC^2$ 成立？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由.



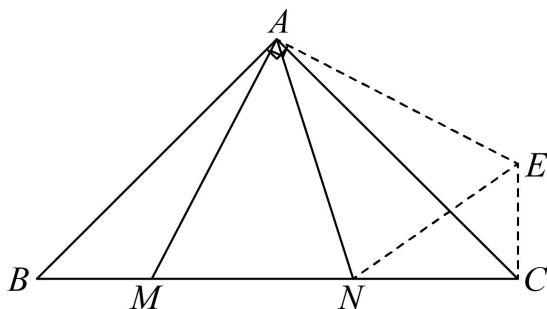
【答案】等式 $MN^2 = BM^2 + NC^2$ 成立，证明见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，等边对等角，勾股定理和三角形内角和定理，过点 A 作 $AE \perp AM$ 使得 $AE = AM$ ，连接 CE ， NE ，先求出 $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ ，再证明 $\triangle ABM \cong \triangle ACE$ ，得到 $CE = BM$ ， $\angle ACE = \angle B = 45^\circ$ ，进一步证明 $\triangle AMN \cong \triangle AEN$ ，得到 $EN = MN$ ，在 $\text{Rt}\triangle CEN$ 中，由勾股定理得 $EN^2 = CN^2 + CE^2$ ，则 $MN^2 = BM^2 + NC^2$ 。

【详解】解：等式 $MN^2 = BM^2 + NC^2$ 成立，证明如下：

如图所示，过点 A 作 $AE \perp AM$ 使得 $AE = AM$ ，连接 CE ， NE ，



$$\because \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\because AE \perp AM,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle MAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle CAE = 90^\circ - \angle CAM,$$

$$\text{又} \because AM = AE, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = BM, \quad \angle ACE = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 90^\circ;$$

$$\therefore \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAN = \angle MAE - \angle MAN = 45^\circ = \angle MAN ,$$

$$\text{又} \because AN = AN, \quad AM = AE ,$$

$$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AEN (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore EN = MN ,$$

$$\text{在 Rt} \triangle CEN \text{ 中, 由勾股定理得 } EN^2 = CN^2 + CE^2 ,$$

$$\therefore MN^2 = BM^2 + NC^2 .$$