

2024-2025 学年上海市建平实验中学八年级上学期期末数学试卷

一. 选择题 (共 6 小题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $2\sqrt{a}$ B. $\sqrt{\frac{1}{a}}$ C. $\sqrt{8a}$ D. $\sqrt{2a^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式, 利用二次根式的性质化简等知识点, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键: 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 那么这几个二次根式叫做同类二次根式. 利用二次根式的性质把各个二次根式化简, 再根据同类二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. $2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 A 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 B 不符合题意;

C. $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a} = 2\sqrt{2a}$, 与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式, 故选项 C 符合题意;

D. $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$, 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 D 不符合题意;

故选: C.

2. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $3x^2 + 2y - 1 = 0$ B. $3x^2 - 2x + 1 = 0$
C. $5x^2 - \frac{1}{2x} - 1 = 0$ D. $ax^2 = 5$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程的定义, 根据定义对每个方程进行分析, 然后作出准确的判断. 根据一元二次方程的定义: 含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程是一元二次方程, 运用定义对每个方程作出判断.

【详解】解: A、含有两个未知数, 不是一元二次方程, 故不符合题意;

B、是一元二次方程, 故符合题意;

C、含有分式, 不是一元二次方程, 故不符合题意;

D、当 $a = 0$ 时, 不是一元二次方程, 故不符合题意.

故选: B.

3. 在下列函数中，当 x 增大时， y 的值减小的函数是 ()

A. $y = \frac{2}{x}$

B. $y = 5x$

C. $y = -\frac{3}{x}$

D. $y = -\frac{x}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数的性质，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，反比例函数的增减性必须是在每个象限内或在双曲线的每一支上，否则，不能讨论它的增减性.

【详解】A. 是反比例函数，其增减性必须强调在双曲线的每一支上，故本选项错误；

B. $k = 5 > 0$ ，所以 y 随 x 的增大而增大，故本选项错误；

C. 是反比例函数，其增减性必须强调在双曲线的每一支上，故本选项错误.

D. 是一次函数 $k = -\frac{1}{4} < 0$ ，所以 y 随 x 的增大而减小，正确.

故选 D.

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的性质，反比例函数的增减性必须强调在每个象限内或在双曲线的每一支上，这也是同学们经常出错的地方.

4. 下列三角形中，非直角三角形的是 ()

A. 三边分别为 11, $\sqrt{60}$, $\sqrt{61}$

B. 有一边的中线等于这边的一半

C. 三个内角之比为 1:2:3

D. 三边之比为 $1:\sqrt{2}:\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理逆定理，三角形内角和定理，等边对等角，如果三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形就是直角三角形，据此先求出两小边的平方和，再求出最长边的平方，最后看看是否相等即可即可判断 A、D；根据三角形内角和定理即可判断 C；如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是中线且 $AD = \frac{1}{2}BC$ ，则 $AD = BD = CD$ ，根据等边对等角得到 $\angle DBA = \angle DAB$ ， $\angle DAC = \angle C$ ，则由三角形内角和定理可得 $\angle DAB + \angle DAC = 90^\circ$ ，即 $\angle BAC = 90^\circ$ ，即可判断 B.

【详解】解：A、 $\because (\sqrt{60})^2 + (\sqrt{61})^2 = 121 = 11^2$,

$\therefore$ 三边长为 11, $\sqrt{60}$, $\sqrt{61}$ ，可以组成直角三角形，故此选项不符合题意；

B、如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是中线且 $AD = \frac{1}{2}BC$,

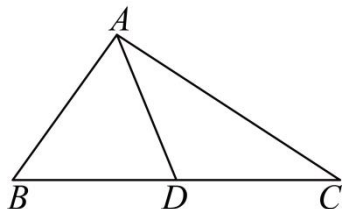
$\therefore AD = BD = CD$,

$$\therefore \angle DBA = \angle DAB, \angle DAC = \angle C,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle DAB + \angle DAC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle DAC = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BAC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 有一边的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形，故此选项不符合题意；



C、由题意得，最大的内角度数为 $180^\circ \times \frac{3}{1+2+3} = 90^\circ$ ，则三个内角之比为1:2:3的三角形是直角三角形，

故此选项不符合题意；

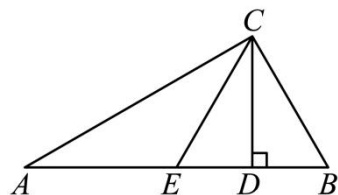
D、设三边长分别为 $k, \sqrt{2}k, \sqrt{2}k (k \neq 0)$

$$\therefore k^2 + (\sqrt{2}k)^2 \neq (\sqrt{2}k)^2,$$

$\therefore$ 三边之比为 $1:\sqrt{2}:\sqrt{2}$ ，不可以组成直角三角形，故此选项符合题意；

故选：D.

5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， CE 是 ABC 的中线. 要说明“三个角分别对应相等的两个三角形全等”是假命题，可以作为反例的两个三角形是（ ）



A. $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$

B. $\triangle BCE$ 和 $\triangle ABC$

C. $\triangle CDE$ 和 $\triangle BCD$

D. $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$

【答案】D

【解析】

【分析】利用含有 30° 角的直角三角形的特征和直角三角形斜边中线的特点，求出 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 的每个角，可以判断出两个三角形三角不对应相等，对 A 进行判断； $\triangle BCE$ 是等边三角形， $\triangle ABC$ 是直角三角形，三角不对应相等，对 B 进行判断；利用 AAS 证明 $\triangle CDE \cong \triangle CDB$ ，并且两个三角形的三角对应相等，对 C 进行判断；在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中可求三角对应相等，但是 $AC \neq BC$ ，可对 D 进行判断.

【详解】解：A、 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 60^\circ$$

$$\because CD \perp AB$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CDB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCD = 30^\circ, \angle ACD = 60^\circ$$

$$\because CE \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中线且 } \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = CE = BE$$

$$\therefore \angle ACE = \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ECD = 30^\circ, \angle CEB = 60^\circ$$

$$\text{在 } \triangle ACE \text{ 中, } \angle CAE = \angle ACE = 30^\circ, \angle AEC = 120^\circ$$

$$\text{在 } \triangle BCE \text{ 中, } \angle CBE = \angle CEB = \angle BCE = 60^\circ,$$

两个三角形三角不对应相等, 故本选项不符合题意;

$$\text{B、} \because BC = \frac{1}{2} AB, CE = AE = BE = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 是等边三角形,}$$

$$\because \triangle ABC \text{ 是直角三角形,}$$

$$\therefore \text{两个三角形三角不对应相等, 也不全等, 故本选项不符合题意;}$$

$$\text{C、在 } \triangle CDE \text{ 和 } \triangle BCD \text{ 中,}$$

$$\because \angle DCE = \angle DCB = 30^\circ, \angle DEC = \angle DBC = 60^\circ$$

$$\text{又} \because \angle CDE = \angle CDB = 90^\circ, \text{ 且 } CD = CD,$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CDB$$

故本选项不符合题意;

$$\text{D、在 } \triangle ACD \text{ 和 } \triangle BCD \text{ 中, } \angle A = \angle BCD = 30^\circ, \angle ADC = \angle BDC, \angle ACD = \angle B$$

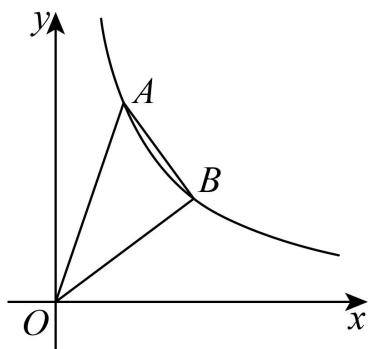
两三角形三角对应相等, 但 $AC \neq BC$, 这两个三角形不全等

故本选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查了真假命题的判断, 及含有 30° 角的直角三角形的特征和直角三角形斜边中线的特点, 三角形全等的判定, 对命题的正确理解是解答本题的关键.

6. 如图, 平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象经过两点 A, B (A 在左侧). 若 A, B 两点横、纵坐标都相差 2, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

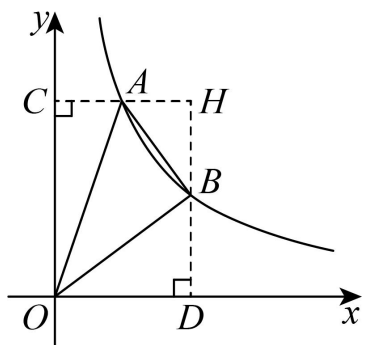
D. 6

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题主要考查了反比例函数系数 k 的几何意义，反比例函数图象上点的坐标，理解反比例函数图象上点的坐标满足反比例函数的表达式，熟练掌握反比例函数系数 k 的几何意义是解决问题的关键. 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ， $BD \perp x$ 轴于点 D ， CA 与 DB 的延长线交于点 E ，则四边形 $OCHD$ 是矩形，设点 $A\left(a, \frac{3}{a}\right)$ ，其中 $a > 0$ ，依题意得点 $B\left(2+a, \frac{3}{a}-2\right)$ ，则 $(2+a)\left(\frac{3}{a}-2\right)=3$ ，由此解出 $a=1$ ，进而得点 $A(1,3)$ ，点 $B(3,1)$ ，然后再分别求出 $S_{\text{矩形}OCHD}=9$ ， $S_{\triangle ABH}=2$ ， $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}=\frac{3}{2}$ ，由此可得 AOB 的面积.

【详解】 解：过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ， $BD \perp x$ 轴于点 D ， CA 与 DB 的延长线交于点 E ，如图所示：



$$\therefore \angle ACO = \angle COD = \angle BDO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OCHD$ 是矩形，

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 A ，

$\therefore$ 设点 A 的坐标为 $A\left(a, \frac{3}{a}\right)$ ，其中 $a > 0$ ，

又 $\because A$ 在点 B 左侧,且 A 、 B 两点横、纵坐标都相差2,

$\therefore$ 点 B 的横坐标为: $2+a$, 纵坐标为: $\frac{3}{a}-2$,

$\therefore$ 点 $B\left(2+a, \frac{3}{a}-2\right)$,

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象经过点 B ,

$\therefore (2+a)\left(\frac{3}{a}-2\right)=3$,

整理得: $a^2+2a-3=0$,

解得: $a=1, a=-3$ (不合题意, 舍去),

$\therefore$ 点 $A(1,3)$, 点 $B(3,1)$,

$\therefore OC=3, AC=1, OD=3, BD=1$,

$\because$ 四边形 $OCHD$ 是矩形,

$\therefore CH=OD=3, DH=OC=3$,

$\therefore AH=CH-AC=2, BH=DH-BD=2, S_{\text{矩形}OCHD}=OC\cdot OD=3\times 3=9$,

$\therefore S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}AH\cdot BH=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$,

$\because S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}=\frac{3}{2}$,

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\text{矩形}OCHD}-S_{\triangle ABH}-S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOD}=9-2-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=4$,

故选: B.

二. 填空题 (共 12 小题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 二次根式 $\sqrt{x}-2$ 的有理化因式可以是 _____.

【答案】 $\sqrt{x}+2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算, 掌握二次根式运算法则是解题的关键.

根据分母有理化因式的特征进行解答即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=x-4$,

∴二次根式 $\sqrt{x}-2$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{x}+2$,

故答案为: $\sqrt{x}+2$

8. 关于 y 的方程 $y(y-2)=4(y-2)$ 的解是 _____.

【答案】 $y_1=2, y_2=4$,

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握求解一元二次方程的方法是解题的关键.

根据因式分解法求解即可.

【详解】 解: $y(y-2)=4(y-2)$,

$$(y-2)(y-4)=0,$$

$$y-2=0 \text{ 或 } y-4=0,$$

$$\text{解得 } y_1=2, y_2=4.$$

故答案为: $y_1=2, y_2=4$.

9. 函数 $y=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x}$ 的定义域是 _____.

【答案】 $x\geq-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$

【解析】

【分析】 根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为零列出不等式组, 解不等式组得到答案. 本题考查的是函数自变量的取值范围, 熟记二次根式的被开方数是非负数、分母不为零是解题的关键.

【详解】 解: ∵ 函数 $y=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x}$,

$$\therefore 2x+1\geq 0 \text{ 且 } x\neq 0,$$

$$\text{解得: } x\geq-\frac{1}{2} \text{ 且 } x\neq 0,$$

$$\text{故答案为: } x\geq-\frac{1}{2} \text{ 且 } x\neq 0.$$

10. 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(0,5)$, 点 P 坐标为 $(3,0)$, 则线段 $AP=$ _____.

【答案】 $\sqrt{34}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理, 熟练掌握勾股定理是解答的关键.

由题意可知 $OA=5$, $OP=3$, 再由勾股定理列式计算即可.

【详解】解：设在平面直角坐标系中，坐标原点为 O ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0,5)$ ，点 P 坐标为 $(3,0)$ ，

$\therefore OA=5$ ， $OP=3$ ，

$\therefore \angle AOP=90^\circ$ ，

$\therefore AP=\sqrt{OA^2+OP^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ ，

故答案为： $\sqrt{34}$ 。

11. 手卷是国画装裱中横幅的一种体式，以能握在手中顺序展开阅览得名，它主要由“引首”、“画心”、“拖尾”三部分组成（这三部分都是矩形形状），分隔这三部分的其余部分统称为“隔水”。下图中手卷长 1000cm ，宽 40cm ，引首和拖尾完全相同，其宽度都为 100cm ，若隔水的宽度为 $x\text{cm}$ ，画心的面积为 15200cm^2 ，根据题意，可列方程是_____。



【答案】 $(1000-4x-200)(40-2x)=15200$

【解析】

【分析】此题主要考查一元二次方程的应用，设隔水的宽度为 $x\text{cm}$ ，分别表示出画心的长和宽，根据面积列出方程。

【详解】解：根据题意，得 $(1000-4x-200)(40-2x)=15200$ 。

答案为： $(1000-4x-200)(40-2x)=15200$ 。

12. 三对三篮球赛第一轮采用单循环赛制（每支队伍与其他队伍只比一场），共计 45 场比赛。则有 _____ 支队伍参加比赛。

【答案】 10

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

有 x 支队伍参加比赛，根据每支队伍与其他队伍只比一场，共计 45 场比赛，列出一元二次方程，解之取符合题意的值即可。

【详解】解：设有 x 支队伍参加比赛，

由题意得： $\frac{1}{2}x(x-1) = 45$,

整理得： $x^2 - x - 90 = 0$,

解得： $x_1 = 10$, $x_2 = -9$ (不符合题意，舍去)，

即有 10 支队伍参加比赛，

故答案为：10.

13. 在直角坐标平面内，正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 和反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 都经过点 $A(1, 2)$ ，则

$k + m =$ _____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数和一次函数的交点问题，理解待定系数法是解题的关键。先根据待定系数法求出 m 、 k 的值，再代入求解即可。

【详解】解： $\because$ 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 和反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 都经过点 $A(1, 2)$ ，

$\therefore k = 2$, $m = 1 \times 2 = 2$,

$\therefore k + m = 4$,

故答案为：4.

14. 定理“等腰三角形的两腰相等”的逆命题_____.

【答案】有两边相等的三角形是等腰三角形

【解析】

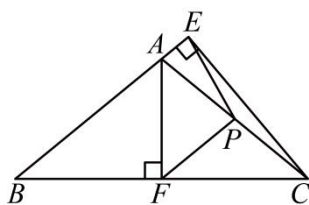
【分析】先找到原命题的题设和结论，再将题设和结论互换，即可而得到原命题的逆命题。

【详解】解：命题“等腰三角形的两腰相等”的逆命题是：两边相等的三角形是等腰三角形。

故答案为两边相等的三角形是等腰三角形。

【点睛】对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件，那么这两个命题叫做互逆命题，其中一个命题叫做原命题，另外一个命题叫做原命题的逆命题。

15. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 为钝角， AF ， CE 都是这个三角形的高， P 为 AC 的中点，若 $\angle B = 42^\circ$ ，则 $\angle EPF$ 的度数为_____.



【答案】 96°

【解析】

【分析】 本题考查的是直角三角形的性质，斜边上的中线等于斜边的一半、等边对等角．根据直角三角形两个锐角互余求出 $\angle BCE$ ，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得到 $PF = \frac{1}{2}AC = PC$ ， $PE = \frac{1}{2}AC = PC$ ，根据等边对等角可得 $\angle PFC = \angle PCF$ ， $\angle PEC = \angle PCE$ ，再根据三角形的外角的性质可得： $\angle EPF = 2\angle BCE = 96^\circ$ ．

【详解】 解： $\because CE \perp BA$ ， $\angle B = 42^\circ$ ，

$$\therefore \angle BCE = 48^\circ,$$

$\because AF \perp BC$ ， $CE \perp BA$ ， P 为 AC 的中点，

$$\therefore PF = \frac{1}{2}AC = PC, \quad PE = \frac{1}{2}AC = PC,$$

$$\therefore \angle PFC = \angle PCF, \quad \angle PEC = \angle PCE,$$

$\because \angle APF$ 是 $\triangle PFC$ 的外角，

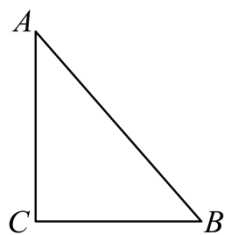
$$\therefore \angle APF = \angle PFC + \angle PCF = 2\angle PCF,$$

同理可得： $\angle APE = \angle PEC + \angle PCE = 2\angle PCE$ ，

$$\therefore \angle EPF = 2\angle PCF + 2\angle PCE = 2\angle BCE = 96^\circ,$$

故答案为： 96° ．

16. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 40^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 3$ ，点 D 在边 BC 上，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折，使点 C 落在点 C' 处，连接 AC' ，直线 AC' 与边 CB 的延长线相交于点 F ，如果 $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAF$ ，那么线段 BF 的长为 _____．

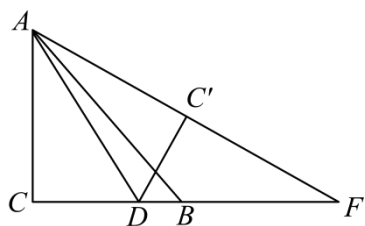


【答案】 3

【解析】

【分析】设 $\angle DAB = \alpha$ ，则 $\angle BAF = 2\alpha$ ， $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$ ，由折叠可得 $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$ ，进而可得 $\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ$ ，则 $\alpha = 10^\circ$ ， $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ$ ，由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ$ ，由三角形外角的性质可得 $\angle F = \angle ADC - \angle DAF = 30^\circ$ ，进而可得 $\angle DAF = \angle F$ ，由等角对等边可得 $AD = DF$ ，由含 30° 角的直角三角形可得 $AD = 2CD$ ，由勾股定理可得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$ ，即 $(2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$ ，解得 $CD = 2$ 或 $CD = -2$ （不符合题意，故舍去），则 $AD = 2CD = 4$ ， $DF = AD = 4$ ，由线段的和差关系可得 $BD = BC - CD = 1$ ， $BF = DF - BD$ ，由此即可求出 BF 的长。

【详解】解：如图，



设 $\angle DAB = \alpha$ ，则 $\angle BAF = 2\alpha$ ， $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$ ，

由折叠可得： $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ$ ，

$\therefore \alpha = 10^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ$ ，

又 $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle F = \angle ADC - \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DAF = \angle F$ ，

$\therefore AD = DF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

$\therefore AD = 2CD$ ，

由勾股定理可得： $AC^2 + CD^2 = AD^2$ ，

即： $(2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$ ，

解得： $CD = 2$ 或 $CD = -2$ （不符合题意，故舍去），

$\therefore AD = 2CD = 4$ ，

$\therefore DF = AD = 4$ ，

$$\text{又} \because BC = 3,$$

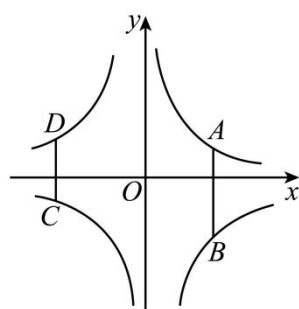
$$\therefore BD = BC - CD = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore BF = DF - BD = 4 - 1 = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】本题主要考查了折叠问题, 含 30° 角的直角三角形, 勾股定理, 直角三角形的两个锐角互余, 三角形外角的性质, 等角对等边, 直接开平方法解一元二次方程, 线段的和与差等知识点, 由折叠及角的和差关系得出 $\alpha = 10^\circ$ 、由含 30° 角的直角三角形的性质及勾股定理得出 $CD = 2$ 是解题的关键.

17. 如图, 点 A, C 在反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 的图象上, 点 B, D 在反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 的图象上, $AB \parallel CD \parallel y$ 轴, 若 $AB = 3$, $CD = 2$, AB 与 CD 的距离为 5, 则 $a - b$ 的值为_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质, 解题的关键是: 根据题意列出等量关系式. 设 A, C 两点的坐标分别为 $\left(x_1, \frac{a}{x_1}\right)$ 、 $\left(x_2, \frac{a}{x_2}\right)$, 根据点 B 与点 A 的横坐标相同, 点 D 与点 C 的横坐标相同, 得到点 B 的坐标为 $\left(x_1, \frac{b}{x_1}\right)$, 点 D 的坐标为 $\left(x_2, \frac{b}{x_2}\right)$, 由 $AB = 3$, $CD = 2$, 得到

$$\begin{cases} \frac{a}{x_1} - \frac{b}{x_1} = 3 \\ \frac{b}{x_2} - \frac{a}{x_2} = 2 \end{cases}, \text{ 根据 } AB \text{ 与 } CD \text{ 的距离}$$

为 5, 把 $\begin{cases} x_1 = \frac{a-b}{3} \\ x_2 = \frac{b-a}{2} \end{cases}$ 代入 $x_1 - x_2 = 5$ 中, 即可求解.

【详解】解: 设 A, C 两点的坐标分别为 $\left(x_1, \frac{a}{x_1}\right)$ 、 $\left(x_2, \frac{a}{x_2}\right)$,

$\because AB \parallel CD \parallel y$ 轴,

$\therefore$ 点 B 与点 A 的横坐标相同, 点 D 与点 C 的横坐标相同,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(x_1, \frac{b}{x_1}\right)$, 点 D 的坐标为 $\left(x_2, \frac{b}{x_2}\right)$,

$\therefore AB = 3, CD = 2$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{a}{x_1} - \frac{b}{x_1} = 3 \\ \frac{b}{x_2} - \frac{a}{x_2} = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = \frac{a-b}{3} \\ x_2 = \frac{b-a}{2} \end{cases},$$

$\therefore AB$ 与 CD 的距离为 5,

$\therefore x_1 - x_2 = 5$,

$$\text{把} \begin{cases} x_1 = \frac{a-b}{3} \\ x_2 = \frac{b-a}{2} \end{cases} \text{代入 } x_1 - x_2 = 5 \text{ 中,}$$

$$\text{得: } \frac{a-b}{3} - \frac{b-a}{2} = 5,$$

$$\text{即 } \frac{a-b}{3} + \frac{a-b}{2} = 5,$$

$$\text{解得: } a-b=6,$$

故答案为: 6.

三. 简答题 (共 4 小题, 19 题 16 分, 20 题 6 分, 21 题 9 分, 22 题 6 分, 共计 37 分)

18. (1) 计算: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}\right) \div \sqrt{3}$;

(2) 解方程: $x^2 - 6x + 1 = 0$;

(3) 因式分解: $2x^2 - 4x + 1$;

(4) 当 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ 时, 求 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{10}{3}$

(2) $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$$(3) (\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 先利用二次根式的性质化简各项，然后按照二次根式的混合运算法则进行计算即可；

(2) 利用公式法解一元二次方程即可；

(3) 先将原式变形为 $2x^2 - 4x + 2 - 1$ ，再变形为 $(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 - 1$ ，然后利用平方差公式分解因式即可；

(4) 将 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 化简为 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ，然后将 $x=\frac{1}{2}$ ， $y=\frac{1}{4}$ 代入化简结果求值即可。

根据二次根式的运算法则进行计算即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：(1)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75} \right) \div \sqrt{3} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \right) \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{10\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{10}{3}; \end{aligned}$$

$$(2) x^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$\because \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 36 - 4 = 32,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\text{解得： } x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2};$$

$$(3) 2x^2 - 4x + 1$$

$$= 2x^2 - 4x + 2 - 1$$

$$= (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 - 1$$

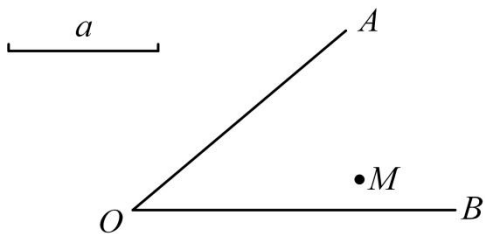
$$= (\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1);$$

$$(4) \because x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合运算，公式法解一元二次方程，平方差公式分解因式，二次根式的化简求值等知识点，熟练掌握一元二次方程的解法、分解因式的方法及二次根式的运算法则是解题的关键.

19. 如图，已知 $\angle AOB$ 、点 M 及线段 a ，求作点 P ，使点 P 到 OA 、 OB 距离相等且到点 M 距离为 $\frac{1}{2}a$.



【答案】图见解析

【解析】

【分析】本题考查了作图 - 基本作图，角平分线的定义，正确作出图形是解题的关键；

根据角平分线的作法作出 $\angle AOB$ 的角平分线 OP ，作线段 a 垂直平分线 EF ，以点 M 为圆心， $\frac{1}{2}a$ 为半径画弧交射线 OP 于 P' 和 P ，则点 P 和 P' 即为所求.

【详解】解：如图所示：

(2) 设曲线 CD 的函数表达式为 $y = \frac{m}{x}$, 把 $(0.1, 8)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 得解方程得到曲线 CD 的函数表达式为 $y = \frac{0.8}{x}$;

(3) 解方程组 $\begin{cases} y = 10x \\ y = \frac{0.8}{x} \end{cases}$ 得即可得到点 K 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}, 2\sqrt{2}\right)$;

(4) 依据题意, 根据题意分多种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

解: 设线段 OA 的函数表达式为 $y = kx$,

把 $(0.8, 8)$ 代入 $y = kx$, 得 $8 = 0.8k$,

解得 $k = 10$,

$\therefore$ 线段 OA 的函数表达式为 $y = 10x$,

故答案为: $y = 10x$;

【小问 2 详解】

解: 设曲线 CD 的函数表达式为 $y = \frac{m}{x}$,

把 $(0.1, 8)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 得, $m = 0.1 \times 8 = 0.8$,

$\therefore$ 曲线 CD 的函数表达式为 $y = \frac{0.8}{x}$;

故答案为: $y = \frac{0.8}{x}$;

【小问 3 详解】

解方程组 $\begin{cases} y = 10x \\ y = \frac{0.8}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{5} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 根据题意, 可知点 K 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}, 2\sqrt{2}\right)$;

故答案为: $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}, 2\sqrt{2}\right)$;

【小问 4 详解】

解: 当 $t \leq 0.1$ 时, 由图像知 $S = 8 - 10t \geq 7$, 不合题意;

当 $0.1 < t \leq \frac{\sqrt{2}}{5}$ 时, $S = \frac{0.8}{t} - 10t$,

若 $S \leq 2$, 则 $t \geq 0.2$, $t \leq -0.4$ (不合题意, 舍去)

即 $0.2 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{5}$;

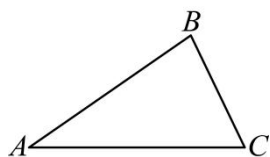
当 $\frac{\sqrt{2}}{5} < t \leq 0.8$ 时, $S = 10t - \frac{0.8}{t}$,

则 $S \leq 2$, 则 $-\frac{1}{5} \leq t \leq 0.4$;

即 $\frac{\sqrt{2}}{5} < t \leq 0.4$;

综上, t 的取值范围为 $0.2 \leq t \leq 0.4$.

21. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 11$, $BC = 7$, $AC = 12$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.



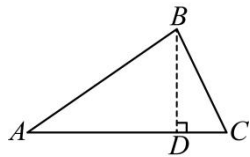
【答案】 $12\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理以及三角形面积, 熟练掌握勾股定理, 正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D , 设 $AD = x$, 则 $CD = 12 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, 由勾股定理得出方程, 解得 $x = 9$, 则 $AD = 9$, 再由勾股定理求出 BD 的长, 然后由三角形面积公式列式计算即可.

【详解】 解: 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ,



则 $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$,

设 $AD = x$, 则 $CD = 12 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, 由勾股定理得: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$,

即 $11^2 - x^2 = 7^2 - (12 - x)^2$,

解得: $x = 9$,

$$\therefore AD = 9,$$

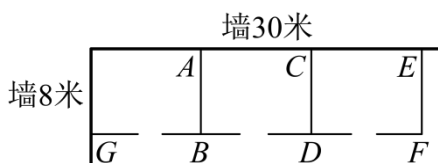
$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{10} = 12\sqrt{10},$$

即 $\triangle ABC$ 的面积为 $12\sqrt{10}$.

四. 解答题: (共 3 小题, 23 题 10 分, 24 题 7 分, 25 题 10 分, 共计 27 分)

22. 云栖小小 mall 的经营者要把如图所示的区域分隔成三个面积相同的商铺出租. 已知铺面两面靠墙, 墙长分别为 8 米和 30 米, 三间商铺都在沿街开一个 1 米宽的门. 经营者共用去板材 45 米 (不计损耗).



(1) 若三间商铺总面积为 180m^2 , 求每间商铺的长和宽分别是多少?

(2) 小王作为个体经商户, 希望同时租下三间铺面开设不同的商铺, 但要求在不增加板材的基础上, 使这三间商铺的总面积达到最大. 已知商铺的租金为每月每平方米 200 元, 请问小王每月需要付给经营者多少租金?

【答案】 (1) 每间商铺的长为 10 米, 宽为 6 米

(2) 小王每月需要付给经营者 38400 元租金

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 一元一次不等式组的应用, 配方法的应用;

(1) 设垂直于墙的一边长 x 米, 可得 $GB = BD = DF = (16 - x)$ 米, 根据三间商铺总面积为 180m^2 列出方程, 求得合适的解即可;

(2) 根据题意求得三间商铺的总面积, 根据配方法可得最大值, 进而可得租金为多少.

【小问 1 详解】

解: 设垂直于墙的一边长 x 米, 则 $GB = BD = DF = \frac{45 + 3 - 3x}{3} = (16 - x)$ 米,

$$3x(16 - x) = 180,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 16x + 60 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 10, \quad x_2 = 6,$$

由题意得:
$$\begin{cases} x \leq 8 \\ 16-x \leq \frac{30}{3} \end{cases}$$

解得: $6 \leq x \leq 8$,

$\therefore x = 6$,

$\therefore 16-x = 10$.

答: 每间商铺的长为10米, 宽为6米;

【小问2详解】

解: 三间商铺的总面积为 $3x(16-x) = -3x^2 + 48x = -3(x-8)^2 + 192$,

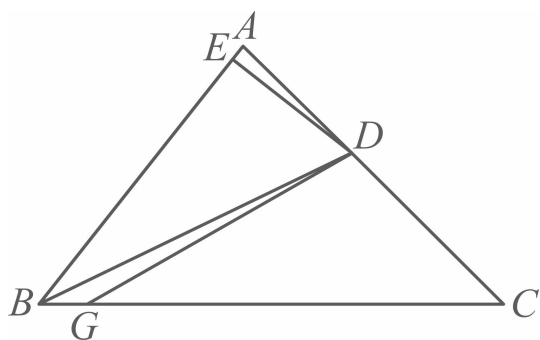
$\therefore 6 \leq x \leq 8$,

$\therefore x = 8$ 时, 三间商铺的总面积最大, 三间商铺的总面积最大为192平方米,

$192 \times 200 = 38400$ (元).

答: 小王每月需要付给经营者38400元租金.

23. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 45^\circ$, 点 D 在 AC 边上, $DE \perp AB$, 垂足为 E , 点 G 在 BC 上, 且 $\angle DGC = 30^\circ$, $DG = 2DE$. 求证: $BE + DE = BC$.

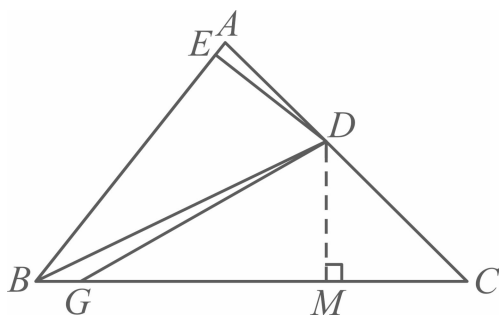


【答案】详见解析

【解析】

【分析】过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M , 根据三角形内角和定理及等腰三角形的判定推出 $CM = DM$, 求出 $DG = 2DM$, 则 $DE = DM = CM$, 证明 $\text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DMB$ (HL), 根据全等三角形的性质求出 $BE = BM$, 再根据全等三角形的性质及线段的和差求解即可.

【详解】证明: 如图, 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ,



$$\because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDM = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle C$$

$$\therefore CM = DM$$

在 $\text{Rt}\triangle DMG$ 中, $\angle DGC = 30^\circ$

$$\therefore DG = 2DM$$

$$\therefore DG = 2DE$$

$$\therefore DE = DM = CM$$

$$\therefore DE \perp AB, \quad DM \perp BC$$

$\therefore \triangle DEB$ 、 $\triangle DMB$ 是直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 和 $\text{Rt}\triangle DMB$ 中,

$$\begin{cases} DE = DM \\ BD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DMB (\text{HL})$$

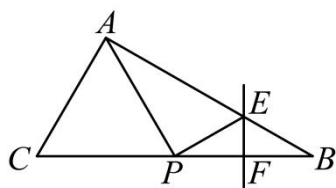
$$\therefore BE = BM$$

$$\therefore BC = BM + CM$$

$$\therefore BE + DE = BC.$$

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质, 含 30° 角直角三角形的性质, 作出合理的辅助线构建全等三角形是解题的关键.

24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{3}$. 点 P 是射线 CB 上一点 (不与点 B 重合), EF 为 BP 的垂直平分线, 交 BP 于点 F , 交射线 AB 于点 E , 连接 PE 、 AP .



(1) $\angle C$ 的度数;

(2) 当点 P 在线段 BC 上时, 设 $BF = x$, $\triangle APE$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 如果 $S_{\triangle APE} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 请直接写 BF 的长.

【答案】(1) 60°

(2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \sqrt{3}x (0 < x \leq 2)$

(3) BF 的长为 2 或 1 或 $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先根据勾股定理逆定理判断出 $\triangle ABC$ 是直角三角形取 BC 的中点 H , 连接 AH , 由直角三角形的性质可得出 $AH = \frac{1}{2}BC = AC$, 再证明 $\triangle AHC$ 是等边三角形, 根据等边三角形的性质即可得出答案.

(2) 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D . 由直角三角形 30° 角所对边等于斜边一半知 $AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, 根据三角形的面积公式即可得到结论;

(3) 当点 P 在线段 BC 上时, 当点 P 在射线 CB 上时, 作 $AM \perp BC$, 根据三角形的面积公式计算可得

【小问 1 详解】

解: 在 $\triangle ABC$ 中,

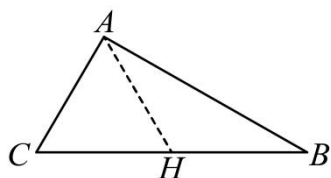
$$\because AC = 2, BC = 4, AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC^2 + AB^2 = 16, BC^2 = 16,$$

$$\therefore AC^2 + AB^2 = BC^2.$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

取 BC 的中点 H , 连接 AH , 如图所示:



备用图

$$\therefore AH = \frac{1}{2}BC = AC, CH = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AH = CH = AC,$$

$\therefore \triangle AHC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle C = 60^\circ.$$

【小问 2 详解】

解：如图 1，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为点 D 。

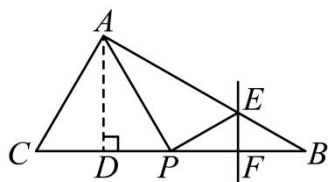


图1

在 $\triangle ADB$ 中，

$$\because \angle ADB = 90^\circ, \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3},$$

$$\text{同理, } EF = \frac{\sqrt{3}}{3} BF = \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$\because EF$ 为 BP 的垂直平分线，

$$\therefore PB = 2BF = 2x,$$

$$\therefore PC = BC - PB = 4 - 2x,$$

$$\therefore y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACP} - S_{\triangle PBE}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (4 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$$\text{即 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3} x^2 + \sqrt{3} x (0 < x \leq 2);$$

【小问 3 详解】

$$\text{解：当点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 上时，由 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3} x^2 + \sqrt{3} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} x,$$

解得 $x = 2$ 或 1 ，

$\therefore BF$ 的长为 2 或 1 ；

当点 P 在射线 CB 上时，如图 2，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，

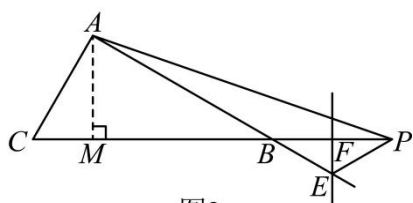


图2

在 $\triangle ADB$ 中, $\angle AMB = 90^\circ$, $\angle ABM = 30^\circ$,

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3},$$

$$\text{同理, } EF = \frac{\sqrt{3}}{3} BF = \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$\because EF$ 为 BP 的垂直平分线,

$$\therefore PB = 2BF = 2x,$$

$$\therefore PC = BC + PB = 4 + 2x,$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = S_{\triangle APC} - S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PBE}$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 2x) \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

$$\text{即 } S_{\triangle APE} = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2 + \sqrt{3} x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore BF \text{ 的长是 } \frac{-3 + \sqrt{17}}{2};$$

$$\text{则如果 } S_{\triangle APE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, BF \text{ 的长为 } 2 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

【点睛】 本题是三角形的综合问题, 解题的关键是掌握勾股定理及其逆定理, 线段垂直平分线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质及三角形的面积公式和分类讨论思想的运用.