

2024 学年第一学期八年级期末考试数学科目

(满分 100 分考试, 时间 90 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含五个大题, 共 26 题;
2. 考生务必按答题要求在答题纸规定位置作答, 在试卷或草稿纸上答题一律无效.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\sqrt{x^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 被开方数中含能开得尽方的因数, 不是最简二次根式, 不符合题意;

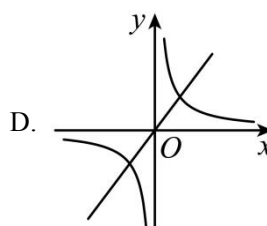
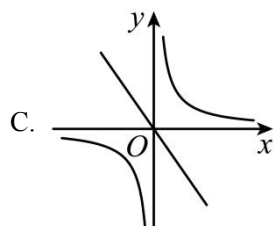
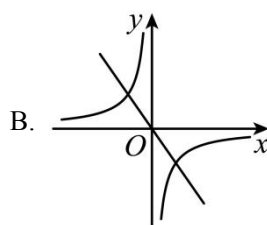
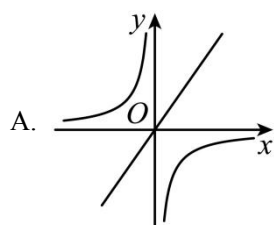
C、 $\sqrt{x^2+1}$, 是最简二次根式, 符合题意;

D、 $\sqrt{x^2} = |x|$, 被开方数中含能开得尽方的因式, 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查的是最简二次根式的概念, 被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式.

2. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大, 那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答.

【详解】解：∵函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

∴ $k < 0$,

∴双曲线在第二、四象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

∴B 选项满足题意

故选：B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键.

3. 方程 $x^2 = 4x$ 的解是 ()

A. $x = 4$

B. $x = 2$

C. $x = 4$ 或 $x = 0$

D. $x = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题可先进行移项得到： $x^2 - 4x = 0$ ，然后提取出公因式 x ，两式相乘为 0，则这两个单项式必有一项为 0.

【详解】解：原方程可化为： $x^2 - 4x = 0$ ，提取公因式： $x(x - 4) = 0$ ，

∴ $x = 0$ 或 $x = 4$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的计算，准确分析计算是解题的关键.

4. 下列各组数据是线段长，其中不能作为直角三角形的三边长的是 ()

A. 1, 1, $\sqrt{2}$

B. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

C. 1, $\sqrt{3}$, 2

D. $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】比较较小的两边的平方和是否等于较长边的平方来判定即可.

【详解】A. $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ ，此三角形是直角三角形，故不符合题意；

B. $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$ ，此三角形是直角三角形，故不符合题意；

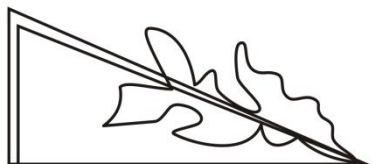
C. $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$ ，此三角形是直角三角形，故不符合题意；

D. $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{4})^2 \neq (\sqrt{5})^2$, 此三角形不是直角三角形, 故符合题意;

故选: D.

【点睛】此题考查勾股定理的逆定理, 三角形的两边的平方和等于第三边的平方, 则此三角形为直角三角形.

5. 如图, 一棵直立的大树在一次强台风中被折断, 折断处离地面 2 米, 倒下部分与地面成 30° 角, 这棵树在折断前的高度为 ()



A. $(2 + 2\sqrt{2})$ 米

B. $(2 + 2\sqrt{3})$ 米

C. 4 米

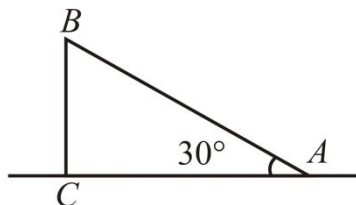
D. 6 米

【答案】D

【解析】

【分析】根据直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 求出折断部分的长度, 再加上离地面的距离就是折断前树的高度.

【详解】解: 如图, 根据题意 $BC = 2$ 米,



$$\therefore \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC = 2 \times 2 = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore 2 + 4 = 6 \text{ 米}.$$

故选: D.

【点睛】本题主要考查了含 30° 度角的直角三角形的性质, 比较简单, 熟记性质是解题的关键.

6. 已知下列命题中:

- ①有两条边分别相等的两个直角三角形全等;
- ②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等;
- ③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等;
- ④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】 解: ①由于 SSA 不能判定三角形全等, 则有两条边分别相等的两个直角三角形不一定全等, 故原命题是假命题;

②由于满足 ASA , 则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等, 故原命题是真命题;

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等, 故原命题是假命题;

④由于两等腰三角形顶角相等, 则他们的底角对应相等, 再结合底相等, 满足 ASA , 故原命题是真命题.

其中真命题的个数是 2 个.

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点, 灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 计算: $\sqrt{16} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据算术平方根的概念求解即可. 算术平方根的定义: 一个非负数的正的平方根, 即为这个数的算术平方根, 由此即可求出结果.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{4^2} = 4$.

故答案为 4.

【点睛】 此题主要考查了算术平方根的定义, 算术平方根的概念易与平方根的概念混淆而导致错误.

8. 函数 $y = \sqrt{3x+6}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【分析】 函数关系中主要有二次根式. 根据二次根式的意义, 被开方数是非负数.

【详解】 解: 根据题意得: $3x+6 \geq 0$,

解得 $x \geq -2$.

故答案为: $x \geq -2$.

【点睛】 本题主要考查自变量的取值范围, 函数自变量的范围一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数为非负数.

9. 在实数范围内分解因式 $x^2 - x - 3 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 令 $x^2 - x - 3 = 0$, 然后用公式法解出方程的根, 即可写出因式分解的结果.

【详解】 解: 令 $x^2 - x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

所以 $x^2 - x - 3 = \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

故答案为 $\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

【点睛】 本题考查实数范围内分解因式, 根据 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 先解方程是关键.

10. 如果正比例函数 $y = (k - 2)x$ 的图象经过第二、四象限, 那么 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $k < 2$

【解析】

【分析】 根据正比例函数的性质列不等式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = (k - 2)x$ 的图象经过第二、四象限,

$\therefore k - 2 < 0$,

解得, $k < 2$.

故填: $k < 2$.

【点睛】 本题主要考查了正比例函数的性质、正比例函数的图象等知识点, 根据正比例函数图象所在的象限列出不等式是解答本题的关键.

11. 近视眼镜的度数 y (度) 与镜片焦距 x (米) 呈反比例, 其函数关系式为 $y = \frac{100}{x}$, 如果近视眼镜镜片的焦距 $x = 0.25$ 米, 那么近视眼镜的度数 y 为_____.

【答案】 400

【解析】

【分析】 把 $x = 0.25$ 代入 $y = \frac{100}{x}$ 计算即可.

【详解】 把 $x = 0.25$ 代入 $y = \frac{100}{x}$, 得

$$y = \frac{100}{0.25} = 400 \text{ 度}.$$

故答案为 400 度.

【点睛】 本题考查了求反比例函数值, 将 $x = 0.25$ 正确代入 $y = \frac{100}{x}$ 是解答本题的关键.

12. 已知直角坐标平面内点 $A(1, 2)$ 和点 $B(-2, 4)$, 则线段 $AB =$ _____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了坐标与图形性质, 勾股定理, 熟记坐标平面内的两点间的距离的求解是解题的关键. 利用勾股定理列式计算即可得解.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(1, 2), B(-2, 4)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(1+2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13},$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

13. 命题“直角三角形两锐角互余”的逆命题是: _____.

【答案】 两个锐角互余的三角形是直角三角形

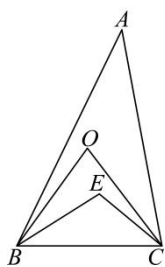
【解析】

【分析】 找出原命题的条件和结论, 再把原命题的条件变为逆命题的结论, 把原命题的结论变为逆命题的条件即可求解.

【详解】 解: 命题“直角三角形两锐角互余”的逆命题是: 两个锐角互余的三角形是直角三角形, 故答案为: 两个锐角互余的三角形是直角三角形.

【点睛】 本题考查了写出原命题的逆命题, 熟练掌握命题的条件和结论是解题的关键.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 O 是边 AB 、 AC 垂直平分线的交点, 点 E 是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 角平分线的交点, 若 $\angle O + \angle E = 180^\circ$, 则 $\angle A =$ _____度.

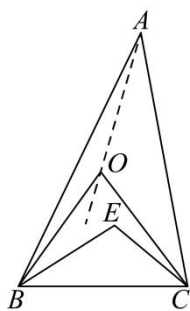


【答案】 36.

【解析】

【分析】连接 AO 并延长, 由垂直平分线和三角形外角的性质可得 $\angle BOC = \angle OBA + \angle OCA + \angle BAC = 2\angle BAC$, 由角平分线和三角形内角和定理可得 $\angle BEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$, 再根据已知条件 $\angle O + \angle E = 180^\circ$ 即可求解.

【详解】解: 如图, 连接 OA 并延长.



$\because$ 点 O 是 AB, AC 的垂直平分线的交点,

$\therefore OA = OB = OC$,

$\therefore \angle OAB = \angle ABO, \angle OAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle BOC = \angle ABO + \angle OAB + \angle OCA + \angle OAC = 2\angle BAC$,

$\because$ 点 E 是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 角平分线的交点,

$\therefore \angle E = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$

$$=90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle BAC,$$

$$\because \angle BOC+\angle E=180^{\circ},$$

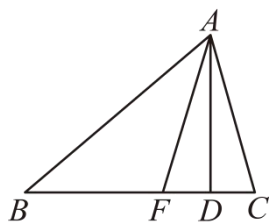
$$\therefore 2\angle BAC+90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle BAC=180^{\circ},$$

$$\therefore \angle BAC=36^{\circ},$$

故答案为 36.

【点睛】 本题考查三角形的内角和定理，线段的垂直平分线的性质，角平分线的定义等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

15. 如图， AD 、 AF 分别是 $\triangle ABC$ 的高和角平分线，已知 $\angle B=36^{\circ}$ ， $\angle C=76^{\circ}$ ，则 $\angle DAF=$ _____ 度.



【答案】 20

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线，三角形高的定义和三角形的内角和定理，解题的关键是掌握以上知识点.

根据角平分线的定义和高的定义结合三角形的内角和定理来解答.

【详解】 解： $\because \angle B=36^{\circ}, \angle C=76^{\circ}$,

$$\therefore \angle BAC=180^{\circ}-\angle B-\angle C=180^{\circ}-76^{\circ}-36^{\circ}=68^{\circ},$$

又 $\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle CAF=68^{\circ} \times \frac{1}{2}=34^{\circ},$$

又 $\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的高线,

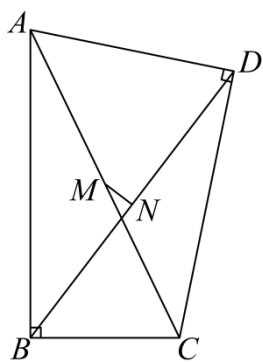
$$\therefore \angle CDA=90^{\circ},$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $\angle DAC=90^{\circ}-\angle C=90^{\circ}-76^{\circ}=14^{\circ}$,

于是 $\angle DAF=34^{\circ}-14^{\circ}=20^{\circ}$.

故答案为： 20.

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=90^{\circ}$ ， $\angle ADC=90^{\circ}$ ， $AC=26$ ， $BD=24$ ， 连接 AC 、 BD ， 取 AC 和 BD 的中点 M 、 N ， 连接 MN ， 则 MN 的长度为_____.



【答案】5

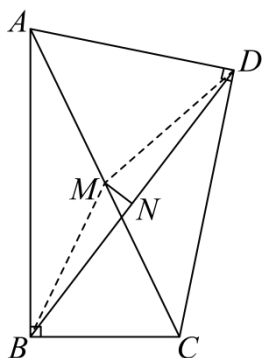
【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边上中线的性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理，灵活应用直角三角形斜边上中线的性质，等腰三角形的判定与性质是解题的关键.

连接 MB, MD ，利用直角三角形斜边上中线的性质得出 $\triangle MBD$ 为等腰三角形，再利等腰三角形“三线合一”

得出 $MN \perp BD, BN = ND = \frac{1}{2}BD = 12$ ，最后利用勾股定理即可求出 MN 的长度.

【详解】 解：如图，连接 MB, MD ，



$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle ADC = 90^\circ, M$ 是 AC 的中点,

$$\therefore MB = \frac{1}{2}AC, MD = \frac{1}{2}AC,$$

$\because AC = 26,$

$$\therefore MB = MD = \frac{1}{2} \times 26 = 13,$$

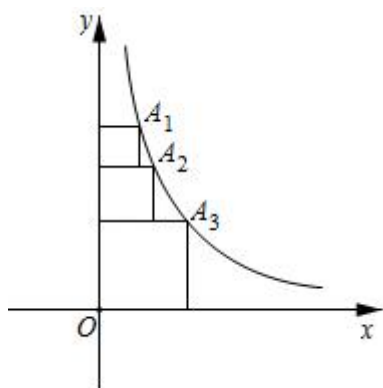
$\because N$ 是 BD 的中点, $BD = 24,$

$$\therefore MN \perp BD, BN = DN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$\therefore MN = \sqrt{MB^2 - BN^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

故答案为：5.

17. 在平面直角坐标系中，已知反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，有若干个正方形如图依次叠放，双曲线经过正方形的一个顶点 (A_1, A_2, A_3 在反比例函数图象上)，以此作图，我们可以建立了一个“凡尔赛阶梯”，那么 A_2 的坐标为 _____.



【答案】 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

【解析】

【分析】根据题意求得 $A_3 (1, 1)$ ，设 A_2 所在的正方形的边长为 m ，则 $A_2 (m, m+1)$ ，由图象上点的坐标特征得到 $k = m(m+1) = 1$ ，解得 $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ，即可求得 A_2 的坐标为 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

【详解】解：∵ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，

∴ A_3 所在的正方形的边长为 1，

∴ $A_3 (1, 1)$ ，

设 A_2 所在的正方形的边长为 m ，则 $A_2 (m, m+1)$ ，

∴ $m(m+1) = 1$ ，

解得 $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (负数舍去)，

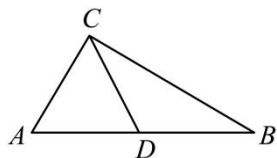
∴ A_2 的坐标为 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ，

故答案为： $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质，正方形的性质，一元二次方程的计算，准确计算是解题的关键.

18. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ， D 是边 AB 上的一点，将 $\triangle BCD$ 沿直线

CD 翻折, 使点 B 落在点 B_1 的位置, 若 $B_1D \perp BC$, 则 BD 的长度为 _____.



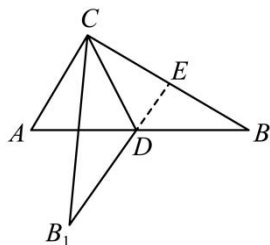
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【详解】延长 B_1D 交 BC 于 E , 由 $B_1D \perp BC$, 根据含 30° 角直角三角形和勾股定理的性质, 推导得 $DE = \frac{1}{2}BD$,

$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$, 设 $BD = x$, 在 $\text{Rt}\triangle B_1CE$ 中根据轴对称、勾股定理的性质, 建立方程计算即可解得答案.

【解答】 延长 B_1D 交 BC 于 E , 如图:



$\therefore B_1D \perp BC$,

$\therefore \angle BED = \angle B_1EC = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = 30^\circ$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$,

设 $BD = x$,

$\therefore$ 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折, 使点 B 落在点 B_1 的位置,

$\therefore B_1D = x$,

$\therefore BC = 3$,

$\therefore CE = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $B_1C = BC = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle B_1CE$ 中, $B_1E^2 + CE^2 = B_1C^2$,

$\therefore (x + \frac{1}{2}x)^2 + (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = 3^2$

$$\therefore x(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ (舍去) 或 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了勾股定理、一元二次方程、轴对称、含 30° 角直角三角形的知识；解题的关键是熟练掌握勾股定理；轴对称、含 30° 角直角三角形、一元二次方程的性质，从而完成求解.

三、计算题 (本大题共 2 题, 满分 10 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{8}$.

【答案】 $2\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 先进行分母有理化、化简二次根式，再去括号，计算加减即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{8} \\ &= \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - (\sqrt{5}-1) + 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{5}-2 - \sqrt{5} + 1 + 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简和混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

20. 解方程: $2x(x-2) = x^2 - 3$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，熟练掌握选择合适的方法解一元二次方程是解题的关键. 本题可以利用配方法或公式法求解即可.

【详解】解: $2x(x-2) = x^2 - 3$,

方程变形得: $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$$\because a=1, b=-4, c=3, \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times 3=4,$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2}=2\pm 1,$$

$$\therefore x_1=2-1=1, x_2=2+1=3,$$

$$\text{即 } x_1=1, x_2=3.$$

四、解答题 (本大题共 5 题, 21-24 每题 6 分, 25 题 8 分, 满分 32 分)

21. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个实数根, 请求出 m 的最大整数值.

【答案】 m 的最大整数值为 0

【解析】

【分析】 根据方程有两个实数根, 得到根的判别式大于等于 0, 确定出 m 的范围, 进而求出最大整数值即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个实数根,

$$\therefore b^2-4ac=(2m)^2-4(m-1)(m+3)=4m^2-(4m^2+8m-12)=4m^2-4m^2-8m+12=-8m+12\geq 0, m-1\neq 0,$$

$$\text{解得: } m\leq \frac{3}{2} \text{ 且 } m\neq 1,$$

则 m 的最大整数值为 0.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式的应用, 准确计算是解题的关键.

22. 为了让我们的小朋友们有更好的学习环境, 我校 2020 年投资 110 万元改造硬件设施, 计划以后每年以相同的增长率进行投资, 到 2022 年投资额将达到 185.9 万元.

(1) 求我校改造硬件设施投资额的年平均增长率;

(2) 从 2020 年到 2022 年, 这三年我校将总共投资多少万元?

【答案】 (1) 我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 30%; (2) 从 2020 年到 2022 年, 这三年我校将总共投资 438.9 万元

【解析】

【分析】 (1) 设我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 x , 利用 2022 年投资额 = 2020 年投资额 $\times$ (1 + 年平均增长率)², 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其正值即可得出结论;

(2) 利用这三年我校总共投资的金额 = 2020 年投资额 + 2020 年投资额 $\times$ (1 + 年平均增长率) + 2022 年投资额, 即可求出结论.

【详解】 解: (1) 设我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 x ,

依题意得： $110(1+x)^2 = 185.9$,

解得： $x_1 = 0.3 = 30\%$, $x_2 = -2.3$ (不合题意, 舍去).

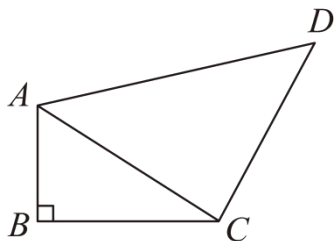
答： 我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 30% .

$$\begin{aligned} & (2) \quad 110 + 110 \times (1 + 30\%) + 185.9 \\ & = 110 + 143 + 185.9 \\ & = 438.9 \text{ (万元)}. \end{aligned}$$

答： 从 2020 年到 2022 年， 这三年我校将总共投资 438.9 万元

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用以及有理数的混合运算， 解题的关键是： (1) 找准等量关系， 正确列出一元二次方程； (2) 根据各数量之间的关系， 列式计算.

23. 如图： 已知， 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ 于点 B ， $AB = 9$ ， $BC = 12$ ， $CD = 15$ ， $DA = 15\sqrt{2}$ ， 求四边形 $ABCD$ 的面积.



【答案】 $\frac{333}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理及勾股定理的逆定理， 熟练掌握勾股定理及勾股定理逆定理是解题的关键. 先利用勾股定理求出 AC ， 再利用勾股定理逆定理判断 $\triangle ACD$ 为直角三角形， 且 $\angle ACD = 90^\circ$ ， 再分别求 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 的面积即可.

【详解】 解： $\because AB \perp BC$ ， $AB = 9$ ， $BC = 12$ ，

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中， } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 15,$$

$$\because CD = 15, DA = 15\sqrt{2},$$

$$\therefore CD^2 = 15^2 = 225, DA^2 = (15\sqrt{2})^2 = 450, AC^2 = 225,$$

$$\therefore CD^2 + AC^2 = DA^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形， 且 $\angle ACD = 90^\circ$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54,$$

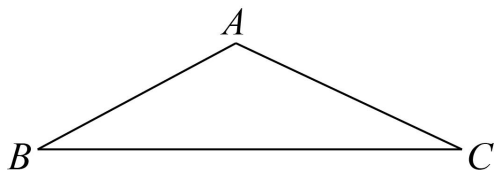
$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \times 15 \times 15 = \frac{225}{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 54 + \frac{225}{2} = \frac{333}{2}.$$

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B = 30^\circ$.

(1) 在 BC 边上求作一点 N , 使得 $AN = BN$; (不要求写作法, 但要保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 求证: $CN = 2BN$.



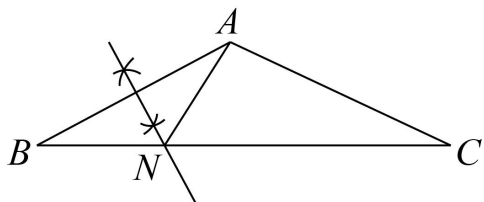
【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【详解】 (1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 N , 点 N 即为所求;

(2) 根据等腰三角形的性质计算出 $\angle C$ 的度数, 再计算出 $\angle CAN$ 的度数, 然后根据在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 可得 $CN = 2AN$, 进而得到 $CN = 2BN$.

【解答】 (1) 解: 如图, 点 N 即为所求;



(2) 证明: 连接 AN .

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2\angle B = 120^\circ.$$

$$\because AN = BN,$$

$$\therefore \angle BAN = \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle NAC = \angle BAC - \angle NAB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

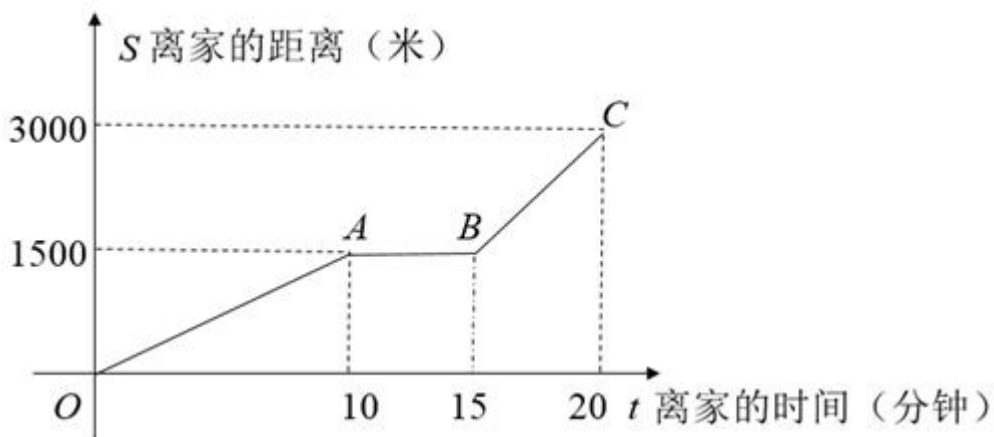
$$\therefore CN = 2AN.$$

$$\therefore CN = 2BN.$$

【点睛】 此题主要考查了作图, 等腰三角形的性质以及含 30° 度角的直角三角形, 关键是正确画出图形, 掌

握在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半。

25. 初二年级小王同学坚持环保理念，每天骑自行车上学，学校离家 3000 米。某天，小王上学途中因自行车发生故障，修车耽误了一段时间后继续骑行，还是按时赶到了学校，如图描述的是他离家的距离 S 和离家的时间 t 之间的函数图像，根据图像解决下列问题：



- (1) 修车时间为_____分钟；
- (2) 到达学校时共用时间_____分钟；
- (3) 小王从离家时到自行车发生故障时，离家的距离 S 和离家的时间 t 之间的函数关系式为_____定义域为_____；
- (4) 自行车故障排除后他的平均速度是每分钟_____米。

【答案】 (1) 5 分钟； (2) 20 分钟； (3) $S = 150t$ ； $0 \leq x \leq 10$ ； (4) 300。

【解析】

【分析】 (1) 线段 AB 表示修车时段，时间为 5 分钟；

(2) 根据 C 点横坐标为 20，得出到达学校时共用时间；

(3) 观察图象，获取有关信息：线段 OA 表示故障前行使情况：10 分钟行使了 1500 米；

(4) 根据线段 BC 表示修车后行使情况：5 分钟行使了 1500 米，即可求出行驶速度。

【详解】 解：(1) 线段 AB 表示修车时段，时间为 5 分钟；

故答案为：5；

(2) 利用 C 点横坐标为 20，得出从家到学校用时 20 分钟；

故答案为：20；

(3) 由图象可知：小王从离家时到自行车发生故障时，10 分钟行使了 1500 米，故速度为 150 米/分，图象过原点，所以函数关系式为 $S = 150t (0 \leq t \leq 10)$ ；

故答案为： $S = 150t$ ； $0 \leq t \leq 10$ ；

(4) 线段 BC 表示修车后行使情况：5 分钟行使了 1500 米，
故速度为 $1500 \div 5 = 300$ (米/分)；
故答案为：300.

【点睛】此题考查一次函数及其图象的应用，同学们要注意分析其中的“关键点”，还要善于分析各图象的变化趋势，能够从图象中获取相关信息是关键.

五、综合题：(本大题只有 1 题，满分 10 分)

26. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CA = CB$ ，点 D 、 E 在线段 AB 上.

(1) 如图 1，若 $CD = CE$ ，求证： $AD = BE$ ；

(2) 如图 2，若 $\angle DCE = 45^\circ$ ，求证： $DE^2 = AD^2 + BE^2$ ；

(3) 如图 3，若点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点， $\angle BPC = 135^\circ$ ，设 $AP = a$ 、 $BP = b$ 、 $CP = c$ ，请直接写出 a 、 b 、 c 之间的数量关系.

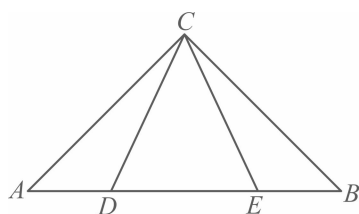


图1

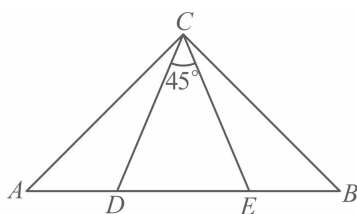


图2

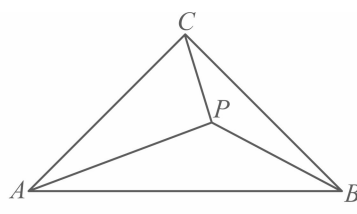


图3

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；(3) $a^2 = b^2 + 2c^2$ ，见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $CA = CB$ 得 $\angle A = \angle B$ ，由 $CD = CE$ 得 $\angle CEA = \angle CDB$ ，则 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ，得 $AE = BD$ ，即可转化为 $AD = BE$ ；

(2) 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$ ，联结 EF ，则 $BF = AD$ ，证明 $\triangle FCE \cong \triangle DCE$ ，得 $FE = DE$ ，再证明 $\angle EBF = 90^\circ$ ，则 $FE^2 = BF^2 + BE^2$ ，即可证得 $DE^2 = AD^2 + BE^2$ ；

(3) 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$ ，联结 PG ，则 $BG = AP$ ， $GC = PC$ ， $\angle PCG = 90^\circ$ ，所以 $PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2$ ，再证明 $\angle BPG = 90^\circ$ ，则 $BG^2 = BP^2 + PG^2$ ，可证得 $AP^2 = BP^2 + 2PC^2$ ，即 $a^2 = b^2 + 2c^2$.

【详解】解：(1) 证明：如图 1， $\because CA = CB$ ，

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$$\because CD = CE,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\therefore AE - DE = BD - DE,$$

$$\therefore AD = BE.$$

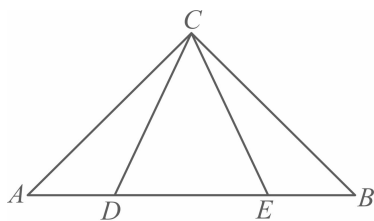


图1

(2) 证明: 如图 2, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 联结 EF ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad CA = CB,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle A = 45^\circ,$$

由旋转得 $CF = CD$, $\angle BCF = \angle ACD$,

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle BCF + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCE,$$

$$\because CE = CE,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE \quad (SAS),$$

$$\therefore FE = DE,$$

$$\because \angle CBF = \angle A = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore FE^2 = BF^2 + BE^2,$$

$$\because BF = AD,$$

$$\therefore DE^2 = AD^2 + BE^2.$$

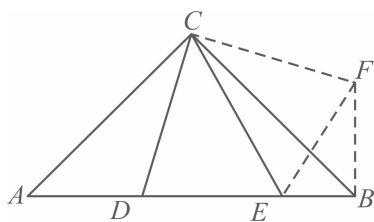


图2

$$(3) \quad a^2 = b^2 + 2c^2,$$

理由如下:

如图 3, 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 联结 PG ,

由旋转得 $GC = PC$, $\angle PCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CPG = \angle CGP = 45^\circ, \quad PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2,$$

$$\therefore \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BPG = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BG^2 = BP^2 + PG^2,$$

$$\therefore BG = AP,$$

$$\therefore AP^2 = BP^2 + 2PC^2,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 2c^2.$$

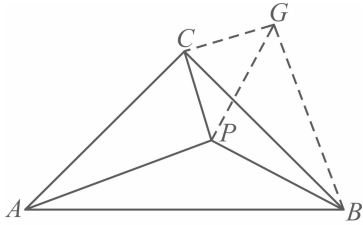


图3

【点睛】此题考查等腰三角形的性质、等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质、旋转的性质、勾股定理等知识，根据旋转的性质作辅助线是解题的关键.