

2024-2025 学年上海市长宁区延安初级中学八年级（上）期末数学试卷

一、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. 在下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{2a}$

B. $\sqrt{3a^2}$

C. $\sqrt{a^3}$

D. $\sqrt{a^4}$

【答案】C

【解析】

【分析】先将各选项化简，再找到被开方数为 a 的选项即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{2a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a|$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{a^3} = |a|\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D、 $\sqrt{a^4} = a^2$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了同类二次根式的定义，即：化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

2. 用配方法解方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 时，配方结果正确的是（ ）

A. $(x-1)^2 = 2$

B. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

C. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

D. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

首先把常数项移到等号右边，然后方程两边都加上一次项系数的一半的平方，配方即可.

【详解】解：移项，得 $x^2 - x = 1$,

配方， $x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$,

则 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

故选：B.

3. 一元二次方程 $kx^2 - 6x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是（ ）

A. $k < 3$

B. $k < 3$ 且 $k \neq 0$

C. $k \leq 3$

D. $k \leq 3$ 且 $k \neq 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义和一元二次方程根的判别式求解即可；

【详解】 解：由题意得：
$$\begin{cases} (-6)^2 - 12k > 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$$

解得： $k < 3$ 且 $k \neq 0$

故选： B.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式，同时满足该方程的二次项系数不为 0；熟练运用根的判别式是解题关键.

4. 下列关于反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的说法中，错误的是（ ）

A. 点 $(3, -1)$ 在函数图象上

B. 函数图象位于第二、四象限

C. 当 $x > 3$ 时， $-1 < y < 0$

D. 函数值 y 随 x 的增大而增大

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质，解题的关键是熟练掌握反比例函数的图象与性质.

分别根据反比例函数图象上点的坐标特征、函数图象所在象限、自变量取值范围内函数值的范围以及函数的增减性来判断各选项.

【详解】 解：解： A、当 $x = 3$ 时， $y = -1$ ，故点 $(3, -1)$ 在函数图象上，选项说法正确，不符合题意；

B、 $k = -3 < 0$ ，故反比例函数图象在第二，四象限，选项说法正确，不符合题意；

C、当 $x > 3$ 时， $-1 < y < 0$ ，选项说法正确，不符合题意；

D、在每个象限内，函数值 y 随 x 的增大而增大，选项说法错误，符合题意.

故选： D.

5. 下列命题中，逆命题是真命题的是（ ）

A. 如果两个直角三角形全等，那么它们的斜边相等

B. 如果两个实数的商为 -1 ，那么这两个实数互为相反数

C. 如果 $a = b$ ，那么 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$

D. 如果一个三角形是等腰三角形，那么这个三角形两腰上的高相等

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了逆命题以及真假命题，掌握相关定理是解题关键.

把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，把四个选项中的命题的结论与条件互换可得到逆命题，再判断出真假即可.

【详解】解：A、逆命题为：如果两个直角三角形的斜边相等，那么它们全等，错误，是假命题，不符合题意；

B、逆命题为：如果两个实数互为相反数，那么它们的商为 -1 ，错误，是假命题，不符合题意；

C、逆命题为：如果 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$ ，那么 $a = b$ ，错误，是假命题，不符合题意；

D、逆命题为如果三角形两边上的高相等，那么这个三角形是等腰三角形，正确，是真命题，符合题意；
故选：D.

6. 行驶中的汽车，在刹车后由于惯性的作用，还要继续向前滑行一段距离才能停止，这段距离称为“刹车距离”. 为了测定某种型号汽车的刹车性能（车速不超过 120km/h ），对这种型号的汽车进行了测试，测得的数据如表：

刹车时的速度（ km/h ）	0	10	20	30	40	50	...
刹车距离（ m ）	0	2.5	5	7.5	10	12.5	...

下列说法中，错误的是（ ）

A. 自变量是刹车时的速度

B. 刹车时的速度每小时增加 10km ，刹车距离就增加 2.5m

C. 当刹车距离为 15m 时，刹车时的速度为 70km/h

D. 当刹车时的速度为 80km/h 时，与其前方距离 25m 的车辆不会追尾

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查常量和变量，理解常量和变量的定义以及表格中对应值的变化规律是正确解答的关键. 根据常量和变量的定义以及表格中对应值的变化规律进行判断即可.

【详解】解：A. 刹车距离随着刹车时的速度的变化而变化，所以刹车时的速度是自变量，刹车距离是因变量，因此选项A不符合题意；

B. 由表格中刹车距离与刹车时的速度对应值的变化规律可知，刹车时的速度每小时增加 10km ，刹车距离就增加 2.5m ，因此选项B不符合题意；

C. 表格中刹车距离与刹车时的速度对应值的变化规律可知, 当刹车距离为15m时, 刹车时的速度为60km/h, 因此选项C符合题意;

D. 当刹车时的速度为80km/h时, 刹车距离为 $2.5 \times 8 = 20$ (m), 而 $20 < 25$, 所以与其前方距离25m的车辆不会追尾, 因此选项D不符合题意.

故选: C.

二、填空题 (每题3分, 共36分)

7. 当实数 x _____时, $\sqrt{-\frac{2}{x+1}}$ 有意义.

【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 根据题意得 $-\frac{2}{x+1} > 0$, 解不等式即可求解, 掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】 解: 要使 $\sqrt{-\frac{2}{x+1}}$ 有意义, 则 $-\frac{2}{x+1} > 0$,

$$\text{即 } \frac{2}{x+1} < 0,$$

$$\therefore x+1 < 0,$$

$$\therefore x < -1,$$

故答案为: $x < -1$.

8. 一元二次方程 $2x^2 + x = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的求解, 解题的关键是掌握因式分解法解一元二次方程. 通过对给定的一元二次方程进行因式分解, 将其转化为两个一次方程, 进而求解方程的根.

【详解】 解: $2x^2 + x = 0$,

$$x(2x+1) = 0,$$

则 $x = 0$ 或 $2x+1 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2},$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, 那么 $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是求函数值, 解题关键是熟练掌握求函数值的方法.

将 $-\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{x+2}{x+1}$ 即可得解.

【详解】 解: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{1}{2}+1} = 3$.

故答案为: 3.

10. 化简: $\sqrt{\frac{m+n}{m-n}} (m > n > 0) =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简, 解题的关键是利用分母有理化和二次根式的性质进行化简.

先将被开方数的分子分母同乘分母进行分母有理化, 再根据二次根式性质化简.

【详解】 解: $\because m > n > 0$,

$\therefore m-n > 0, m+n > 0$,

$\therefore \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} = \sqrt{\frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}} = \frac{\sqrt{(m+n)(m-n)}}{|m-n|} = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n},$

故答案为: $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$.

11. 在实数范围内因式分解 $2x^2 + 4x - 3 =$ _____.

【答案】 $2\left(x + \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 当要求在实数范围内进行因式分解时, 分解的式子的结果一般要分到出现无理数为止. $2x^2+4x-3$

不是完全平方式，所以只能用求根公式法分解因式.

【详解】 $2x^2+4x-3=0$ 的解是 $x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$,

所以可分解为 $2x^2+4x-3=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

即: $2x^2+4x-3=2\left(x+\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

故答案为: $2\left(x+\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查实数范围内的因式分解，因式分解的步骤为：一提公因式；二看公式. 在实数范围内进行因式分解的式子的结果一般要分到出现无理数为止.

求根公式法分解因式: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, 其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

12. 到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是_____.

【答案】 以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆

【解析】

【分析】 根据到定点的距离等于定长的点都在圆上，反过来圆上各点到定点的距离等于定长，得出结论到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

【详解】 解：到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

故答案为：以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

【点睛】 本题考查了学生的理解能力,理解到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆是解题的关键.

13. 已知直角坐标平面上点 $P(-1,3)$ 和点 $Q(2,1)$ ，则 PQ 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面内两点间距离公式，熟练掌握平面直角坐标系中两点间距离公式，是解题的关键. 根据点 $P(-1,3)$ 和点 $Q(2,1)$ ，结合平面内两点间距离公式进行求解即可.

【详解】 解：∵ 直角坐标平面上点 $P(-1,3)$ 和点 $Q(2,1)$,

$$\therefore PQ = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}.$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

14. 已知正比例函数 $y=-2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象的一个交点坐标为 $(-1, 2)$, 则另一个交点的坐标为 _____.

【答案】 $(1, -2)$

【解析】

【分析】 根据正比例函数与反比例函数的交点关于原点对称进行解答即可:

【详解】 $\because$ 正比例函数与反比例函数的图象均关于原点对称,

$\therefore$ 两函数的交点关于原点对称.

$\therefore$ 一个交点的坐标是 $(-1, 2)$,

$\therefore$ 另一个交点的坐标是 $(1, -2)$.

故答案为: $(1, -2)$.

15. 在直角三角形中, 两条直角边的长分别是 12 和 5, 则斜边上的高为 _____.

【答案】 $\frac{60}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理的应用和与三角形高有关的计算, 先根据勾股定理求出该直角三角形的斜边长, 再用等面积法求解即可.

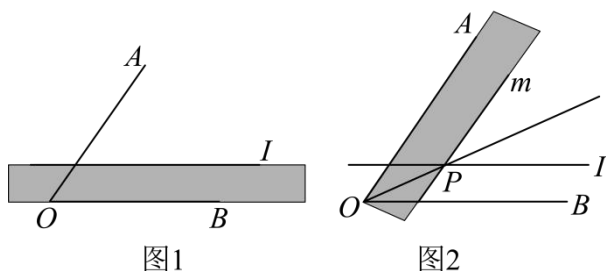
【详解】 由题意得: 该直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

设斜边上的高为 h

$\therefore \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = \frac{1}{2} \times 13h$, 解得: $h = \frac{60}{13}$

故答案为: $\frac{60}{13}$.

16. 小明同学提出: 用一把直尺就可以画出一个角的平分线. 具体操作如下: 首先把直尺的一边与 $\angle AOB$ 的一边 OB 贴合, 沿着直尺的另一边画直线 l (如图 1); 随后移动该直尺, 把直尺的一边与 $\angle AOB$ 的一边 OA 贴合, 沿着直尺的另一边画直线 m (如图 2), 直线 l 与直线 m 交于点 P , 则射线 OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线. 请指出这种画法的依据是 (请写本学期所学的数学知识): _____.



【答案】 HL

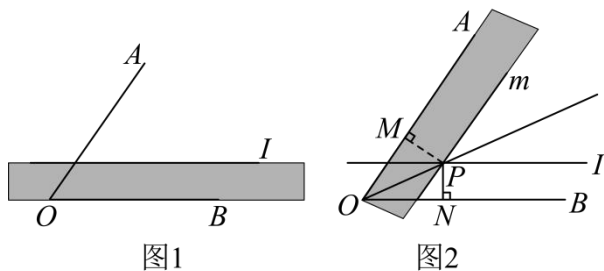
【解析】

【分析】 本题考查角平分线的判定以及全等三角形的判定定理，解题的关键是利用直尺宽度相等构造全等直角三角形，进而得出角平分线.

过点 P 作 $PM \perp OA$ 于点 M , $PN \perp OB$ 于点 N . 因为直尺的宽度相等, 所以 $PM = PN$, 同时 $OP = OP$ (公共边), $\angle PMO = \angle PNO = 90^\circ$, 证明 $\text{Rt}\triangle OPM \cong \text{Rt}\triangle OPN$ (HL),

可得 $\angle AOP = \angle BOP$, 即 OP 平分 $\angle AOB$, 因此这种画法的依据是 HL.

【详解】 解: 如图 2 中, 过点 P 作 $PM \perp OA$ 于点 M , $PN \perp OB$ 于点 N .



$\therefore$ 尺的宽度相等,

$\therefore PM = PN$,

$\because PM \perp OA, PN \perp OB$,

$\therefore \angle PMO = \angle PNO = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle OPM$ 和 $\text{Rt}\triangle OPN$ 中,

$$\begin{cases} OP = OP \\ PM = PN \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle OPM \cong \text{Rt}\triangle OPN$ (HL),

$\therefore \angle POM = \angle PON$,

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$,

画法的依据是: HL.

故答案为: HL.

17. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 4$, $AB = AC$, 点 P 在边 AB 上, 且 $AP = CP$, 则 BP 的长为 _____.

【答案】 $4 - 2\sqrt{2}$

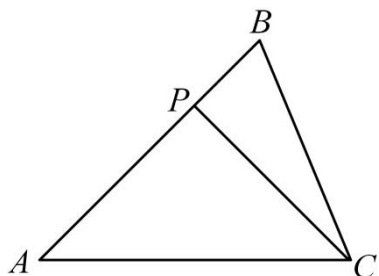
【解析】

【分析】 此题主要考查了等腰三角形的判定和性质, 勾股定理, 依题意得 $AB = AC = 4$, 根据 $AP = CP$ 得

$\angle PCA = \angle A = 45^\circ$ ，则 $\triangle PAC$ 是等腰直角三角形，由此得 $AP = 2\sqrt{2}$ ，然后根据 $BP = AB - AP$ 即可得出

答案. 熟练掌握等腰三角形的判定和性质是解决问题的关键.

【详解】解：如图所示：



在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore AC = 4$ ，

$\because$ 点 P 在边 AB 上，且 $AP = CP$ ，

$\therefore \angle PCA = \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle APC = 180^\circ - (\angle PCA + \angle A) = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle PAC$ 是等腰直角三角形，

由勾股定理得： $AC = \sqrt{AP^2 + CP^2} = \sqrt{2}AP$ ，

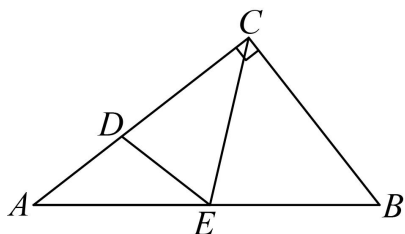
$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore BP = AB - AP = 4 - 2\sqrt{2}$.

故答案为： $4 - 2\sqrt{2}$.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ，点 D 、 E 分别在 AC 、 AB 上， $AD = DE$ ，连接 CE ，如果在 $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 中，一个为等腰三角形，另一个为直角三角形，那么 AD 的长为

_____.



【答案】2 或 $\frac{7}{8}$

【解析】

【分析】 本题主要考查勾股定理，等腰三角形的判定和性质，三角形内角和定理应用，熟练掌握相关的判

定和性质，是解题的关键。分两种情况：①当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形，且 $DC = DE$ 时，② $\triangle CDE$ 为直角三角形，且 $\angle CED = 90^\circ$ ， $\triangle CEB$ 为等腰三角形，且 $CE = CB = 3$ ，分别画出图形，求出结果即可。

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3$ ，

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle A = \angle AED,$$

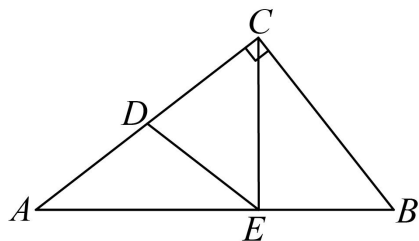
若 $\angle CDE = 90^\circ$ ，则 $\angle ADE = 90^\circ$ ，

此时 $\angle A = 45^\circ$ ，与题意不符；

在 $\triangle CEB$ 中， $\angle BCE < 90^\circ$ ， $\angle B < 90^\circ$ ，

$\therefore$ 只有 $\angle CEB$ 可能为 90° ，

①当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形，且 $DC = DE$ 时，



此时 $CD = AD = DE = \frac{1}{2}AC = 2$ ，

$$\therefore \angle A = \angle AED, \angle DCE = \angle CED,$$

$$\therefore \angle A + \angle AED + \angle DEC + \angle DCE = 180^\circ,$$

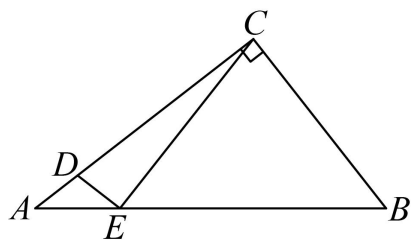
$$\therefore \angle AED + \angle DEC = 90^\circ,$$

即 $\angle AEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CEB = 90^\circ$ ，即 $\triangle CEB$ 为直角三角形，符合题意，

故 $AD = 2$ ；

② $\triangle CDE$ 为直角三角形，且 $\angle CED = 90^\circ$ ， $\triangle CEB$ 为等腰三角形，且 $CE = CB = 3$ ，



设 $AD = x$ ，则 $DE = x$ ， $CD = 4 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $DE^2 + CE^2 = CD^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + 3^2 = (4 - x)^2,$$

解得 $x = \frac{7}{8}$,

故 $AD = \frac{7}{8}$;

综上, AD 的值为 2 或 $\frac{7}{8}$.

故答案为: 2 或 $\frac{7}{8}$.

三、解答题 (共 52 分)

19. $\sqrt{32} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先把二次根式化为最简二次根式, 然后合并即可

【详解】 解: 原式 $= 4\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = 5\sqrt{2}$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法和除法法则是解题的关键.

20. 解方程.

(1) $2(x+1)^2 = 3$

(2) $x(x-2) = -4(x-2)$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$, $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1$

(2) $x_1 = -4, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法, 常用的方法有直接开平方法、配方法、因式分解法、求根公式法, 灵活选择合适的方法是解答本题的关键.

(1) 用直接开平方法求解即可;

(2) 移项后用因式分解法求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because 2(x+1)^2 = 3$,

$\therefore (x+1)^2 = \frac{3}{2}$,

$$\therefore x+1=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-1, \quad x_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}-1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because x(x-2)=-4(x-2),$$

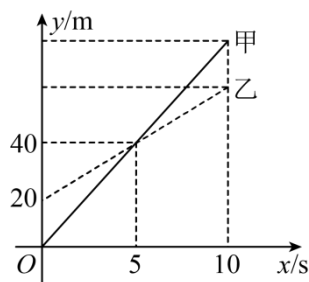
$$\therefore x(x-2)+4(x-2)=0,$$

$$\therefore (x-2)(x+4)=0,$$

$$\therefore x+4=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\therefore x_1=-4, x_2=2.$$

21. 甲无人机从地面起飞, 乙无人机从距离地面一定高度的楼顶起飞, 两架无人机同时匀速上升 10 秒. 甲、乙两架无人机所在的位置距离地面的高度 y (米) 与无人机上升的时间 x (秒) 之间的关系如图所示.



- (1) 楼顶距离地面的高度是 _____ 米;
- (2) 乙无人机上升的速度是每分钟 _____ 米;
- (3) 无人机上升 _____ 秒后, 两架无人机的高度差为 10 米.

【答案】(1) 20 (2) 240

(3) 2.5 或 7.5

【解析】

【分析】本题考查用函数图象表示变量之间的关系, 一次函数的实际应用, 从函数图象中有效的获取信息, 是解题的关键:

- (1) 根据乙无人机从距离地面一定高度的楼顶起飞, 直接从图象获取信息作答即可;
- (2) 根据图象可知, 乙无人机 5 分钟升高 20 米, 进行求解即可;
- (3) 求出甲无人机的速度, 求出两个解析式, 根据两架无人机的高度差为 10 米, 列出方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由图象可知: 楼顶距离地面的高度是 20 米,

故答案为：20；

【小问2详解】

$$(40-20) \div 5 = 4 \text{ 米/秒} = 240 \text{ 米/分钟},$$

故答案为：240；

【小问3详解】

甲无人机的速度为： $40 \div 5 = 8$ 米/秒，

$$\therefore y_{\text{甲}} = 8x,$$

由(2)知：乙无人机的速度为4米/秒，

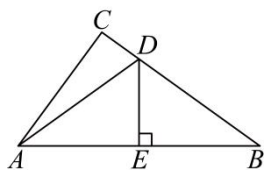
$$\therefore y_{\text{乙}} = 4x + 20$$

$$\text{由题意得：} |8x - (4x + 20)| = 10,$$

$$\text{解得：} x = 2.5 \text{ 或 } x = 7.5,$$

故答案为：2.5 或 7.5.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线 DE 分别交 BC 、 AB 于点 D 、 E ，连结 AD 。



(1) 如果 $AC=6$ ， $BD=\frac{25}{4}$ ， $CD=\frac{7}{4}$ ，求证： $\angle C=90^\circ$ ；

(2) 如果 $\angle C=90^\circ$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ， $AB=4$ ，求 AC 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】(1) 先根据垂直平分线的性质 $AD=BD=\frac{25}{4}$ ，再根据勾股逆定理的判定即可解决问题；

(2) 先根据垂直平分线的性质得到 $\angle DAB=\angle B$ ，再根据角平分线的定义可得 $\angle DAB=\angle B=\angle CAD$ ，进而求出 $\angle B=30^\circ$ ，再根据直角三角形中 30° 角所对的边是斜边的一半即可求解；

【小问1详解】

证明： $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线， $BD=\frac{25}{4}$ ，

$$\therefore AD=BD=\frac{25}{4},$$

$$\text{在} \triangle ACD \text{中}, AC^2 + CD^2 = 6^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}, \quad AD^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{625}{16},$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B = \angle CAD,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

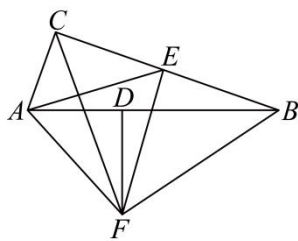
$$\therefore \angle DAB + \angle B + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 2.$$

【点睛】 本题主要考查了垂直平分线的性质，勾股定理的逆定理，等腰三角形的性质，角平分线的定义等知识点，解决此题的关键是合理熟练的运用这些知识点。

23. 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D, E 分别在边 AB, BC 上, $AC = AD$, $DF \perp AB$, $AE = AF$, 且 $EF \perp BC$.



(1) 求证: $CE = DF$;

(2) 连接 CF , 如果 $\angle ACF = \angle ABF$. 求证: 点 F 在 BC 的垂直平分线上.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 此题考查了全等三角形的判定与性质，线段垂直平分线的判定，熟记全等三角形的判定定理与性质定理是解题的关键.

(1) 利用 HL 证明 $\text{Rt} \triangle ACE \cong \text{Rt} \triangle ADF$, 根据全等三角形的性质即可得证;

(2) 根据直角三角形的性质求出 $\angle BFD = \angle ECF$ ，利用 ASA 证明 $\triangle FCE \cong \triangle BFD$ ，根据全等三角形的性质求出 $FC = FB$ ，结合 $EF \perp BC$ 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because DF \perp AB, \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADF, \triangle ACE$ 是直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AF \\ AC = AD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ACE \cong \text{Rt}\triangle ADF (\text{HL}),$

$\therefore CE = DF;$

【小问 2 详解】

$\because EF \perp BC, DF \perp AB,$

$\therefore \angle CEF = 90^\circ, \angle BDF = 90^\circ,$

$\therefore \angle BFD + \angle ABF = 90^\circ,$

又 $\because \angle ACB = \angle ACF + \angle ECF = 90^\circ, \angle ACF = \angle ABF,$

$\therefore \angle BFD = \angle ECF,$

在 $\triangle FCE$ 和 $\triangle BFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ECF = \angle BFD \\ CE = DF \\ \angle CEF = \angle BDF = 90^\circ \end{cases},$$

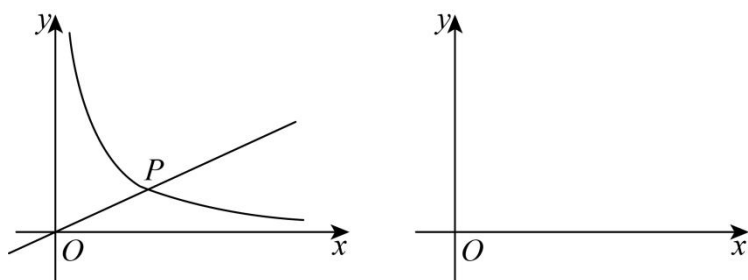
$\therefore \triangle FCE \cong \triangle BFD (\text{ASA}),$

$\therefore FC = FB,$

又 $\because EF \perp BC,$

$\therefore$ 点 F 在 BC 的垂直平分线上.

24. 定义: 我们把形如 $y = \frac{x}{k} (k \neq 0)$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的两个函数, 叫作互为倒数函数, 其中, k 称为这两个函数的特征数. 比如: $y = \frac{x}{2}$ 与 $y = \frac{2}{x}$ 互为倒数函数, 2 为这两个函数的特征数. 如图, 互为倒数函数的两个函数的图象在第一象限内交于点 P , 点 P 的坐标为 (m, n) ,



备用图

(1) 如果 $m+n=5$,

①求这两个函数的特征数;

②如果点 Q 是线段 OP 上一点 (不与点 O 、 P 重合), 过点 Q 作 $QA \perp x$ 轴, 交反比例函数图象于点 A , 连接 AO , 若 $\triangle AOQ$ 的面积为 1, 求点 Q 的坐标;

(2) 如果点 O 绕点 P 顺时针旋转 90° 后, 恰好落在该反比例函数图象上, 请直接写出 m 的值: _____ (无需写出过程).

【答案】 (1) ①这两个函数的特征数为 4; ② $\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数点的坐标特征、一次函数点的坐标特征、全等三角形的判定和性质、解一元二次方程等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

(1) ①由 $m+n=5$ 可得 $n=5-m$, 进而分别代入两个函数解析式, 求出 m 、 k 即可得解;

②利用解析式设出 Q 和 A 的坐标, 进而表示出 AQ , 再根据面积公式求解即可;

(2) 由旋转 90° 可作一线三垂直全等, 进而求出点 F 坐标, 再利用函数点的坐标特征建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: ① $\because m+n=5$,

$\therefore n=5-m$,

$\therefore P(m, 5-m)$,

$$\text{则} \begin{cases} 5-m = \frac{m}{k} \\ 5-m = \frac{k}{m} \end{cases},$$

$\therefore$ 解得: $m=4$ (负值舍去), $k=4$,

∴ 这两个函数的特征数为 4;

②由①可知反比例函数解析式为 $y = \frac{4}{x}$, 正比例函数解析式为 $y = \frac{1}{4}x$,

设 $Q(a, \frac{1}{4}a)$, 则 $A(a, \frac{4}{a})$,

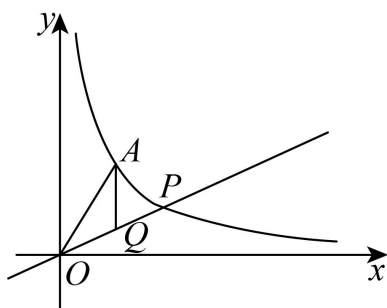
$$\therefore AQ = \frac{4}{a} - \frac{1}{4}a,$$

$$\therefore S_{\triangle AOQ} = \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot x_Q = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{a} - \frac{1}{4}a \right) \cdot a = 1,$$

整理得 $a^2 = 8$,

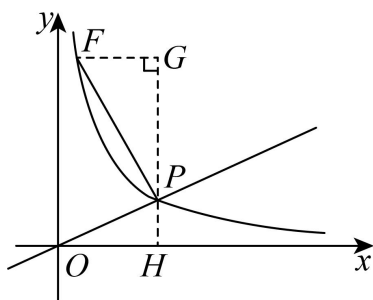
$$\therefore a = 2\sqrt{2} \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore Q\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$



【小问 2 详解】

解: 如图, 设落点为 F , 过 P 作 $GH \parallel y$ 轴, 交 x 轴于点 H , 过 F 作 $FG \perp GH$ 于点 G , 则 $\angle G = \angle OHP = 90^\circ$,



$$\therefore P(m, n),$$

$$\therefore OH = m, \quad PH = n,$$

∵ 点 O 绕点 P 顺时针旋转 90° 落在 F 处,

$$\therefore \angle OPF = 90^\circ, \quad PO = PF,$$

$$\therefore \angle OPH = \angle PFG = 90^\circ - \angle FPG,$$

$$\therefore \triangle OPH \cong \triangle PFG (\text{AAS}),$$

$$\therefore PH = FG = n, \quad PG = OH = m,$$

$$\therefore F(m-n, m+n),$$

$$\because \text{点 } P \text{ 在 } y = \frac{x}{k} \text{ 上},$$

$$\therefore n = \frac{m}{k},$$

$$\therefore k = \frac{m}{n},$$

$$\because \text{点 } P \text{ 和点 } F \text{ 均在 } y = \frac{k}{x} \text{ 上},$$

$$\therefore mn = k, \quad m^2 - n^2 = k,$$

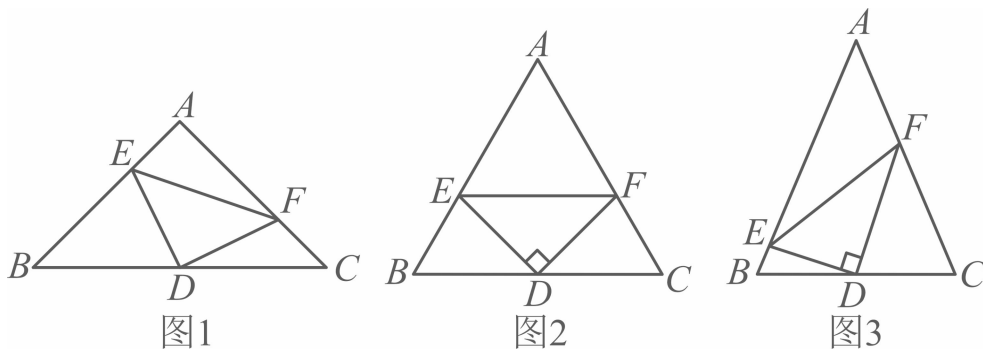
$$\text{将 } k = \frac{m}{n} \text{ 代入 } mn = k \text{ 得, } n = 1 \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore m^2 - 1 = m, \text{ 即 } m^2 - m - 1 = 0,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{故答案为: } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 的中点, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $DE \perp DF$, 连结 EF .



(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 求证: $\angle DEF = 45^\circ$;

(2) 如图 2, $\angle DEF = 45^\circ$, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $DE = DF$, 求证: $AE = AF$;

(3) 如图 3, $\angle A = 45^\circ$, $BE = 1$, $EF = 5$, 请直接写出 CF 的长度: _____ (无需写出过程).

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据直角三角形斜边上的中线可知 $AD = CD$, 根据三线合一可知 $\angle ADC = 90^\circ$, 易得

$\triangle AED \cong \triangle CFD (ASA)$ ，即可得到 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，求出答案即可；

(2) 过点 D 作 $DG \perp AB$ 于 G ，作 $DH \perp AC$ 于 H ，连接 AD ，先根据三线合一得到 $\angle BAD = \angle CAD$ ，再根据角平分线的性质可得 $DG = DH$ ，易得 $Rt\triangle DGE \cong Rt\triangle DHF (HL)$ ， $Rt\triangle DBG \cong Rt\triangle DCH (HL)$ ，进而可得到答案；

(3) 如图，延长 FD 至 G ，使 $DG = DF$ ，连接 EG ， BG ，过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H ，先判定 ED 是 FG 的垂直平分线，再运用勾股定理解决即可；

【小问 1 详解】

证明：如图 1，连接 AD ，

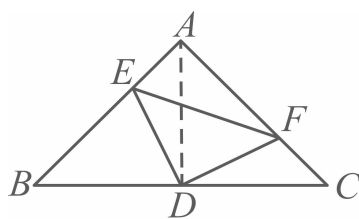


图 1

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$ ，

$\because$ 点 D 是边 BC 的中点，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 45^\circ = \angle C$ ， $AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = CD$ ，

$\because DE \perp DF$ ，

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EDF = \angle ADC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle CDF$ ，

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD (ASA)$ ，

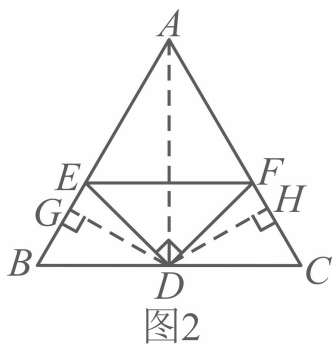
$\therefore DE = DF$ ，

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle DEF = 45^\circ$ ；

【小问 2 详解】

证明：如图 2，过点 D 作 $DG \perp AB$ 于 G ，作 $DH \perp AC$ 于 H ，连接 AD ，则 $\angle AGD = \angle AHD = 90^\circ$ ，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 是边 BC 的中点,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD, BD = CD, AB = AC,$

$\therefore DG = DH,$

$\therefore DE = DF,$

$\therefore Rt\triangle DGE \cong Rt\triangle DHF (HL),$

$\therefore EG = FH,$

同理可得: $Rt\triangle DBG \cong Rt\triangle DCH (HL),$

$\therefore BG = CH,$

$\therefore BG + EG = CH + FH,$

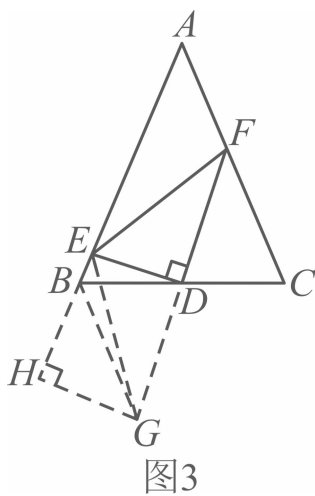
即 $BE = CF,$

$\therefore AB - BE = AC - CF,$

即 $AE = AF;$

【小问 3 详解】

解: 如图 3, 延长 FD 至 G , 使 $DG = DF$, 连接 EG, BG , 过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H ,



$\therefore DG = DF, DE \perp DF,$

$\therefore ED$ 是 FG 的垂直平分线,

$$\therefore EG = EF = 5,$$

$$\because BD = CD, \angle CDF = \angle BDG,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle BDG (SAS),$$

$$\therefore \angle C = \angle CBG, CF = BG,$$

$$\because \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle C + \angle ABC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CBG + \angle ABC = 135^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ABG = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle GBH = 45^\circ,$$

$$\because GH \perp AH,$$

$$\therefore \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle GBH \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore GH = BH,$$

$$\text{设 } BH = a, \text{ 则 } GH = a, EH = a + 1,$$

$$\text{由勾股定理得: } GH^2 + EH^2 = EG^2,$$

$$\therefore a^2 + (a + 1)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得: } a_1 = -4 \text{ (舍)}, a_2 = 3,$$

$$\therefore GH = 3,$$

$$\therefore CF = BG = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了三线合一，等腰直角三角形的性质，角平分线的性质和判定，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识点，解决此题关键是要合理作出辅助线.