

2025 学年第一学期期末学业质量调研

八年级数学

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个结论中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 实数 9 的平方根是 ()

- A. ± 3 B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平方根, 熟练掌握平方根的定义是解答本题的关键. 根据平方根的定义, 一个正数的平方根有两个, 互为相反数, 即可得解.

【详解】解: $\because 3^2 = 9, (-3)^2 = 9,$

$\therefore 9$ 的平方根是 ± 3 .

故选: A.

2. 下列各选项中, $\sqrt{x} + 2$ 的有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{x} + 2$ B. $\sqrt{x} - 2$ C. $\sqrt{x+2}$ D. $\sqrt{x-2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了有理化因式, 熟练掌握两个含二次根式的代数式相乘时, 它们的积不含二次根式, 这样的两个代数式称作互为有理化因式是解题的关键. 有理化因式是指与给定表达式相乘后结果不含根号的因式. 据此求解即可.

【详解】解: $\because (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = x - 4$ 为有理式,

$\therefore \sqrt{x}-2$ 是 $\sqrt{x}+2$ 的有理化因式.

故选: B.

3. 将一元二次方程 $x^2+4x-3=0$ 化成 $(x+m)^2=n$ 的形式, 则 m, n 的值分别是 ()

A. 2, 7

B. -2, 7

C. 2, -7

D. -2, -7

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程, 掌握完全平方式的特征是解题关键.

通过配方法将一元二次方程化为完全平方形式, 比较系数得出 m 和 n 的值即可.

【详解】 解: $x^2+4x-3=0$,

移项, 得 $x^2+4x=3$,

方程两边同时加 4, 得 $x^2+4x+4=3+4$, 即 $x^2+2\times 2x+2^2=7$,

配方, 得 $(x+2)^2=7$,

$\therefore m=2, n=7$,

故选: A.

4. 已知方程 $x^2-3x+2=0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程和韦达定理, 掌握解一元二次方程的方法和韦达定理是解题关键.

本题所给一元二次方程较简单, 可解出方程的根, 再代入求解即可; 也可通分所求式子, 再用韦达定理求解即可.

【详解】 解: 法一: 方程 $x^2-3x+2=0$ 因式分解, 得 $(x-1)(x-2)=0$,

$\therefore x_1=1, x_2=2$,

$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;

法二：由韦达定理，可得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ ，

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2},$$

故选：C.

5. 在下列条件中：① $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，② $\angle A - \angle B = 30^\circ$ ，③ $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ，

④ $AB : BC : AC = 5 : 12 : 13$ 中，能确定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是（ ）

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查直角三角形的判定，掌握直角三角形的定义和勾股定理的逆定理是解题关键.

通过三角形内角和定理和勾股定理逆定理逐项判断每个条件是否能确定直角三角形即可.

【详解】解：①：由 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，可知 $\angle C = \frac{3}{1+2+3} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，故能确定；

②： $\angle A - \angle B = 30^\circ$ ，缺少足够的条件，如当 $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ 时满足题意，此时 $\angle C = 70^\circ$ ， $\triangle ABC$ 不是直角三角形，故不能确定；

③：由勾股定理的逆定理，满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的三角形是直角三角形，故能确定；

④：由 $AB : BC : AC = 5 : 12 : 13$ ，可设 $AB = 5x$ ，则 $BC = 12x$ ， $AC = 13x$ ，

$$\therefore AB^2 + BC^2 = (5x)^2 + (12x)^2 = 25x^2 + 144x^2 = 169x^2 = (13x)^2 = AC^2,$$

$\therefore$ 由勾股定理的逆定理可知， $\triangle ABC$ 是直角三角形，故能确定，

故选：C.

6. 已知 t 是无理数，但 $(t+3)(t-1)$ 是有理数，则下列各式中是有理数的是（ ）

A. $2t-3$

B. t^2-3

C. $(t-3)(t+1)$

D. $(t+1)^2-3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查多项式的运算，理解有理数加或减的结果为有理数是解题的关键. 由 $(t+3)(t-1) = t^2 + 2t - 3$ 是有理数，则 $t^2 + 2t$ 为有理数，再判断选项即可.

【详解】解： $\because (t+3)(t-1) = t^2 + 2t - 3$ 为有理数，

$\therefore t^2 + 2t$ 为有理数，

A、 $\because t$ 是无理数,

$\therefore 2t-3$ 是无理数;

B、 $\because t^2-3=(t^2+2t)-2t-3$, t 是无理数,

$\therefore -2t-3$ 是无理数, 故整体是无理数;

C、 $\because (t-3)(t+1)=t^2-2t-3=(t^2+2t)-4t-3$, t 是无理数,

$\therefore -4t-3$ 是无理数, 故整体是无理数;

D、 $\because (t+1)^2-3=t^2+2t-2$, t^2+2t 是有理数,

$\therefore t^2+2t-2$ 是有理数.

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置.】

7. 计算: $2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减运算, 通过二次根式的减法运算法则即可求解, 掌握运算法则是解题的关键.

【详解】 解: $2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$=\left(2-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

故答案为: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

8. 如果 $\sqrt{0.1521}=0.39$, $\sqrt{x}=3.9$, 那么 x 的值是_____.

【答案】 15.21

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根的性质. 根据被开方数的小数点每移动两位, 算术平方根的小数点就移动一位, 即可得答案.

【详解】解：∵ $\sqrt{0.1521} = 0.39$ ， $\sqrt{x} = 3.9$ ， $3.9 = 0.39 \times 10$ ，

$$\therefore x = 0.1521 \times 100 = 15.21.$$

故答案为：15.21

9. 若 $\sqrt{7}$ 与最简二次根式 $\sqrt{a+2}$ 是同类二次根式，则 $a =$ _____.

【答案】5

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，熟练掌握“同类最简二次根式的被开方数相同”是解题的关键.

根据同类最简二次根式的定义，令被开方数相等，列方程求解 a 的值.

【详解】解：∵ $\sqrt{7}$ 与最简二次根式 $\sqrt{a+2}$ 是同类二次根式，

$$\therefore a+2=7,$$

解得： $a=5$ ，

故答案为：5.

10. 如果二次根式 $\sqrt{3x-7}$ 在实数范围内有意义，那么 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq \frac{7}{3}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式有意义的条件，掌握二次根式有意义的条件是解题关键.

根据二次根式有意义的条件，被开方数必须大于或等于零，列出不等式并求解即可.

【详解】解：二次根式 $\sqrt{3x-7}$ 在实数范围内有意义，需满足被开方数 $3x-7 \geq 0$ ，

解不等式 $3x-7 \geq 0$ ，得 $x \geq \frac{7}{3}$ ，

故答案为： $x \geq \frac{7}{3}$.

11. 若关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + 2x + 1 = 0$ 是一元二次方程，则 m 满足的条件是_____.

【答案】 $m \neq -1$

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程的定义，熟记定义是解本题的关键. 根据一元二次方程的定义，二次项系数不能为零，据此求解即可.

【详解】解：由方程 $(m+1)x^2 + 2x + 1 = 0$ 是一元二次方程，

得二次项系数 $m+1 \neq 0$,

解得 $m \neq -1$.

故答案为 $m \neq -1$.

12. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x - k = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值是_____.

【答案】 $-\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式, 掌握一元二次方程根的判别式是解题关键.

根据一元二次方程有两个相等的实数根的条件为判别式等于零, 建立关于 k 的方程求解即可.

【详解】 解: 方程 $x^2 - 3x - k = 0$ 中, $a = 1$, $b = -3$, $c = -k$,

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 9 + 4k$,

$\because$ 方程 $x^2 - 3x - k = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = 0$, 即 $9 + 4k = 0$,

解得 $k = -\frac{9}{4}$,

故答案为: $-\frac{9}{4}$.

13. 某芯片晶体管的线宽约为 0.0000000053 米, 数据 0.0000000053 米用科学记数法表示为_____米.

【答案】 5.3×10^{-9}

【解析】

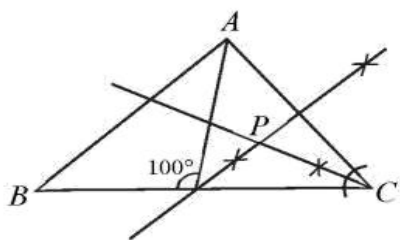
【分析】 此题考查科学记数法的表示方法.

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数. 依此求解即可.

【详解】 解: $0.0000000053 = 5.3 \times 10^{-9}$.

故答案为: 5.3×10^{-9} .

14. 如图, 依据尺规作图的痕迹, $\angle ACP =$ _____ $^\circ$.

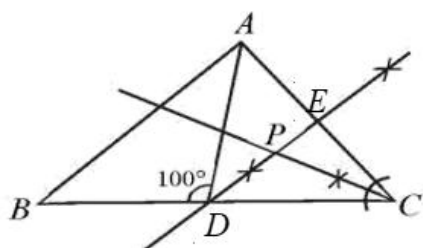


【答案】25

【解析】

【分析】本题考查作图—基本作图，解答本题的关键是熟练掌握角平分线与线段垂直平分线的作法．由尺规作图痕迹可知， DE 为线段 AC 的垂直平分线， CP 为 $\angle ACB$ 的角平分线，结合线段垂直平分线的性质以及角平分线的定义可得答案．

【详解】解：如图，标记点 D 、点 E ，



$$\because \angle ADB = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 80^\circ,$$

由尺规作图可知， DE 为线段 AC 的垂直平分线， CP 为 $\angle ACB$ 的角平分线，

$$\therefore AD = CD, DE \perp AC, \angle ACP = \angle BCP,$$

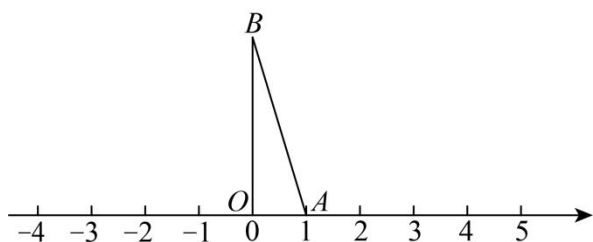
$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACD = 25^\circ.$$

故答案为：25．

15. 如图，点 A 在数轴上表示数1，以 OA 为直角边，在数轴上方画 $Rt\triangle AOB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OB = 3$ ，以点 A 为圆心， AB 的长为半径画弧，与数轴的正半轴交于点 P ，则点 P 表示的数是_____．



【答案】 $1 + \sqrt{10}$

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理与无理数,实数与数轴,由勾股定理可得 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, 从而求出点 P 坐标, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】解: $\because \angle AOB = 90^\circ$, $OB = 3$, $OA = 1$,

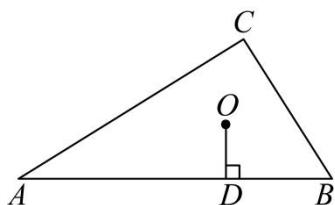
$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 以点 A 为圆心, AB 的长为半径画弧, 与数轴的正半轴交于点 P ,

$\therefore$ 点 P 表示的数是 $1 + \sqrt{10}$,

故答案为: $1 + \sqrt{10}$.

16. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 过点 O 作 $OD \perp AB$, 垂足为点 D . 如果 $OD = 1\text{ cm}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $(3 + 2\sqrt{3})\text{ cm}^2$, 那么 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ cm .

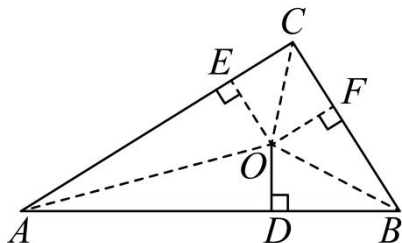


【答案】 $(6 + 4\sqrt{3})$

【解析】

【分析】本题考查三角形内心的性质, 角平分线的性质, 连接 OA, OB, OC , 过点 O 作 $OE \perp AC, OF \perp BC$, 根据三角形内心的性质可得 $OE = OF = OD = 1\text{ cm}$, 再根据 $\triangle ABC$ 的面积为 $(3 + 2\sqrt{3})\text{ cm}^2$, 可得 $\frac{1}{2} OD \cdot (AB + BC + AC) = (3 + 2\sqrt{3})\text{ cm}^2$, 进而可得结果.

【详解】解: 连接 OA, OB, OC , 过点 O 作 $OE \perp AC, OF \perp BC$,



$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore OC$ 平分 $\angle ACB$, OA 平分 $\angle BAC$, OB 平分 $\angle ABC$,

$\because OE \perp AC, OF \perp BC, OD \perp AB, OD = 1\text{cm},$

$\therefore OE = OF = OD = 1\text{cm},$

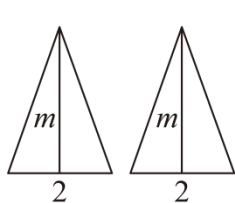
$\because \triangle ABC$ 的面积为 $(3 + 2\sqrt{3})\text{cm}^2,$

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot OD + \frac{1}{2}AC \cdot OE + \frac{1}{2}BC \cdot OF = (3 + 2\sqrt{3})\text{cm}^2,$ 即 $\frac{1}{2}OD \cdot (AB + BC + AC) = (3 + 2\sqrt{3})\text{cm}^2,$

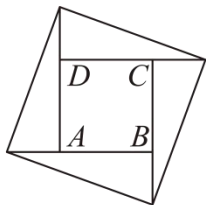
$\therefore AB + BC + AC = (6 + 4\sqrt{3})\text{cm}.$

故答案为: $(6 + 4\sqrt{3}).$

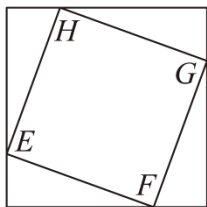
17. 将两张全等的等腰三角形纸片按照图①所示的方式剪成四个全等的直角三角形, 这四个直角三角形可以拼成图②或图③所示的正方形. 已知等腰三角形纸片的底边长为 2, 底边上的高为 m , 并且 $m > 2$. 如果四边形 $ABCD$ 的面积等于四边形 $EFGH$ 面积的 $\frac{1}{2}$, 那么 m 的值是_____.



图①



图②



图③

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】

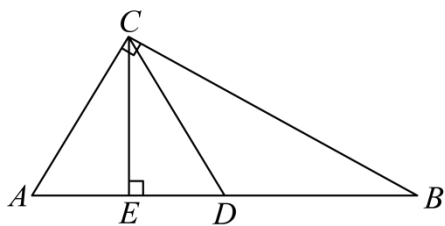
【分析】 本题考查图形的拼剪, 正方形的性质, 一元二次方程的应用, 解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题. 根据四边形 $EFGH$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 面积的 2 倍, 构建方程求解.

【详解】 解: 由题意得 $\left(m + \frac{1}{2} \times 2\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 2m = 2\left(m - \frac{1}{2} \times 2\right)^2,$

解得: $m_1 = 2 + \sqrt{3}, m_2 = 2 - \sqrt{3}$ (舍去).

故答案为: $2 + \sqrt{3}.$

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的中线, $CE \perp AB$, 垂足是 E . 当 CE 把 $\triangle ACD$ 分成面积比为 1:2 的两个三角形时, 则 $\frac{AC}{CD}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形的性质、勾股定理等知识点，掌握分类讨论思想是解题的关键.

由直角三角形中线的性质可得 $CD = AD = BD = \frac{1}{2}AB$ ，由题意可得 $S_{\triangle ACE} : S_{\triangle CDE} = 1:2$ 或 $2:1$ ，进而得到

$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{1}$ ，设 $AE = x$ ，则 $DE = 2x$ 或设 $AE = 2x$ ，则 $DE = x$ ，可得 $CD = AD = 3x$ ；由勾股定理可

得 $AC = \sqrt{CD^2 - ED^2 + AE^2}$ ，再分 $AE = x$ 、 $DE = 2x$ 和 $AE = 2x$ 、 $DE = x$ 两种情况解答即可.

【详解】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的中线，

$$\therefore CD = AD = BD = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形，

$\because CE$ 把 $\triangle ACD$ 分成面积比为 $1:2$ 的两个三角形，

$$\therefore S_{\triangle ACE} : S_{\triangle CDE} = 1:2 \text{ 或 } 2:1,$$

$\because \triangle ACE$ 和 $\triangle CDE$ 有同高 CE ，

$$\therefore \text{面积比等于底边长的比，即 } \frac{AE}{ED} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{2}{1},$$

设 $AE = x$ ，则 $DE = 2x$ 或设 $AE = 2x$ ，则 $DE = x$ ，

$$\therefore AD = AE + ED = 3x,$$

$$\therefore CD = AD = 3x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，有公共边 CE ，

$$\therefore AC^2 - AE^2 = CE^2 = CD^2 - ED^2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{CD^2 - ED^2 + AE^2}$$

$$\text{当 } AE = x, DE = 2x \text{ 时, } AC = \sqrt{CD^2 - ED^2 + AE^2} = \sqrt{(3x)^2 - (2x)^2 + x^2} = \sqrt{6}x,$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{6}x}{3x} = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

当 $AE = 2x$, $DE = x$ 时, $AC = \sqrt{CD^2 - ED^2 + AE^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2 + (2x)^2} = 2\sqrt{3}x$,

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

综上, $\frac{AC}{CD}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 78 分)

【请将下列各题的解答过程写在答题纸的相应位置.】

19. 计算: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

【答案】 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算、分母有理化、二次根式的性质等知识点, 掌握相关运算法则是解题的关键.

先分母有理化, 再运用二次根式的性质化简, 然后再计算即可.

【详解】 解: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} - |\sqrt{3}-2|$$
$$= (\sqrt{2}+1)^2 - \sqrt{2} - (2-\sqrt{3})$$
$$= 3 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3}$$
$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

20. 计算: $\frac{3}{b}\sqrt{a^2b} \times \left(-\frac{7}{3}\sqrt{ab^2}\right) \div 7\sqrt{\frac{b}{a^2}} \quad (a > 0, b > 0).$

【答案】 $-a^2\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质、二次根式的乘除混合运算等知识点, 灵活运用二次根式的混合

运算法则是解题的关键.

先根据二次根式的性质化简, 然后运用二次根式的混合运算法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{3}{b}\sqrt{a^2b} \times \left(-\frac{7}{3}\sqrt{ab^2}\right) \div 7\sqrt{\frac{b}{a^2}} \quad (a>0, b>0) \\ &= \frac{3a}{b}\sqrt{b} \times \left(-\frac{7}{3}b\sqrt{a}\right) \div \frac{7\sqrt{b}}{a} \\ &= -7a\sqrt{ab} \div \frac{7\sqrt{b}}{a} \\ &= -7a\sqrt{ab} \times \frac{a}{7\sqrt{b}} \\ &= -a^2\sqrt{a}. \end{aligned}$$

21. 解分式方程: $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{5}.$

【答案】 $x=3$

【解析】

【分析】 本题主要考查解分式方程, 掌握将分式方程转换为一元二次方程求解的方法是关键. 根据题意, 先去分母, 转换为一元二次方程, 再根据解一元二次方程的方法计算, 检验根是否符合题意即可.

【详解】 解: 两边同时乘以 $5(x+2)(x-2)$ 得

$$10x - 5(x+2) = x^2 - 4,$$

整理得 $x^2 - 5x + 6 = 0,$

$$(x-2)(x-3) = 0,$$

解得 $x_1 = 2$ 或 $x_2 = 3,$

经检验: $x=2$ 是增根, 舍去, $x=3$ 是原方程的根,

所以原方程的根是 $x=3.$

22. 已知 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 9$, 求 $\frac{x-9y}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}} - \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ 的值.

【答案】 $4\sqrt{3}-9$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件、二次根式的混合运算、代数式求值等知识点，掌握二次根式的混合运算法则是解题的关键.

先根据二次根式有意义的条件确定 $x=3$ ，进而确定 $y=9$ ，再运用二次根式的混合运算法则化简，最后将 $x=3$ 、 $y=9$ 代入求值即可.

【详解】 解： $\because y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 9$,

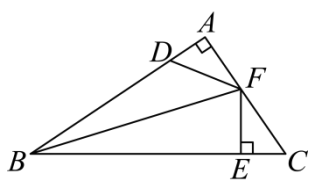
$$\therefore \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } x=3,$$

$$\therefore y=9,$$

$$\begin{aligned} & \frac{x-9y}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}} - \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \div \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{x}-3\sqrt{y} - (\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}-3\sqrt{y} + \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=3, y=9 \text{ 时, 原式} = \sqrt{3}-3\sqrt{9} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}-9.$$

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上， $AD=CE$ ，作 $EF \perp BC$ 于 E ，交边 AC 于 F ， $DF=CF$ 。



(1) 求证： BF 平分 $\angle ABC$ ；

(2) 求证： $BC+BD=2BE$ 。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查全等三角形的判定与性质、角平分线的判定定理、线段的和差等知识点，灵活运用相关知识是解题的关键.

(1) 先证明 $\text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle ECF$ (HL) 可得 $AF=EF$ ，再根据角平分线的判定定理即可证明结论；

(2) 先证明 $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle EBF$ (HL), 再根据线段的和差以及等量代换即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because EF \perp BC, \angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CEF = \angle A = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 与 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases} AD = CE \\ DF = CF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle ECF \text{ (HL)},$$

$$\therefore AF = EF,$$

$\because EF \perp BC, FA \perp AB$

$$\therefore BF \text{ 平分 } \angle ABC.$$

【小问 2 详解】

证明: 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 与 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中

$$\begin{cases} AF = EF \\ BF = BF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle EBF \text{ (HL)},$$

$$\therefore AB = BE,$$

$\because AD = CE$,

$$\therefore AB - BD = BC - BE,$$

$$\therefore BE - BD = BC - AB,$$

$$\therefore BE - BD = BC - BE,$$

$$\therefore BC + BD = 2BE.$$

24. 为弘扬崇明土布传统文化, 展现匠人技艺魅力, 瀛洲土布馆推出崇明土布刺绣“小马”挂件. 该挂件每件成本 25 元, 当售价定为 35 元时, 每日可售出 48 件. 市场调研显示, 售价每降低 1 元, 每日销量就会增加 6 件.

(1) 当该挂件降价 x 元, 每日售出的数量是_____件(用 x 的代数式表示);

(2) 当该挂件降价多少元时, 土布馆每日销售这款挂件的利润恰好为 432 元.

【答案】(1) $(48 + 6x)$

(2) 当该挂件降价 4 元时，土布馆每日销售这款挂件的利润恰好为 432 元

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的应用，根据题意正确列出方程是解题的关键.

(1) 根据“售价每降低 1 元，每日销量就会增加 6 件”，列代数式即可；

(2) 根据单件利润乘以销售量等于总利润列出方程，并求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 售价每降低 1 元，每日销量就会增加 6 件，

∴ 当该挂件降价 x 元，每日售出的数量是 $(48 + 6x)$ 件，

故答案为： $(48 + 6x)$ ；

【小问 2 详解】

解： $(35 - x - 25)(48 + 6x) = 432$

整理得 $x^2 - 2x - 8 = 0$

解得 $x_1 = 4$ 或 $x_2 = -2$ （不符合题意，舍去）

答：当该挂件降价 4 元时，土布馆每日销售这款挂件的利润恰好为 432 元.

25. 小海与小华就一道问题的解法进行探索，请你仔细阅读材料，并完成任务.

【材料】

将关于 x 的二次三项式 $x^2 + 3x + m$ 因式分解为两个一次因式的乘积，其中有一个因式是 $x + 1$ ，求另一个因式及 m 的值.

小海解法：

设另一个因式为 $x + n$ ，

得 $x^2 + 3x + m = (x + 1)(x + n)$

则 $x^2 + 3x + m = x^2 + (n + 1)x + n$

∴ $\begin{cases} n + 1 = 3 \\ m = n \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$

∴ 另一个因式为 $x + 2$ ， m 的值为 2.

小华解法：

设另一个因式为 $x + n$ ，

得 $x^2 + 3x + m = (x + 1)(x + n)$

∴ 当 $x = -1$ 时， $(x + 1)(x + n) = 0$

即 $x^2 + 3x + m = 0$

∴ $(-1)^2 + 3 \times (-1) + m = 0$ ，解得 $m = 2$ ，

∴ $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

∴ 另一个因式为 $x + 2$ ， m 的值为 2.

小海受到小华解法的启发，把二次三项式因式分解问题与“韦达定理”联系在一起，得到新解法：

设 $x^2 + 3x + m = (x+1)(x+n) = 0$ ，则方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 的两根为 $-1, -n$ ，

$$\text{由韦达定理可得} \begin{cases} -1 + (-n) = -3 \\ -1 \times (-n) = m \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 另一个因式为 $x+2$, m 的值为 2.

【任务】

(1) 已知关于 x 的二次三项式 $2x^2 + 3x + t$ 因式分解的结果中有一个因式是 $x - \frac{\sqrt{17}-3}{4}$ ，求 t 的值并写出

此二次三项式因式分解的结果；

(2) 已知关于 x 的二次三项式 $3x^2 - px + q$ 因式分解的结果中有一个因式是 $x-3$ ，求代数式 $3p-q$ 的值.

【答案】(1) $t = -1, 2\left(x - \frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{17}+3}{4}\right)$

(2) $3p - q = 27$

【解析】

【分析】本题主要考查了已知因式分解的结果求参数、十字相乘法分解因式、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的解等知识点，熟练掌握已知因式分解的结果求参数是解题的关键.

(1) 令 $2x^2 + 3x + t = 2\left(x - \frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)(x+n) = 0$ ，此时方程的两根为 $x_1 = \frac{\sqrt{17}-3}{4}, x_2 = -n$ ，由根与系

数的关系可得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{17}-3}{4} + (-n) = -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{17}-3}{4} \cdot (-n) = \frac{t}{2} \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} n = \frac{\sqrt{17}+3}{4} \\ t = -1 \end{cases}$ ，从而完成解答；

(2) 由题意可得 $3x^2 - px + q = 0$ 时方程有一个根是 $x=3$ ，然后将 $x=3$ 代入并整理即可解答.

【小问 1 详解】

解：设 $2x^2 + 3x + t = 2\left(x - \frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)(x+n) = 0$ ，则方程 $2x^2 + 3x + t = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{\sqrt{17}-3}{4}, x_2 = -n$ ，

由韦达定理可得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{17}-3}{4} + (-n) = -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{17}-3}{4} \cdot (-n) = \frac{t}{2} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} n = \frac{\sqrt{17}+3}{4} \\ t = -1 \end{cases}$,

$$\therefore 2x^2 + 3x - 1 = 2\left(x - \frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{17}+3}{4}\right), t = -1.$$

【小问2详解】

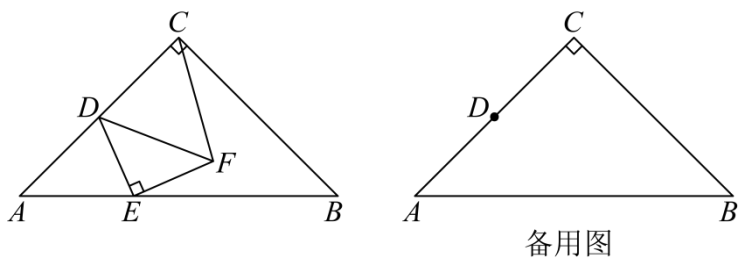
解: $\because$ 二次三项式 $3x^2 - px + q$ 因式分解的结果有一个因式是 $x - 3$

$$\therefore 3x^2 - px + q = 0 \text{ 时方程有一个根是 } x = 3.$$

$$\therefore 3 \times 3^2 - 3p + q = 0,$$

$$\therefore 3p - q = 27.$$

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $\angle A = 45^\circ$, 点 D 为边 AC 的中点, 点 E 为边 AB 上一动点, 连接 DE , 将线段 DE 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到线段 EF , 连接 CF 、 DF .



- (1) 当点 E 与点 A 重合时, 求 CF 的长;
- (2) 设 $AE = a$, 用含 a 的代数式表示线段 DF^2 的长;
- (3) 当 $\triangle CDF$ 是以 DF 为腰的等腰三角形时, 求 AE 的长.

【答案】(1) $CF = 2\sqrt{5}$.

$$(2) DF^2 = 2a^2 - 4\sqrt{2}a + 8$$

$$(3) \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、一元一次方程等知识点, 灵活运用相关知识是解题的关键.

- (1) 由题意可得 $DE = AD$, $\angle CEF = 90^\circ$, 再求得 $EF = DE = AD = 2$, 然后运用勾股定理求解即可;

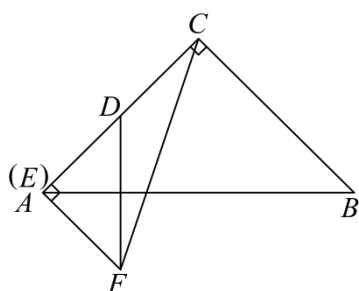
(2) 如图：作 $DH \perp AB$ 垂足为 H ，易得 $AH = DH$ ，运用勾股定理可得 $HE = AE - AH = |a - \sqrt{2}|$ ，再分别在 $\text{Rt}\triangle DHE$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 运用勾股定理求解即可；

(3) 分 $DF = CD$ 或 $DF = CF$ 两种情况，当 $DF = CD$ 时，利用 (2) 的结论即可解答；如图：当 $DF = CF$ 时，作直线 $FG \perp AC$ 于 G 交 AB 于 M 。作 $FN \perp AB$ 于 N ，运用等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、一元一次方程等知识点求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 当点 E 与点 A 重合时，

$$\therefore DE = AD, \angle CEF = 90^\circ,$$



∵ 点 D 是 AC 中点， $CE = AC = 4$

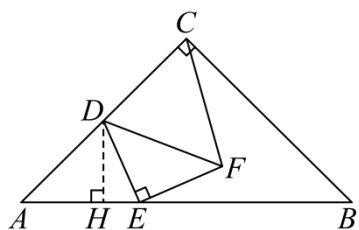
$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = 2,$$

$$\therefore EF = DE = AD = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中， $CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = 2\sqrt{5}$ 。

【小问 2 详解】

解：如图：作 $DH \perp AB$ 垂足为 H ，



在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $\angle AHD = 90^\circ, \angle A = 45^\circ$

$$\therefore \angle ADH = \angle A = 45^\circ$$

$$\therefore AH = DH$$

$$\therefore AD^2 = AH^2 + DH^2, AD = 2$$

$$\therefore AH = DH = \sqrt{2}.$$

$$\therefore HE = AE - AH = |a - \sqrt{2}|$$

$$\text{在 Rt}\triangle DHE \text{ 中, } DE^2 = DH^2 + HE^2 = (\sqrt{2})^2 + (a - \sqrt{2})^2.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } DE = EF,$$

$$\therefore DE^2 + EF^2 = DF^2, \quad DE^2 = \frac{1}{2}DF^2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}DF^2 = (\sqrt{2})^2 + (a - \sqrt{2})^2, \quad \text{即 } DF^2 = 2a^2 - 4\sqrt{2}a + 8.$$

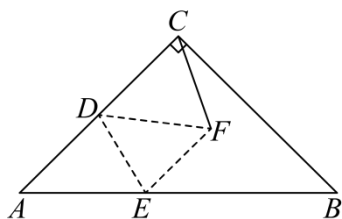
【小问 3 详解】

解: $\because \triangle CDF$ 是以 DF 为腰的等腰三角形

$\therefore$ 分两种情况 $DF = CD$ 或 $DF = CF$

①当 $DF = CD = 2$ 时

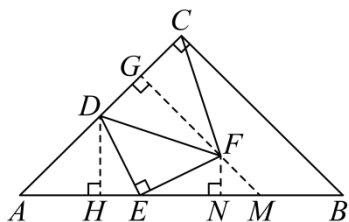
$$\therefore DF^2 = 4,$$



$$\text{结合 (2) 可得: } 2a^2 - 4\sqrt{2}a + 8 = 4, \quad \text{即 } a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 = 0, \quad \text{解得: } a = \sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = \sqrt{2}.$$

②如图: 当 $DF = CF$ 时, 作直线 $FG \perp AC$ 于 G 交 AB 于 M . 作 $FN \perp AB$ 于 N ,



$$\because DF = CF$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2}CD = 1$$

$$\therefore AG = 3$$

$$\text{在 Rt}\triangle AGM \text{ 中, } \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle AMG = 45^\circ,$$

$$\therefore MG = AG = 3,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AG^2 + GM^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\because \angle HDE + \angle HED = \angle HED + \angle FEN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HDE = \angle FEN,$$

$$\because \angle DHE = \angle NEF,$$

$$\therefore \triangle DHE \cong \triangle NEF (\text{ASA}),$$

$$\therefore FN = EH, \quad EN = DH = \sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle FNM$ 中, $\angle AMG = 45^\circ$,

$$\therefore \angle NFM = \angle AMG = 45^\circ,$$

$$\therefore FN = NM,$$

$$\text{设 } HE = FN = MN = a - \sqrt{2}$$

$$\because AM = AH + HE + EN + MN = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{2} + a - \sqrt{2} + \sqrt{2} + a - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \text{ 解得: } a = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

综上, AE 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.