

2024 学年第一学期期末八年级数学试卷

(满分: 100 分, 完成时间: 90 分钟)

2025.01

一、填空题 (本题共 14 小题, 每小题 2 分, 满分 28 分)

1. 计算: $\sqrt{24} \div \sqrt{3} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的除法运算, 根据二次根式的除法运算法则进行计算即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{24} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

2. 一元二次方程 $2x^2 = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先移项, 然后利用提公因式法分解因式, 进而解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because 2x^2 = x,$

$$\therefore 2x^2 - x = 0,$$

$$\therefore x(2x - 1) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } 2x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2},$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$.

3. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根的情况, 根据 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; $\Delta = 0$, 方程有

两个相等的实数根； $\Delta < 0$ ，方程无实数根，由此即可求解，掌握一元二次方程根与系数的关系，解不等式的方法是解题的关键.

【详解】解：关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \cdot a \geq 0,$$

解得， $a \leq 1$ ，

故答案为： $a \leq 1$.

4. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 7x + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1)(2x-5)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解；利用十字相乘法求解即可.

【详解】 $2x^2 - 7x + 5 = (x-1)(2x-5)$

故答案为： $(x-1)(2x-5)$.

5. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了求函数的定义域，二次根式和分式有意义的条件，分式有意义的条件是分母不为 0，二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0，由此求解即可.

【详解】解：由题意得，
$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \sqrt{x-3} \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x > 3,$$

故答案为： $x > 3$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ，那么 $f(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{2}+1$

【解析】

【分析】本题主要考查了求函数值，分母有理化，直接把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $\frac{1}{x-1}$ 中计算求解即可.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{1}{x-1}$,

$$\therefore f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1,$$

故答案为： $\sqrt{2}+1$.

7. 已知正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$), 如果 y 的值随 x 的值增大而减小, 那么该正比例函数的图像经过第_____象限.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】 根据正比例函数 $y = kx$, y 的值随 x 的值增大而减小, 得出 $k < 0$, 进而判断其经过的象限, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$, y 的值随 x 值的增大而减小,

$$\therefore k < 0,$$

$\therefore$ 该函数图象经过第二、四象限,

故答案为: 二、四

8. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象上, 如果 $x_1 > x_2 > 0$, 那么

y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=”、“<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟练掌握反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解题的关键.

先根据反比例函数的解析式判断出函数图象所在的象限, 再根据 $x_1 > x_2 > 0$ 即可得出结论.

【详解】 解: $\because k > 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支位于第一、三象限, 且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小,

$$\because x_1 > x_2 > 0,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为: <.

9. 命题“如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等”的逆命题是_____.

【答案】如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的补角.

【解析】

【分析】本题考查了命题与逆命题，正确理解原命题与逆命题的关系是解题关键.

根据把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题解答即可.

【详解】解：命题“如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等”的逆命题是如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的补角.

故答案为：如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的补角.

10. 已知两个定点 A 、 B 的距离为 5 厘米，那么到点 A 、 B 距离之和为 5 厘米的点的轨迹是_____.

【答案】线段 AB

【解析】

【分析】本题考查了点的轨迹和三角形的三边关系，设到定点 A 、 B 的距离之和为 5 厘米的点是点 P ，若点 P 不在线段 AB 上，易得 $PA + PB > 5$ ，若点 P 在线段 AB 上，则 $PA + PB = AB = 5$ ，由此可得答案.

【详解】解：设到定点 A 、 B 的距离之和为 5 厘米的点是点 P ，

若点 P 不在线段 AB 上，则点 P 在直线 AB 外或线段 AB 的延长线或线段 BA 的延长线上，则由三角形的三边关系或线段的大小关系可得： $PA + PB > AB$ ，即 $PA + PB > 5$ ，

若点 P 在线段 AB 上，则 $PA + PB = AB = 5$ ，

所以到点 A 、 B 的距离之和为 5 厘米的点的轨迹是线段 AB .

故答案为：线段 AB .

11. 学校组织一次乒乓球赛，要求每两队之间都要赛一场. 若共赛了 15 场，则有_____个球队参赛.

【答案】6

【解析】

【分析】设 x 个球队参加比赛，那么第一个球队和其他球队打 $(x-1)$ 场球，第二个球队和其他球队打 $(x-2)$ 场，以此类推可以知道共打 $(1+2+3+\dots+x-1)$ 场球，然后根据共 15 场比赛即可列出方程求解即可.

【详解】解：设 x 个球队参加比赛，

由题意可得： $1+2+3+\dots+x-1=15$ ，

整理得： $\frac{1}{2}x(x-1)=15$ ，

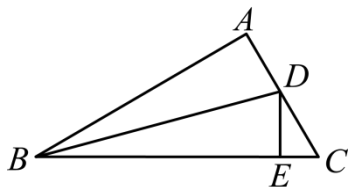
解得： $x=6$ 或 $x=-5$ （不合题意舍去）.

所以有 6 个球队参加比赛.

故答案为 6.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，并根据等量关系准确地列出方程是解答本题的关键.

12. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D ， $DE \perp BC$ 于点 E ，如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 的周长分别为 13 和 3. 那么 AB 的长为_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质，全等三角形的性质与判定，先由角平分线的定义和性质得到 $AD = DE$ ， $\angle ABD = \angle EBD$ ，再由三角形周长计算公式得到 $AB + AC + BC = 13$ ， $CD + DE + CE = 3$ ；接着证明 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ (AAS) 得到 $BE = AB$ ，据此根据线段的和差关系求解即可.

【详解】 解： $\because \angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $DE \perp BC$ ，

$$\therefore AD = DE, \angle ABD = \angle EBD,$$

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 的周长分别为 13 和 3,

$$\therefore AB + AC + BC = 13, \quad CD + DE + CE = 3,$$

$$\therefore CD + AD + CE = 3, \text{ 即 } AC + CE = 3,$$

$$\because \angle A = \angle DEB = 90^\circ, \quad BD = BD, \quad \angle ABD = \angle EBD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = AB,$$

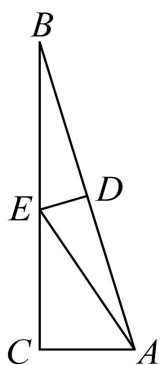
$$\therefore BC = BE + CE,$$

$$\therefore \begin{cases} AB + AB + CE + AC = 13 \\ AC + CE = 3 \end{cases},$$

$$\therefore AB = 5,$$

故答案为：5.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， DE 是 AB 的垂直平分线， $\angle AEC = 30^\circ$ ， $BC = 2$ ，那么 AC 的长为_____.



【答案】 $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质，勾股定理，含 30° 度角的直角三角形的性质，先由线段垂直平分线的性质得到 $BE = AE$ ，再由含 30° 度角的直角三角形的性质和勾股定理用 AC 表示出 BE 、 CE ，据此根据 $BC = 2$ 建立方程求解即可。

【详解】 解： $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore BE = AE,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle AEC = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = AE = 2AC,$$

$$\therefore CE = \sqrt{AE^2 - AC^2} = \sqrt{3}AC,$$

$$\therefore BC = BE + CE = 2,$$

$$\therefore 2AC + \sqrt{3}AC = 2,$$

$$\therefore AC = 4 - 2\sqrt{3},$$

故答案为： $4 - 2\sqrt{3}$.

14. 定义：关于 x 的一元二次方程： $a_1(x-m)^2 + n = 0$ (a_1 、 m 、 n 是常数， $a_1 \neq 0$) 与 $a_2(x-m)^2 + n = 0$ (a_2 、 m 、 n 是常数， $a_2 \neq 0$)，称为“同族二次方程”．例如： $2(x-3)^2 + 4 = 0$ 与 $3(x-3)^2 + 4 = 0$ 是“同族二次方程”．如果关于 x 的一元二次方程： $2(x-1)^2 + 1 = 0$ 与 $ax^2 + bx + 5 = 0$ (a 、 b 是常数， $a \neq 0$) 是“同族二次方程”．那么代数式 $ax^2 - bx + 2029$ 的最小值是_____.

【答案】 2025

【解析】

【分析】 此题考查了配方法的应用，非负数的性质，以及一元二次方程的定义，弄清题中的新定义是解本

题的关键. 利用“同族二次方程”定义列出关系式, 再利用多项式相等的条件列出关于 a 与 b 的方程组, 求出方程组的解得到 a 与 b 的值, 进而利用非负数的性质确定出代数式的最小值即可.

【详解】解: $\because 2(x-1)^2 + 1 = 0$ 与 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 是“同族二次方程”,

$$\therefore ax^2 + bx + 5 = a(x-1)^2 + 1 = ax^2 - 2ax + a + 1,$$

$$\begin{cases} -2a = b \\ a + 1 = 5 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases},$$

$$\therefore ax^2 - bx + 2029$$

$$= 4x^2 + 8x + 2029$$

$$= 4(x+1)^2 + 2025,$$

$\because (x+1)^2$ 最小值为 0,

$$\therefore 4(x+1)^2 + 2025 \text{ 最小值为 } 2025,$$

即 $ax^2 - bx + 2029$ 最小值为 2025.

故答案为: 2025.

二、选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 满分 12 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号填在括号内】

15. 在下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{\frac{a}{9}}$

B. $\sqrt{x^2 + y^2}$

C. $\sqrt{x^2 y}$

D. $\sqrt{27}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了最简二次根式的定义, 被开方数不含能开得尽的因数或因式, 且开方数不含分母, 这样的二次根式叫做最简二次根式, 据此可得答案.

【详解】解: A、 $\sqrt{\frac{a}{9}} = \frac{\sqrt{a}}{3}$ 被开方数含有分母, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 是最简二次函数, 符合题意;

C、 $\sqrt{x^2y} = |x|\sqrt{y}$ 被开方数含有开得尽方的因式，不是最简二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ 被开方数含有开得尽方的因数，不是最简二次根式，不符合题意；

故选：B.

16. 已知正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像经过点 $A(2,4)$, 那么下列坐标所表示的点在这个正比例函数图像上的是 ()

A. $(-1,-2)$

B. $(1,-2)$

C. $(4,2)$

D. $(4,-2)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了求正比例函数解析式，正比例函数图象的性质，利用待定系数法求出函数解析式，进而得到该函数图象上的点的横纵坐标之间的关系，据此可得答案.

【详解】解：∵ 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像经过点 $A(2,4)$,

$$\therefore 4 = 2k,$$

$$\therefore k = 2,$$

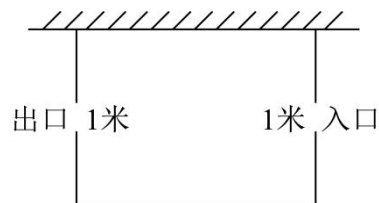
$$\therefore \text{正比例函数解析式为 } y = 2x,$$

∴ 在正比例函数 $y = 2x$ 图象上的点纵坐标为横坐标的两倍,

∴ 四个选项中只有 A 选项中的点在正比例函数 $y = 2x$ 的图象上,

故选：A.

17. 布置某艺术中心的会场时，工作人员准备利用 35 米长的墙为一边，用 68 米隔栏绳围另三边，设立一个面积为 600 平方米的长方形等候区，如图，为了方便群众进出，在两边各空出一个 1 米的出入口（出入口不用隔栏绳）. 如果设这个长方形垂直于墙的一边长为 x 米，那么可以列出关于 x 的方程 ()



A. $(68 + 2 - 2x) \cdot (x - 1) = 600$

B. $(68 - 2 - 2x) \cdot (x - 1) = 600$

C. $(68 + 2 - 2x)x = 600$

D. $(68 - 2 - 2x)x = 600$

【答案】C

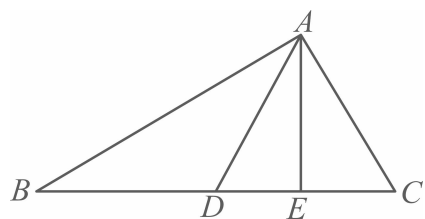
【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设这个长方形垂直于墙的一边长为 x 米，则这个平行于墙的一边长为 $(68+2-2x)$ 米，据此根据长方形面积计算公式列出方程即可.

【详解】 解：由题意得， $(68+2-2x)x=600$ ，

故选：C.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB=90^\circ$ ， AD 是斜边 BC 的中线， AE 是斜边 BC 的高，如果 AE 恰好是 DC 边上的中线，下列结论错误的是（ ）



A. $AD=CD$

B. $AD=2CE$

C. $AB=2AE$

D. $AB=3DE$

【答案】 D

【解析】

【分析】 首先根据直角三角形斜边中线的性质得到 $AD=BD=CD$ ，即可判断 A 选项；然后证明出 $\triangle ADC$ 是等边三角形，得到 $AD=CD=2CE$ ，即可判断 B 选项；然后利用含 30° 角直角三角形的性质即可判断 C 选项；然后根据勾股定理即可判断 D 选项.

【详解】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB=90^\circ$ ， AD 是斜边 BC 的中线，

$\therefore AD=BD=CD$ ，故 A 正确；

$\because AE$ 恰好是 DC 边上的中线，

$\therefore DE=CE$

$\because AE$ 是斜边 BC 的高，

$\therefore \angle AED=\angle AEC=90^\circ$

$\therefore AE$ 垂直平分 CD

$\therefore AD=AC$ ，

$\therefore AD=AC=CD$

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形

$\therefore AD=CD=2CE$ ，故 B 正确；

$\because AD=BD$

$$\therefore \angle B = \angle BAD = \frac{1}{2} \angle ADC = 30^\circ$$

$\therefore AB = 2AE$ ，故 C 正确；

$\because \triangle ADC$ 是等边三角形， $AE \perp CD$

$$\therefore AD = AC = 2DE$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE$$

$$\therefore AB = 2AE = 2\sqrt{3}DE，\text{故 D 错误.}$$

故选：D.

【点睛】此题考查了直角三角形斜边中线的性质，等边三角形的性质和判定，勾股定理，含 30° 角直角三角形的性质等知识，解题的关键是掌握以上知识点.

三、简答题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

19. 计算： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}} + 4\sqrt{2}$.

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的运算，根据二次根式的运算法则即可求解.

【详解】 解： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}} + 4\sqrt{2}$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

20. 解方程： $4x^2 - 8x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，直接利用公式法解方程即可.

【详解】 解： $\because 4x^2 - 8x - 1 = 0$,

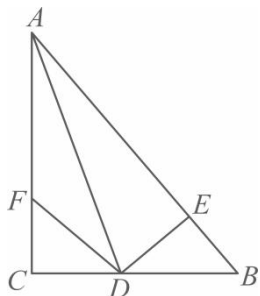
$$\therefore a = 4, b = -8, c = -1,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 80 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{8},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}.$$

21. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于点 E , 点 F 在边 AC 上, $BD = DF$.



(1) 求证: $BE = FC$;

(2) 当 $AE = 12$, $AF = 9$ 时, 求 CD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $CD = 4$

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形全等的判定和性质, 角的平分线的性质, 熟练掌握直角三角形的全等判定和性质是解题的关键.

(1) 证明 $\text{Rt}\triangle DBE \cong \text{Rt}\triangle DFC$ (HL) 即可求解;

(2) 需要先证明 $\triangle AED \cong \triangle ACD$ (AAS), 得到 $AC = AE = 12$, 求得 $BC = 9$, 再证明 $DB = DF$, 然后在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中, 根据勾股定理即可求解;

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$,

$$\therefore DC = DE, \quad \angle DCF = \angle DEB = 90^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 和 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中,

$$\begin{cases} DB = DF \\ DC = DE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DBE \cong \text{Rt}\triangle DFC \text{ (HL)},$$

$$\therefore BE = FC;$$

【小问 2 详解】

解: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle DAC = \angle DAE,$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACD = 90^\circ,$$

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAC = \angle DAE \\ \angle AED = \angle ACD, \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = AE = 12,$$

$$\therefore AF = 9,$$

$$\therefore BE = FC = AC - AF = 12 - 9 = 3,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 12 + 3 = 15,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

由 (1) 得 $\text{Rt}\triangle DBE \cong \text{Rt}\triangle DFC$,

$$\therefore DB = DF,$$

设 $CD = x$, $DF = 9 - x$,

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle DFC \text{ 中, } CD^2 + CF^2 = DF^2,$$

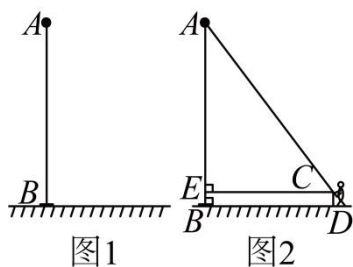
$$\because CD = x, DF = 9 - x, CF = 3,$$

$$\therefore x^2 + 3^2 = (9 - x)^2,$$

解得: $x = 4$,

$$\therefore CD = 4;$$

22. 学过《勾股定理》后, 李老师和“几何小分队”的队员们到操场上测量旗杆 AB 高度, 得到如下信息: ①测得从旗杆顶端垂直挂下来的升旗用的绳子比旗杆长 2 米 (如图 1); ②当将绳子拉直时, 测得此时拉绳子的手到地面的距离 CD 为 1 米, 到旗杆的距离 CE 为 9 米 (如图 2). 根据以上信息, 求旗杆 AB 的高度.



【答案】旗杆 AB 的高度为 13 米.

【解析】

【分析】设 $AB = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中根据勾股定理列方程求解即可.

【详解】解：设 $AB = x$ ，根据题意得：

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中， $AC^2 = AE^2 + CE^2$ ，

即： $(x+2)^2 = (x-1)^2 + 9^2$ ，

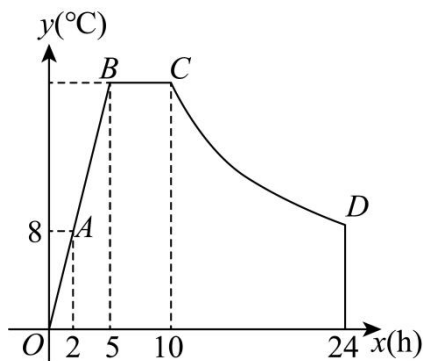
解得： $x=13$.

答：旗杆 AB 的高度为 13 米.

【点睛】本题考查了勾股定理的应用，熟练掌握勾股定理的相关知识并在直角三角形中正确运用是解题的关键.

四、解答题（本大题共 4 小题，第 23、24 题，每题 8 分；第 25、26 题，每题 10 分；满分 36 分）

23. 某水果生产基地在气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种新品种水果，如图是试验阶段的某天恒温系统从开启到关闭后，大棚内的温度 $y(^{\circ}\text{C})$ 与时间 $x(\text{h})$ 之间的函数关系，其中线段 OB 、 BC 表示恒温系统开启后阶段，双曲线的一部分 CD 表示恒温系统关闭阶段，请根据图中信息解答下列问题：



- (1) 求这天的温度 y 与时间 x ($0 \leq x \leq 5$) 的函数关系式；
- (2) 求恒温系统设定的恒定温度；
- (3) 若大棚内的温度低于 10°C 不利于新品种水果的生长，问这天内，相对有利于水果生长的时间共多少小时？

【答案】(1) $y = 4x$ ；

(2) 20°C ；

(3) 17.5 小时.

【解析】

【分析】(1) 根据图象利用待定系数法即可求出函数解析式；

(2) 由 (1) 得 $y = 4x$ ，根据图象即可求出恒定温度；

(3) 根据各时间段的函数解析式算出 $y = 10$ 时 x 的值，相减即可；

此题考查了一次函数、反比例函数和常函数解析式，解答时应注意临界点的应用.

【小问 1 详解】

设直线 OB 的函数解析式为: $y = kx (k \neq 0)$,

根据图象经过点 $(2, 8)$,

$$\therefore 8 = 2k, \text{ 解得: } k = 4,$$

$$\therefore \text{直线 } y = 4x$$

$$\therefore y \text{ 与时间 } x (0 \leq x \leq 5) \text{ 的函数关系式为 } y = 4x;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 得 y 与时间 $x (0 \leq x \leq 5)$ 的函数关系式为 $y = 4x$;

则当 $x = 5$ 时, $y = 20$,

$$\therefore \text{恒定温度为: } 20^{\circ}\text{C};$$

【小问 3 详解】

设 $10 \leq x \leq 24$ 小时内函数解析式为: $y = \frac{m}{x}$,

根据图象经过点 $(10, 20)$

$$\therefore 20 = \frac{m}{10}, \text{ 解得: } m = 200,$$

$$\therefore \text{函数解析式为: } y = \frac{200}{x} (10 \leq x \leq 24),$$

当 $0 \leq x \leq 5$ 时, $4x = 10$, 解得: $x = 2.5$,

$$\text{当 } 10 \leq x \leq 24 \text{ 时, } 10 = \frac{200}{x}, \text{ 解得: } x = 20,$$

$$\therefore \text{不低于 } 10^{\circ}\text{C} \text{ 时间共 } 24 - (24 - 20) - 2.5 = 17.5 \text{ 小时},$$

即相对有利于水果生长的时间共 17.5 小时.

24. 已知: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^{\circ}$, $CA = CB$. 点 D 、 E 在线段 AB 上.

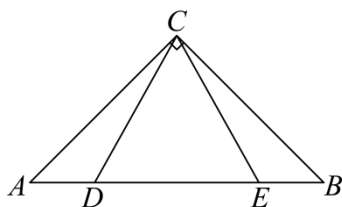


图1

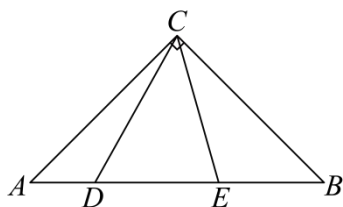


图2

(1) 如图 1, 如果 $CD = CE$, 求证: $AD = BE$.

(2) 如图 2, 如果 $\angle DCE = 45^\circ$, 求证: $DE^2 = AD^2 + BE^2$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F , 利用三线合一定理得到 $AF = BF$, $DF = EF$, 由此即可证明 $AD = BE$;

(2) 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF , 则 $BF = AD$, 证明 $\triangle FCE \cong \triangle DCE$, 得 $FE = DE$, 再证明 $\angle EBF = 90^\circ$, 则 $FE^2 = BF^2 + BE^2$, 即可证得 $DE^2 = AD^2 + BE^2$.

【小问 1 详解】

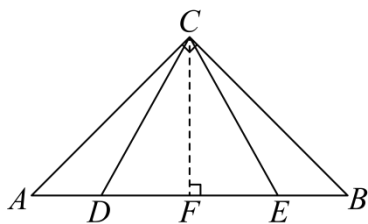
证明: 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F ,

$$\because CA = CB, CD = CE,$$

$$\therefore AF = BF, DF = EF,$$

$$\therefore AF - DF = BF - EF,$$

$$\therefore AD = BE;$$



【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CA = CB,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle A = 45^\circ,$$

由旋转得 $CF = CD$, $\angle CBF = \angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = \angle BCF$,

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle BCF + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCE,$$

$$\therefore CE = CE,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore FE = DE,$$

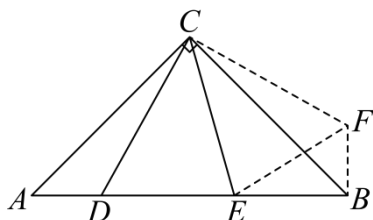
$$\therefore \angle CBF = \angle A = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore FE^2 = BF^2 + BE^2,$$

$$\therefore BF = AD,$$

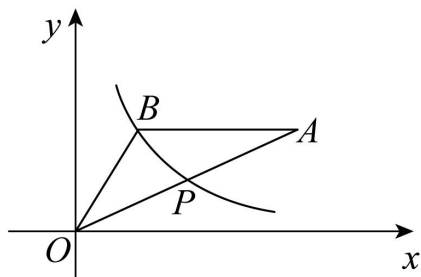
$$\therefore DE^2 = AD^2 + BE^2.$$



【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，旋转的性质，等腰

直角三角形的性质与判定，勾股定理等等，正确利用旋转构造全等三角形是解题的关键.

25. 如图，在直角坐标平面内，点A的坐标为 $(a, 4)$ （其中 $a > 3$ ），射线OA与反比例函数 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 的图像交于点P，点B在函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像上，且 $AB \parallel x$ 轴.



(1) 当点P横坐标为4时，求直线AO的表达式；

(2) 连接BO，当OA平分OB与x轴正半轴的夹角时，求点A的坐标；

(3) 当点P是AO的中点时，在x轴上找一点C，使 $\triangle POC$ 是等腰三角形，求点C的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{3}{4}x$

(2) $(8, 4)$

$$(3) \left(2\sqrt{10}, 0\right) \text{ 或 } \left(-2\sqrt{10}, 0\right) \text{ 或 } \left(\frac{10}{3}, 0\right) \text{ 或 } (12, 0)$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数与一次函数综合，等角对等边，勾股定理，等腰三角形的定义等等：

(1) 先求出点 P 的坐标，再利用待定系数法求解即可；

(2) 设点 G 为 x 轴坐标轴上一点，先求出点 B 的纵坐标，进而求出点 B 的坐标，则可求出 OB 的长，再证明 $\angle BOA = \angle A$ ，得到 $AB = OB = 5$ ，据此可得答案；

(3) 设出点 C 坐标，利用勾股定理求出 OP^2 ， PC^2 ， OC^2 ，再分 $OC = OP$ ， $PC = OP$ 三种情况，讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解：在 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 中，当 $x = 4$ 时， $y = 3$ ，

$$\therefore P(4, 3),$$

设直线 AO 的表达式为 $y = kx$ ，

把 $P(4, 3)$ 代入 $y = kx$ 中得 $3 = 4k$ ，解得 $k = \frac{3}{4}$ ，

$$\therefore \text{直线 } AO \text{ 的表达式为 } y = \frac{3}{4}x;$$

【小问 2 详解】

解：设点 G 为 x 轴坐标轴上一点，

$$\because AB \parallel x \text{ 轴，点 } A \text{ 的坐标为 } (a, 4),$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的纵坐标为 } 4, \angle A = \angle AOG,$$

在 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 中，当 $y = \frac{12}{x} = 4$ 时， $x = 3$ ，

$$\therefore B(3, 4),$$

$$\because OB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5;$$

$$\because OA \text{ 平分 } \angle BOG,$$

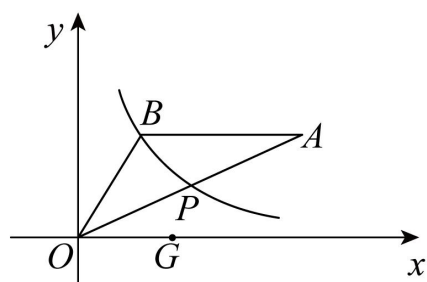
$$\therefore \angle BOA = \angle AOG,$$

$$\therefore \angle BOA = \angle A,$$

$$\therefore AB = OB = 5,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的横坐标为 } 3 + 5 = 8,$$

∴ 点 A 的坐标为 $(8,4)$;



【小问 3 详解】

解: ∵ 点 P 是 AO 的中点, 点 A 的坐标为 $(a,4)$,

∴ 点 P 的纵坐标为 2,

在 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 中, 当 $y = \frac{12}{x} = 2$ 时, $x = 6$,

∴ $P(6,2)$;

设 $C(m,0)$,

$$\therefore OC^2 = m^2, PC^2 = (m-6)^2 + (0-2)^2, OP^2 = (6-0)^2 + (2-0)^2 = 40,$$

当 $OC = OP$ 时, 则 $m^2 = 40$,

$$\therefore m = \pm 2\sqrt{10},$$

∴ 点 C 的坐标为 $(2\sqrt{10},0)$ 或 $(-2\sqrt{10},0)$;

当 $OC = PC$ 时, 则 $m^2 = (m-6)^2 + (0-2)^2$

$$\text{解得 } m = \frac{10}{3},$$

∴ 点 C 的坐标为 $(\frac{10}{3},0)$;

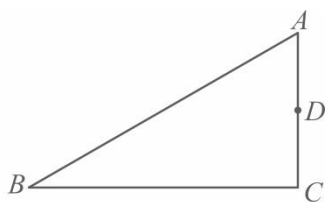
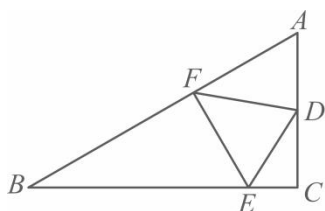
当 $PC = OP$ 时, 则 $(m-6)^2 + (0-2)^2 = 40$,

解得 $m = 0$ (舍去) 或 $m = 12$,

∴ 点 C 的坐标为 $(12,0)$;

综上所述, 点 C 的坐标为 $(2\sqrt{10},0)$ 或 $(-2\sqrt{10},0)$ 或 $(\frac{10}{3},0)$ 或 $(12,0)$.

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $AB = 4$, 点 D 为边 AC 的中点, 点 E 是边 BC 上的动点 (点 E 与点 B 不重合), 作 $EF \perp AB$, 交线段 AB 于点 F , 连结 EF 、 DE 、 DF .



(备用图)

- (1) 若 $EF = 2CE$ ，求 CE 的长；
- (2) 若 $BE = x$ ， $\triangle DEF$ 的面积是 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域；
- (3) 当 $\triangle BEF$ 沿 EF 翻折，点 B 落在点 G 的位置，当 $\triangle DEG$ 是以点 G 为直角顶点的直角三角形时，求 BE 的长。

【答案】(1) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

(2) y 关于 x 的函数关系式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{7}{8}x$ ，定义域为 $0 < x \leq 2\sqrt{3}$ ；

(3) $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的性质、相似三角形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，熟练掌握性质定理是解题的关键。

(1) 根据题意，由勾股定理得出 BC 的长，再证明 $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ ，再根据相似三角形的性质，对应边成比例，即 $\frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AC}$ ，从而得到等式，求解即可得出答案；

(2) 作 $FH \perp AC$ 交 AC 于点 H ，从而得到 $\triangle AFD$ 的面积，再分别求出其他几个三角形的面积，再进行计算即可得到 y 关于 x 的函数关系式，然后根据题意即可得到函数的定义域；

(3) 根据 $\triangle BEF$ 沿 EF 翻折，从而得到 $\triangle BFE \cong \triangle GFE$ ，再根据 $\triangle DEG$ 是以点 G 为直角顶点的直角三角形，得到点 G 的位置，经过运算即可得到 $AD = GD$ ，从而证明 $\text{Rt}\triangle DEG \cong \text{Rt}\triangle DEC$ ，最后得到 BE 的长。

【小问 1 详解】

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AC = 2, \quad AB = 4,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

令 $CE = a$,

$\because$ 点 E 是边 BC 上的动点, $BC = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore BE = BC - CE = 2\sqrt{3} - a,$$

$$\because EF = 2CE,$$

$$\therefore EF = 2a,$$

$$\because EF \perp AB,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{2\sqrt{3} - a}{4} = \frac{2a}{2},$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore CE \text{ 的长为 } \frac{2\sqrt{3}}{5};$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可得, $\triangle BEF \sim \triangle BAC$,

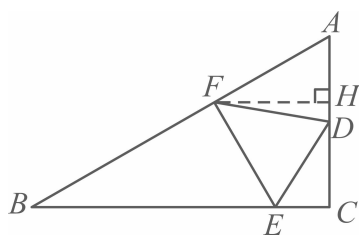
$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{EF}{2} = \frac{BF}{2\sqrt{3}},$$

$$\because BE = x,$$

$$\therefore EF = \frac{x}{2}, \quad BF = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad CE = 2\sqrt{3} - x,$$

$$\therefore AF = AB - BF = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

如图, 作 $FH \perp AC$ 交 AC 于点 H ,



$$\therefore \angle FHA = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AFH \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{FH}{BC} = \frac{AF}{AB}, \text{ 即 } \frac{FH}{2\sqrt{3}} = \frac{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x}{4},$$

$$\therefore FH = \frac{8\sqrt{3} - 3x}{4},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 是边 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle DCE} - S_{\triangle ADF}$$

$$\text{即 } S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}AC \cdot BC - \frac{1}{2}BF \cdot EF - \frac{1}{2}CE \cdot CD - \frac{1}{2}AD \cdot FH,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \times (2\sqrt{3} - x) - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{8\sqrt{3} - 3x}{4},$$

$$\text{整理得: } y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{7}{8}x,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 是边 } BC \text{ 上的动点, 点 } E \text{ 与点 } B \text{ 不重复},$$

$$\therefore 0 < x \leq 2\sqrt{3},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{7}{8}x, \text{ 定义域为 } 0 < x \leq 2\sqrt{3};$$

【小问3详解】

$$\therefore EF \perp AB, \triangle BEF \text{ 沿 } EF \text{ 翻折, 点 } B \text{ 落在点 } G \text{ 的位置},$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 在直线 } AB \text{ 上, } \triangle BFE \cong \triangle GFE,$$

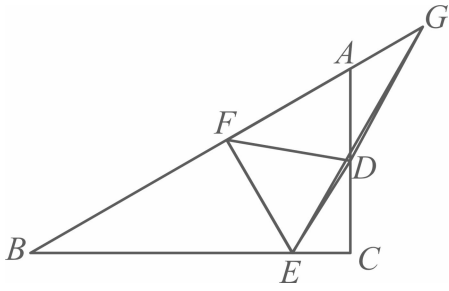
$$\therefore EG = BE, \angle EGF = \angle B,$$

$$\therefore \triangle DEG \text{ 是以点 } G \text{ 为直角顶点的直角三角形},$$

$$\angle DEG = 90^\circ,$$

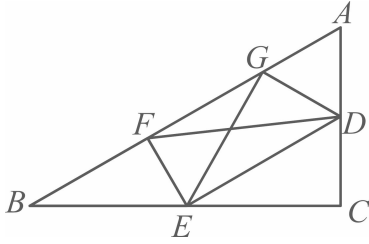
若点 G 落在边 AB 的延长线上,

则如图



此时 $\angle EGD < 90^\circ$ ，不满足条件，

$\therefore$ 点 G 只能落在线段 AB 上，



$\because \angle EGF + \angle AGD = 90^\circ$ ，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$ ，

$\because \angle EGF = \angle B$ ，

$\therefore \angle A + \angle EGF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle AGD$ ，

$\therefore \triangle AGD$ 是等腰三角形， $AD = GD$ ，

$\because$ 点 D 是边 AC 的中点，

$\therefore AD = CD$ ，

$\therefore AD = CD = GD$ ，

$\because \angle EGD = \angle C = 90^\circ$ ， $CD = GD$ ， $DE = DE$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle DEG \cong \text{Rt}\triangle DEC$ ，

$\therefore EG = EC$ ，

$\because EG = BE$ ，

$\therefore BE = EC = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$ ，

$\therefore BE$ 的长为 $\sqrt{3}$ 。