

2023 学年度第一学期期末八年级自适应练习

数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式, 如果与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式, 那么这个根式是 ()

- A. $\sqrt{3a}$ B. $\sqrt{2a^2}$ C. $\sqrt{16a}$ D. $\sqrt{8a}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式, “把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式”. 先把各个二次根式化简, 根据同类二次根式的概念判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{3a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

B、 $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

C、 $\sqrt{16a} = 4\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

D、 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式, 故本选项符合题意;

故选: D.

2. $\sqrt{5m+n}$ 的有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{5m} + \sqrt{n}$ B. $\sqrt{5m+n}$ C. $\sqrt{5m} - \sqrt{n}$ D. $\sqrt{5m-n}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了有理化因式. 根据有理化因式的定义“两个根式相乘的积不含根号”即可解答.

【详解】解: $\because \sqrt{5m+n} \cdot \sqrt{5m+n} = 5m+n$,

$\therefore \sqrt{5m+n}$ 的有理化因式是 $\sqrt{5m+n}$.

故选: B.

3. 下列函数中, y 的值随 x 的值增大而减小的是 ()

- A. $y = 5x$ B. $y = \frac{5}{x}$ C. $y = -5x$ D. $y = -\frac{5}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数和反比例函数的性质. 由正比例函数与反比例函数的图像和性质知, $y = kx (k \neq 0)$, $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 反之 y 随 x 的增大而减小; $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中应在每个象限内讨论增减性.

【详解】 解: A、 $y = 5x$ 中, $\because 5 > 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 本选项不符合题意;

B、 $y = \frac{5}{x}$ 中, $\because 5 > 0$, $\therefore$ 在每个象限内, y 随 x 的增大而减小, 本选项不符合题意;

C、 $y = -5x$, $\because -5 < 0$, $\therefore y$ 随 x 增大而减小, 本选项符合题意;

D、 $y = -\frac{5}{x}$, $\because -5 < 0$, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大, 本选项不符合题意;

故选: C.

4. 在下列关于 x 的一元二次方程中, 一定有两个不相等的实数根的是 ()

A. $x^2 - 3x - 1 = 0$

B. $3x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 + 3 = 0$

D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式. 用根的判别式判断即可, 若方程有两个不相等的实数根, 则需 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

【详解】 解: A、 $x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根, 本选项符合题意;

B、 $3x^2 - x + 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根, 本选项不符合题意;

C、 $x^2 + 3 = 0$,

$$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根, 本选项不符合题意;

D、 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$,

$\therefore$ 方程实有两个相等的实数根，本选项不符合题意；

故选：A.

5. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

- A. 如果一个三角形是轴对称图形，那么这个三角形是等边三角形
- B. 如果两个三角形关于某个点成中心对称，那么这两个三角形全等
- C. 如果一个三角形的两个锐角的和为 90° ，那么这个三角形是直角三角形
- D. 如果两个三角形能够互相重合，那么这两个三角形是全等三角形

【答案】B

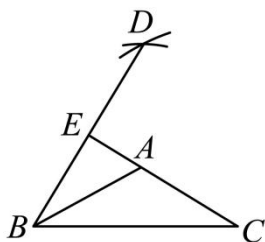
【解析】

【分析】 本题考查了互逆命题及真假命题的判断，熟练掌握直角三角形，等边三角形及全等三角形等知识是解题的关键. 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，再分析逆命题是否为真命题，即可求解.

- 【详解】 A、逆命题：如果一个三角形是等边三角形，那么这个三角形是轴对称图形，正确，为真命题；
- B、逆命题：如果两个三角形全等，那么这两个三角形关于某个点成中心对称，错误，为假命题；
- C、逆命题：如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形的两个锐角的和为 90° ，正确，为真命题；
- D、逆命题：如果两个三角形是全等三角形，那么这两个三角形能够互相重合，正确，为真命题.

故选：B.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 是钝角，以点 C 为圆心、 CB 的长为半径画弧，再以点 A 为圆心、 AB 的长为半径画弧，这两条弧相交于点 D ，连接 BD ，延长 CA 交 BD 于点 E . 下列结论中一定正确的是 ()



- A. $BC = BD$
- B. $2AE = AB$
- C. $BE = DE$
- D. $\angle ABD = \angle ABC$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查了尺规作图、垂直平分线的判定与性质等知识点，掌握 5 种基本作图是解决问题的关键.

根据作图过程可得 $AD = AB$, $CD = CB$, 则根据线段垂直平分线的性质定理的逆定理可判断 AC 垂直平分 BD , 进而即可得到答案

【详解】解: 由作法得 $AD = AB$, $CD = CB$,

$\therefore AC$ 垂直平分 BD ,

$\therefore BE = DE$.

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 化简: $\sqrt{\frac{a^3}{9}} =$ _____.

【答案】 $\frac{a}{3}\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的化简. 根据题意知 $a \geq 0$, 然后根据平方根的性质化简.

【详解】解: 由 $\sqrt{\frac{a^3}{9}}$ 知, $a^3 \geq 0$,

$\therefore a \geq 0$,

$\therefore \sqrt{\frac{a^3}{9}} = \sqrt{\frac{a^2 a}{3^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{3^2}} \sqrt{a} = \frac{a}{3} \sqrt{a}$.

故答案为: $\frac{a}{3} \sqrt{a}$.

8. 方程 $2x^2 - x = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的解法 - 因式分解法. 先把方程化为 $x(2x-1) = 0$, 再化为两个一次方程即可.

【详解】解: 由原方程, 得

$x(2x-1) = 0$,

则 $x = 0$ 或 $2x-1 = 0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

9. 函数 $y = \sqrt{3x+4}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查自变量的取值范围, 函数自变量的范围一般从三个方面考虑: 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数; 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0; 当函数表达式是二次根式时, 被开方数为非负; 根据二次根式的意义, 被开方数是非负数, 得出 $3x+4 \geq 0$, 求解即可, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: 由题意得: $3x+4 \geq 0$,

解得: $x \geq -\frac{4}{3}$,

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt{3x+4}$ 的定义域是 $x \geq -\frac{4}{3}$,

故答案为: $x \geq -\frac{4}{3}$.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$, 那么 $f(2) =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了求函数值. 将 $x=2$ 代入 $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$ 进行计算即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$,

$\therefore f(2) = \frac{2+4}{2 \times 2 - 1} = \frac{6}{3} = 2$,

故答案为: 2.

11. 在实数范围内分解因式: $x^2 - \sqrt{5}x + 1 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查在实数范围内分解因式, 解题的关键是利用求根公式因式分解. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 时,

$x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, 根据求根公式的分解方法和特点即可求解.

【详解】解: $\because x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 时, $x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$,

$$\therefore x^2 - \sqrt{5}x + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right),$$

故答案为: $\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

12. 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象位于第二、四象限, 那么 $k =$ _____. (只需写一个数值)

【答案】-1 (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质, 熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键: 反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, 函数过一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 函数过二、四象限.

根据反比例函数的性质解答即可.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象位于第二、四象限,

$\therefore k < 0$,

写出其中一个数值 $k = -1$,

故答案为: -1 (答案不唯一).

13. 某种商品原价为 100 元, 经过连续两次的降价后, 价格变为 81 元, 如果每次降价的百分率是一样的, 那么每次降价的百分率是_____

【答案】10%

【解析】

【分析】此题可设每次降价的百分率为 x , 第一次降价后价格变为 $100(1-x)$ 元, 第二次在第一次降价后的基础上再降, 变为 $100(1-x)(1-x)$, 即 $100(1-x)^2$ 元, 从而列出方程, 求出答案.

【详解】设每次降价的百分率为 x , 第二次降价后价格变为 $100(1-x)^2$ 元.

根据题意, 得 $100(1-x)^2 = 81$,

即 $(1-x)^2 = 0.81$,

解得 $x_1 = 1.9$, $x_2 = 0.1$.

因为 $x=1.9$ 不合题意，故舍去，

所以 $x=0.1$.

即每次降价的百分率为 0.1，即 10% .

故答案为 10% .

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，此题的关键在于分析降价后的价格，要注意降价的基础，另外还要注意解的取舍 .

14. 已知 M 、 N 是两个定点，那么经过这两个定点的圆的圆心轨迹是_____ .

【答案】 线段 MN 的垂直平分线

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的性质，即“线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等” . 利用圆的性质可以得到圆上所有点到圆心的距离相等，从而得到所有圆心到 M 、 N 两点的距离相等，从而得出结论 .

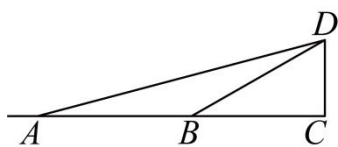
【详解】 解： $\because$ 圆上的所有点到圆心的距离相等，

$\therefore$ 无论圆心在哪里，所有圆心到 M 、 N 两点的距离相等，

$\therefore$ 到 M 、 N 两点的距离相等的点在线段 MN 的垂直平分线上，

故答案为： 线段 MN 的垂直平分线 .

15. 如图，为了测量塔 CD 的高度，现选取两个测量点 A 和 B (点 A 、 B 、 C 在一条直线上)，测得 $\angle CAD = 15^\circ$ ， $\angle CBD = 30^\circ$. 如果 $AB = a$ ，那么塔高 $CD =$ _____ (结果用含字母 a 的代数式表示) .



【答案】 $\frac{1}{2}a$

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形外角的性质、直角三角形的性质、等腰三角形的判定等知识点，掌握直角三角形中 30° 所对的直角边为斜边的一半成为解题的关键 .

先根据三角形的外角的性质可得 $\angle ADB = 15^\circ$ ，进而得到 $\angle ADB = \angle CAD$ ，由等腰三角形的判定可得 $BD = AB = a$ ，最后根据直角三角形中 30° 所对的直角边为斜边的一半即可解答 .

【详解】 解： $\because \angle CAD = 15^\circ$ ， $\angle CBD = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle CBD - \angle CAD = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle CAD$ ，

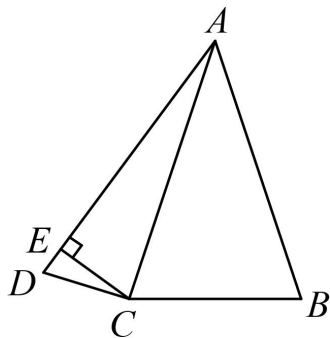
$$\therefore BD = AB = a,$$

$$\because CD \perp BC, \angle CBD = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a.$$

故答案为 $\frac{1}{2}a$.

16. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC$, $CE \perp AD$, 垂足为点 E . 如果 $CE = \frac{1}{2}BC$, $\angle CAD = 18^\circ$, 那么 $\angle B =$ _____ $^\circ$.

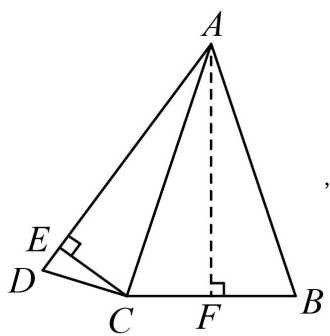


【答案】 72

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形性质, 角平分线判定及性质, 三角形内角和定理. 根据题意过点 A 作 $AF \perp CB$, 再利用已知条件得到 AC 平分 $\angle EAF$, 再利用等腰三角形性质及三角形内角和定理即可得到本题答案.

【详解】解: 过点 A 作 $AF \perp CB$,



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle EAF,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FAC,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$\therefore \triangle ACB$ 为等腰三角形,

$\therefore AF$ 平分 $\angle CAB$,

$$\therefore \angle CAD = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ,$$

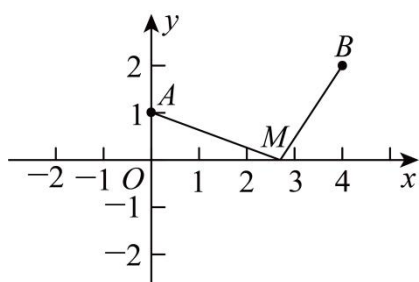
故答案为: 72.

17. 小明求代数式 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-4)^2+4}$ 的最小值时, 采用如下方法: 如图, 在同一直角坐标平面内, 设

$M(x, 0)$ 为 x 轴上的一个动点, 选取点 $A(0, 1)$ 和 $B(4, 2)$, 根据两点的距离公式得 $AM = \sqrt{x^2+1}$,

$BM = \sqrt{(x-4)^2+4}$, 通过构造, 将求代数式的最小值转化为求 $AM + BM$ 的最小值, 由此小明求出

$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-4)^2+4}$ 的最小值等于_____.

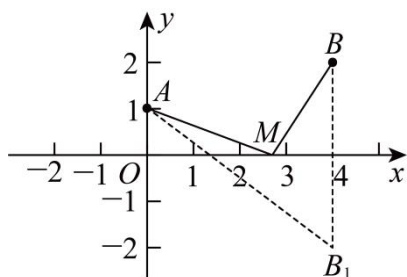


【答案】5

【解析】

【分析】本题主要考查了利用轴对称求最值问题以及两点之间距离公式, 根据原式表示的几何意义是点 M 到点 A , B 的距离之和的最小值, 利用轴对称作出图形求出 AB_1 的长即可, 正确转化代数式为两点之间距离问题是解题关键.

【详解】如图所示, 根据原式表示的几何意义是点 M 到点 A , B 的距离之和的最小值, 可作 B 点关于 x 轴的对称点 B_1 , 连接 AB_1 , 此时 AB_1 的长即为所求代数式的最小值,



$$\therefore B(4,2),$$

$$\therefore B_1(4,-2),$$

$$\therefore A(0,1)$$

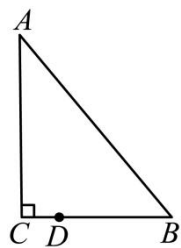
$$\therefore AB_1 = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = 5,$$

$$\therefore \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-4)^2+4} \text{ 的最小值等于 } 5,$$

故答案为: 5.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2\sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{10}$, 点 D 在边 BC 上, 且 $CD = \frac{1}{3}BD$. 现

将 $\triangle ABC$ 绕着点 D 旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 点 A_1 、 B_1 、 C_1 分别与点 A 、 B 、 C 对应, 连接 AA_1 . 如果点 C_1 在线段 AD 的延长线上, 那么 $AA_1 =$ _____.

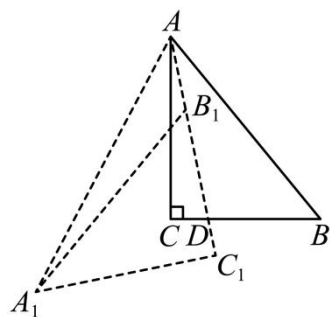


【答案】 $2\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理, 旋转性质. 根据题意先画出旋转后的简图, 先利用勾股定理求出 CB 的长, 再求出 $CD = C_1D_1 = 1$, 再利用勾股定理求出 AD , 继而得到 AC_1 , 再利用旋转性质及勾股定理即可得到本题答案.

【详解】 解: 根据题意画出如下图:



$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = 2\sqrt{6}, \quad AB = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore BC = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{6})^2} = 4,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{3}BD,$$

$$\therefore CD = 1, BD = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 1^2} = 5,$$

$\therefore$ 现将 ABC 绕着点 D 旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$\therefore CD = DC_1 = 1, AC = AC_1 = 2\sqrt{6}, \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore AC_1 = 6,$$

$$\therefore AA_1 = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 6^2} = 2\sqrt{15},$$

故答案为: $2\sqrt{15}$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{2 - \sqrt{3}}.$

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算、分母有理化. 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{12}}{2} + \sqrt{\frac{18}{6}} - \frac{2(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2(2 + \sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} \\ &= -4. \end{aligned}$$

20. 解方程: $\frac{x(x-4)}{2} = x + 8.$

【答案】 $x_1 = 8, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程. 先把原方程化为一般式, 再利用因式分解法解方程即可.

【详解】 解: $\because \frac{x(x-4)}{2} = x+8,$

$$\therefore x(x-4) = 2(x+8),$$

$$\therefore x^2 - 4x = 2x + 16,$$

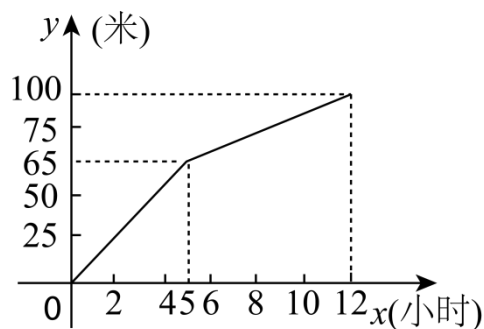
$$\therefore x^2 - 6x - 16 = 0,$$

$$\therefore (x-8)(x+2) = 0,$$

$$\therefore x-8=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 8, \quad x_2 = -2.$$

21. 现有两段长度相等的路面需要摊铺, 分别交给甲乙两队完成. 甲队摊铺路面的长度 y (米) 与摊铺时间 x (小时) 的函数关系的图象如图所示; 乙队摊铺路面的长度 y (米) 与摊铺时间 x (小时) 的函数解析式是 $y = 10x (0 \leq x \leq 10)$. 结合图象提供的信息, 回答下列问题:



- (1) 甲队摊铺的路面总长是_____米;
- (2) 在图中画出乙队摊铺路面的长度 y (米) 与摊铺时间 x (小时) 的函数关系的图象;
- (3) 当甲队的工作效率发生变化的这个时刻, 乙队摊铺路面的长度是_____米;
- (4) 甲队的平均工作效率是每小时_____米.

【答案】 (1) 100 (2) 见解析

(3) 50 (4) $\frac{25}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了从函数图象中获取信息、一次函数的应用, 读懂函数图象, 采用数形结合的思想是解此题的关键.

- (1) 由函数图象即可得出答案;

(2) 根据乙队摊铺路面的长度 y (米) 与摊铺时间 x (小时) 的函数解析式是 $y = 10x (0 \leq x \leq 10)$ 画出图象即可;

(3) 由图可得, 当 $x = 5$ 时, 甲队的工作效率发生变化, 将 $x = 5$ 代入 $y = 10x (0 \leq x \leq 10)$ 进行计算即可得出答案;

(4) 由图可得: 甲队摊铺的路面总长是 100 米, 所花费的时间为 12 小时, 由此进行计算即可得出答案.

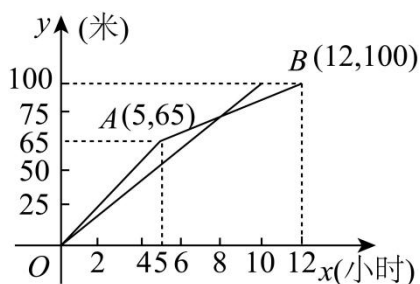
【小问 1 详解】

解: 由图可得: 甲队摊铺的路面总长是 100 米,

故答案为: 100;

【小问 2 详解】

解: 画出乙队摊铺路面的长度 y (米) 与摊铺时间 x (小时) 的函数关系的图象如图所示:



【小问 3 详解】

解: 由图可得, 当 $x = 5$ 时, 甲队的工作效率发生变化,

此时乙队摊铺路面的长度是 $y = 5 \times 10 = 50$ (米),

故答案为: 50;

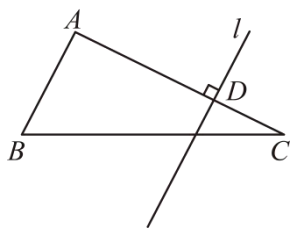
【小问 4 详解】

解: 由图可得: 甲队摊铺的路面总长是 100 米, 所花费的时间为 12 小时,

故甲队的平均工作效率是每小时 $100 \div 12 = \frac{25}{3}$ (米),

故答案为: $\frac{25}{3}$.

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{5}AB$, 直线 $l \perp AC$, 垂足为点 D .



(1) 如果点 E 在直线 l 上, 且点 E 到 $\angle BAC$ 两边的距离相等, 试用直尺和圆规作出满足上述条件的点 E (不

写作法，仅保留作图痕迹，在图中清楚地标注出点 E ）；

(2) 在第 (1) 题的条件下，连接 BE 和 CE ，如果 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{2}$ ，请判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) $\triangle ABC$ 为直角三角形. 理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的性质，尺规作图，勾股定理，解题的关键是掌握角平分线的性质.

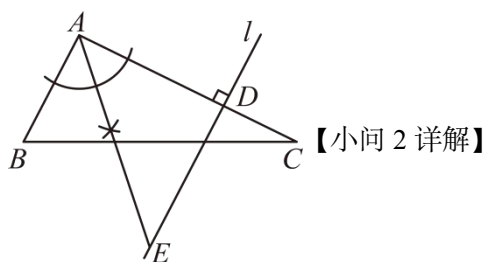
(1) 根据角平分线的性质，尺规作 $\angle BAC$ 的平分线，与直线 l 交于点 E ；

(2) 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M ，根据角平分线性质得出 $EM = ED$ ，根据三角形面积公式求出 $AC = 2AB$ ，

结合 $BC = \sqrt{5}AB$ ，可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ，即可解答.

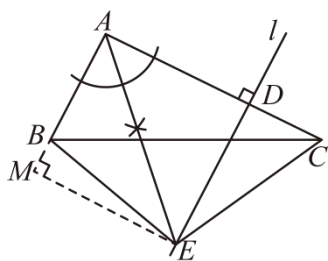
【小问 1 详解】

解：如图，点 E 即为所求，



$\triangle ABC$ 为直角三角形，

理由如下：过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M .



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$ ， $ED \perp AC$ ， $EM \perp AB$ ，

$\therefore EM = ED$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot EM}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot ED} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

$$\therefore AC^2 = 4AB^2,$$

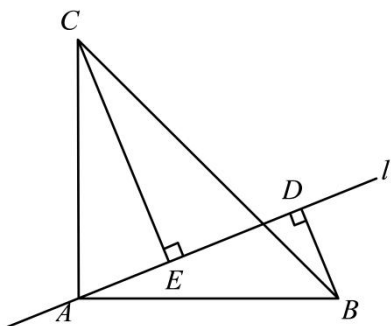
$$\therefore BC = \sqrt{5}AB,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 23、24 题每题 8 分, 第 25 题 12 分, 满分 28 分)

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 A 在边 BC 的垂直平分线上, 直线 l 经过点 A , BD 、 CE 分别垂直于直线 l , 垂足分别为点 D 、 E , 且 $BD = AE$.



(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle CAE$.

(2) 取边 BC 的中点 F , 连接 EF , 求证: EF 平分 $\angle DEC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据角平分线的性质可得 $AC = BA$, 结合已知条件可证 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$;

(2) 设 l 交 BC 于点 Q , 连接 AF , 过 F 作 $FM \perp CE$ 于 M , $FN \perp AD$ 于 N , 根据 (1) 结论可得 $\angle BAD = \angle ACE$, 推出 $\angle CAB = 90^\circ$, 可得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 推出 $AF = CF$, 证 $\angle FAN = \angle FCM$, 可得 $\triangle CMF \cong \triangle ANF$ (AAS), 得到 $FM = FN$, 即得.

【小问 1 详解】

$$\because CE \perp l, BD \perp l,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle CED = \angle ADB = 90^\circ, \triangle AEC \text{ 与 } \triangle BDA \text{ 为直角三角形},$$

$\because$ 点 A 在边 BC 垂直平分线上,

$$\therefore AC = BA,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 也 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中,

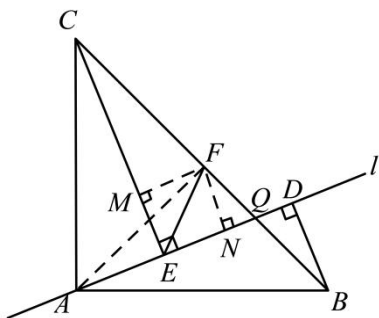
$$\begin{cases} AE = BD \\ AC = BA \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACE \cong \text{Rt}\triangle BAD(\text{HL}),$$

$$\text{即 } \triangle ABD \cong \triangle CAE;$$

【小问2详解】

设 l 交 BC 于点 Q , 连接 AF , 过 F 作 $FM \perp CE$ 于 M , 作 $FN \perp AD$ 于 N ,



$$\therefore \angle CMF = \angle ANF = 90^\circ$$

由 (1) 知 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$,

$$\therefore \angle BAD = \angle ACE,$$

$$\because \angle ACE + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

即 $\angle CAB = 90^\circ$,

$$\because AC = AB,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore F$ 为 BC 中点,

$$\therefore AF = CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because \angle FAN + \angle AQF = 90^\circ, \quad \angle FCM + \angle AQF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAN = \angle FCM,$$

在 $\triangle CMF$ 与 $\triangle ANF$ 中,

$$\begin{cases} \angle CMF = \angle ANF \\ \angle FCM = \angle FAN, \\ CF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CMF \cong \triangle ANF(\text{AAS}),$$

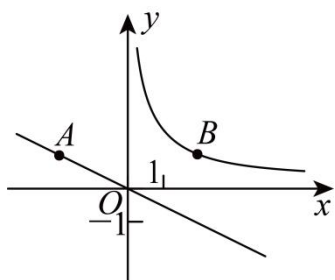
$$\therefore FM = FN,$$

又 $\because FM \perp CE, FN \perp AD$,

$\therefore EF$ 平分 $\angle DEC$.

【点睛】 本题主要考查了线段垂直平分线，全等三角形，等腰直角三角形，角平分线等，熟练掌握线段垂直平分线的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，角平分线的判定，是解决问题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y = -\frac{1}{2}x$ 的图像经过点 $A(-2, m)$ ，点 A 与点 B 关于 y 轴对称，且点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上.



(1) 求 m 的值和反比例函数的解析式;

(2) 设 P 是直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上的一动点. 当线段 BP 最短时, 求 $\triangle ABP$ 的面积.

【答案】 (1) $1; y = \frac{2}{x}$

(2) $\frac{16}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数、反比例函数的性质以及直线与坐标轴的交点问题，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键，

(1) 将 $A(-2, m)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x$ 得到 m 的值， A 与点 B 关于 y 轴对称，可得 $B(2, 1)$ ，再将点 B 代入即可得到反比例函数的解析式；

(2) 设 $P\left(p, \frac{1}{2}p\right)$ ，当 $BD \perp AP$ 时，线段 BP 最短，根据勾股定理可得点 P 的坐标，即可得到 AP 、 BP 的值， $\triangle ABP$ 的面积即可求解.

【小问 1 详解】

解：将 $A(-2, m)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x$ 得 $m = -\frac{1}{2} \times (-2) = 1$,

$$\therefore A(-2,1),$$

$\because$ 点 A 与点 B 关于 y 轴对称,

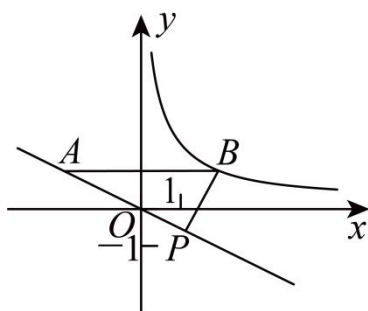
$$\therefore B(2,1),$$

将 $B(2,1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = 2 \times 1 = 2,$

$$\therefore y = \frac{2}{x}.$$

【小问 2 详解】

解: 设 $P\left(p, \frac{1}{2}p\right),$



当 $BD \perp AP$ 时, 线段 BP 最短,

由 (1) 知 $A(-2,1), B(2,1),$

$$\therefore AB^2 = [2 - (-2)]^2 = 16,$$

$$BP^2 = (2-p)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}p\right)^2,$$

$$AP^2 = (p+2)^2 + (1+5p)^2,$$

由勾定理得 $AB^2 = AP^2 + BP^2,$

$$\therefore 16 = (p+2)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}p\right)^2 + (2-p)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}p\right)^2,$$

$$\text{整理得: } 5p^2 + 4p - 12 = 0$$

$$\text{解之得: } p = -2 \text{ (舍)}, p = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore P\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right),$$

$$\therefore BP = \sqrt{\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$AP = \sqrt{\left(\frac{6}{5} + 2\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{320}{25}} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BP = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{16}{5}.$$

25. 【图形新发现】小普同学发现：如果一个三角形的一条角平分线与一条中线互相垂直，那么这个三角形的某两条边必有倍半关系.

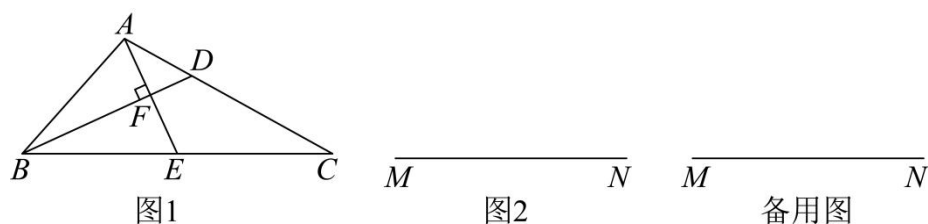
如图 1，已知在 $\triangle ABC$ 中， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， AE 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AE \perp BD$ ，垂足为点 F .

(1) 根据图 1，写出 $\triangle ABC$ 中小普同学所发现的结论，并给出证明；

【图形再探究】现将小普同学所研究的三角形称为“线垂”三角形，并将被这条内角平分线所平分的内角叫做“分角”. 下面我们跟着小普同学再探究：

(2) 在如图 1 中，“线垂”三角形 $\triangle ABC$ 是否可以是直角三角形？如果可以，求 $\angle DBC$ 的度数；如果不可以，请说明理由；

(3) 已知线段 MN ，是否存在一点 P ，使得以 MN 为一边的“线垂”三角形 $\triangle PMN$ 为等腰三角形？如果存在，请在图 2 中用直尺和圆规做出 $\angle PMN$ 为“分角”的“线垂”等腰三角形 $\triangle PMN$ （不写作法，仅保留作图痕迹，在图中清楚地标注出点 P ），并用文字语言归纳表述成一条与“线垂”等腰三角形的边或角有关的真命题；如果不存在，请说明理由.



【答案】(1) $BC = 2AB$ ，证明见解析；(2) 可以， $\angle DBC$ 的度数为 30° 或 45° ；(3) 存在，见解析

【解析】

【分析】本题考查新定义，尺规作图，等腰三角形的判定与性质，直角三角形斜边中线的性质，角平分线定义，中线定义等知识点，理解新定义，熟练掌握相关知识，合理分类讨论是解题的关键.

(1) 利用角平分线性质的定义得到 $\angle BAF = \angle BEF$ ，即 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，再根据中线定义即可得到本题答案；

(2) 分 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ 三种情况讨论，根据 (1) 中结论即角平分线性质的

可得到本题答案;

(3) 作线段 MN 的垂直平分线交线于 O , 以 M 为圆心, MO 为半径画弧, 以 N 为圆心, MN 为半径画弧, 两弧相交点 P , 连接 MP , NP 即可.

【详解】(1) 解: $BC = 2AB$, 证明如下:

$\because BD$ 是 ABC 的角平分线,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle BFA = \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAF = \angle CBD + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BEF,$$

$$\therefore BA = BE,$$

$\because AE$ 是 ABC 的中线,

$$\therefore BE = CE,$$

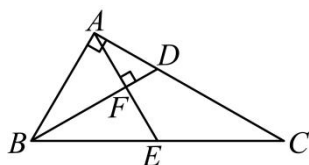
$$\therefore BA = BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BC = 2AB;$$

(2) 解: 可以,

理由如下:

①当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 如图,



$\because \angle BAC = 90^\circ$, AE 是中线,

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}BC,$$

在“线垂”三角形 ABC 中, $BC = 2AB$,

$$\therefore AB = AE = BE,$$

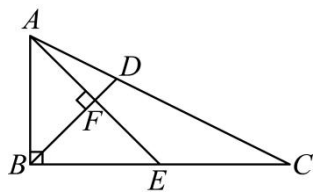
$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ$$

$\because BD$ 是 ABC 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ;$$

②当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，如图，



$\therefore AE$ 是中线，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC,$$

在“线垂”三角形 ABC 中， $BC = 2AB$ ，

$$\therefore AB = BE,$$

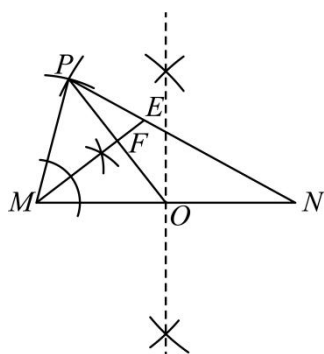
$\therefore BD$ 是 ABC 的角平分线，

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ,$$

③当 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB > BC$ ，与“线垂”三角形 ABC 中， $BC = 2AB$ ，相矛盾，故舍去；

综上， $\angle DBC$ 的度数为 30° 或 45° ；

(3) 解：存在，如图， $\triangle MNP$ 即为所求，



由作图知： O 为 MN 中点， $MP = MO$ ， $MN = PN$ ， ME 平分 $\angle PMN$ ，

$$\therefore ME \perp OP,$$

$\therefore$ 等腰 $\triangle MNP$ 是以 $\angle PMN$ 为“分角”的“线垂”三角形，

“线垂”等腰三角形的两底角相等.