

扬波中学 2024 学年第一学期期末考试

八年级 数学试卷

(完成时间: 100 分 满分: 120 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

【每晒只有一个正前选项. 在答题纸相应位置填涂】

1. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是 ()

A. $x^2 = 2x - 4$

B. $x^2 + 1 = 0$

C. $x^2 + 2x + \sqrt{3} = 0$

D. $x^2 - 2x - 1 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 理解根的判别式对应的根的三种情况是解题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

根据一元二次方程根的判别式进行计算即可求解.

【详解】 解: A、 $x^2 = 2x - 4$, 即 $x^2 - 2x + 4 = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$$

$\therefore$ 方程没有实数根, 故该选项不符合题意;

B、 $x^2 + 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$$

$\therefore$ 方程没有实数根, 故该选项不符合题意;

C、 $x^2 + 2x + \sqrt{3} = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{3} < 0,$$

$\therefore$ 方程没有实数根, 故该选项不符合题意;

D、 $x^2 - 2x - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根, 故该选项符合题意.

故选: D.

2. 下列函数中, 在定义域内 y 随 x 的增大而增大的函数是 ()

- A. $y = -2x$; B. $y = 2x$; C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的增减性有限制条件（即范围），不连贯；一次函数 $y = kx + b$ ， $k > 0$ 时 y 随 x 的增大而增大， $k < 0$ 时 y 随 x 的增大而减小。

【详解】A、 $y = -2x$ ， y 随 x 的增大而减小，不符合题意；

B、 $y = 2x$ ， y 随 x 的增大而增大，

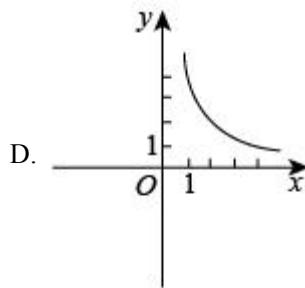
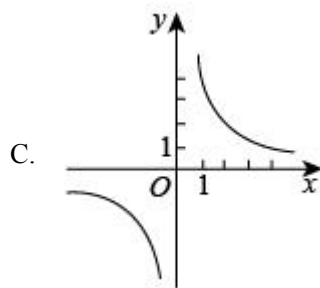
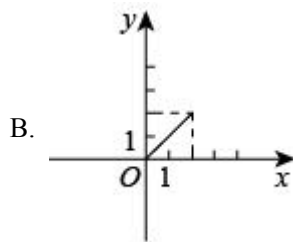
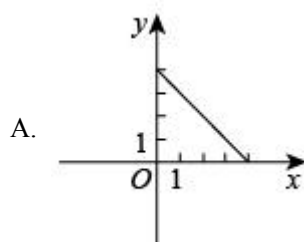
C、 $y = \frac{2}{x}$ ，考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，不符合题意；

D、 $y = -\frac{2}{x}$ 考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数、反比例函数的增减性；关键是明确各函数的增减性的限制条件.

3. 已知长方形的两条边长为 x 、 y ，面积是 4，那么 y 关于 x 的函数的图像是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据长方形的面积公式得出 $xy = 4$ ，即 $y = \frac{4}{x}$ ，且 $x > 0$ ，据此即可求解.

【详解】解：依题意 $xy = 4$ ，即 $y = \frac{4}{x}$ ，且 $x > 0$ ，

$\therefore y$ 关于 x 的函数的图像是反比例函数图像，且图像在第一象限，

故选：D.

【点睛】 本题考查了反比例函数的应用，掌握反比例函数的性质和图像是解题的关键.

4. 已知下列命题中：

- ①有两条边分别相等的两个直角三角形全等；
- ②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等；
- ③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等；
- ④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】 解：①由于 SSA 不能判定三角形全等，则有两边分别相等的两个直角三角形不一定全等，故原命题是假命题；

②由于满足 ASA ，则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等，故原命题是真命题；

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等，故原命题是假命题；

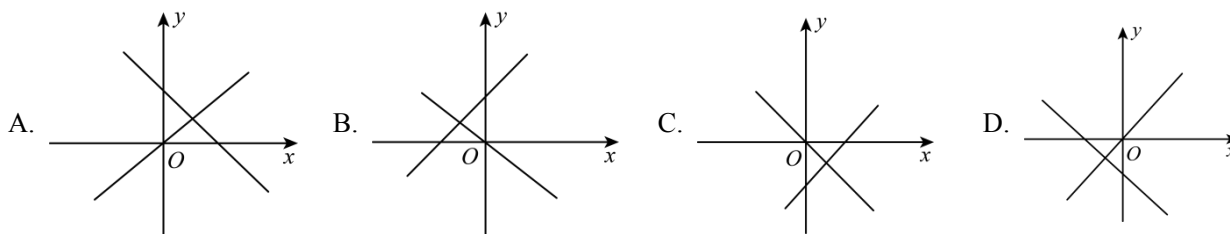
④由于两等腰三角形顶角相等，则他们的底角对应相等，再结合底相等，满足 ASA ，故原命题是真命题.

其中真命题的个数是 2 个.

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点，灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

5. 如下图，在同一直角坐标系中，直线 $y = x - a$ 和直线 $y = ax$ 的图象可能是 ()



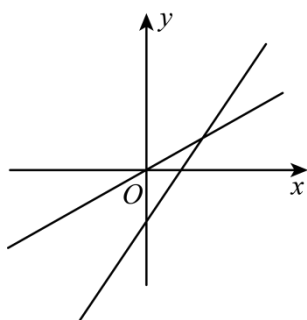
【答案】 B

【解析】

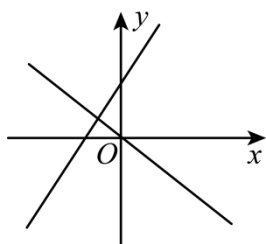
【分析】 本题考查一次函数与正比例函数的图像，分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况，讨论两个函数图像的位置即

可得出答案.

【详解】解: 当 $a > 0$ 时, 直线 $y = x - a$ 经过第一、三、四象限, 直线 $y = ax$ 经过第一、三象限, 大致为:



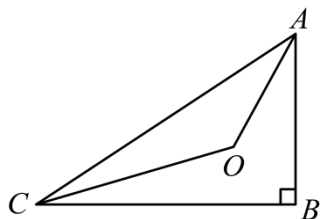
当 $a < 0$ 时, 直线 $y = x - a$ 经过第一、二、三象限, 直线 $y = ax$ 经过第二、四象限, 大致为:



综上, B 选项符合题意.

故选: B

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 O 是 $\angle CAB$ 、 $\angle ACB$ 平分线的交点, 且 $BC = 4\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, 则点 O 到边 AB 的距离为 ()



A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

D. 4cm

【答案】A

【解析】

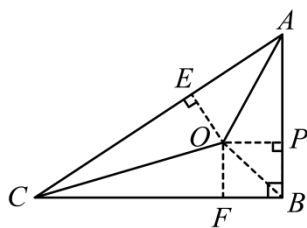
【分析】本题主要考查了角平分线的性质, 勾股定理以及三角形面积法, 直接利用角平分线的性质结合三角形面积求法得出答案.

【详解】解: $\because$ 点 O 为 $\angle CAB$ 与 $\angle ACB$ 的平分线的交点,

$\therefore$ 点 O 在 $\angle ACB$ 的角平分线上,

$\therefore$ 点 O 到 $\triangle ABC$ 的三边的距离相等,

过 O 作 $OP \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$, 连接 OB ,



则 $OP = OE = OF$,

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AOC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} \\
 &= \frac{1}{2}OE \cdot AC + \frac{1}{2}OP \cdot AB + \frac{1}{2}OF \cdot BC \\
 &= \frac{1}{2}OP \cdot AC + \frac{1}{2}OP \cdot AB + \frac{1}{2}OP \cdot BC \\
 &= \frac{1}{2}OP \cdot (AB + BC + AC),
 \end{aligned}$$

又 $\because AC = 5\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $\triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle B = 90^\circ$

$\therefore AB = 3\text{cm}$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \cdot OP (3 + 4 + 5),$$

解得: $OP = 1\text{cm}$.

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 当 $a < -1$ 时, $\sqrt{(a+1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-a-1$

【解析】

【分析】 根据不等式的性质可得 $a+1 < 0$, 再根据二次根式的性质求解即可.

【详解】 解: $\because a < -1$,

$$\therefore a+1 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(a+1)^2} = -(a+1) = -a-1,$$

故答案为: $-a-1$.

8. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 3x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2 \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

【解析】

【分析】 求出方程 $2x^2-3x-1=0$ 中的判别式的值, 求出方程的两个解, 代入 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 即可.

【详解】 设 $2x^2-3x-1=0$,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17,$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2 \times 2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

$$\text{故答案为 } 2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

【点睛】 本题考查了在实数范围内分解因式和解一元二次方程, 注意: 若 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根, 则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

9. 经过点 M 、 N 的圆的圆心轨迹是_____.

【答案】 线段 MN 的垂直平分线

【解析】

【分析】 要求作经过已知点 M 和点 N 的圆的圆心, 则圆心应满足到点 M 和点 N 的距离相等, 从而根据线段的垂直平分线性质的性质即可求解.

【详解】 解: 根据同圆的半径相等, 则圆心应满足到点 M 和点 N 的距离相等, 即经过已知点 M 和点 N 的圆的圆心的轨迹是线段 MN 的垂直平分线.

故答案为: 线段 MN 的垂直平分线.

【点睛】 此题考查了点的轨迹问题, 熟悉线段垂直平分线的性质是解题关键.

10. 已知直角坐标平面内三点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$, 那么 ABC 是_____三角形.

【答案】 等边

【解析】

【分析】 本题考查两点间的距离公式, 等边三角形的判定, 掌握两点间的距离公式是解题的关键. 由题意根据两点间的距离公式可得 AC , BC , AB 的长度, 即可对 ABC 的形状进行判断.

【详解】 解: $\because A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$,

$$\therefore AB=2,$$

$$AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$BC = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\therefore AB = AC = BC,$$

$\therefore ABC$ 是等边三角形.

故答案为: 等边.

11. 在一次函数 $y = (k-2)x+1$ 的图象经过第一、二、四象限, 则 k 的取值范围为_____.

【答案】 $k < 2$

【解析】

【分析】 根据 $y = kx + b$, $k < 0$, $b > 0$ 时, 函数图象经过第一、二、四象限, 则有 $k-2 < 0$ 即可求解;

【详解】 解: $y = (k-2)x+1$ 的图象经过第一、二、四象限,

$$\therefore k-2 < 0,$$

$$\therefore k < 2;$$

故答案为: $k < 2$.

【点睛】 本题考查一次函数图象与系数的关系; 熟练掌握一次函数 $y = kx + b$, k 与 b 对函数图象的影响是解题的关键.

12. 将直线 $y = -2x + 3$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位, 得到的直线解析式是_____.

【答案】 $y = -2x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象的平移, 根据平移特征解题: 左加右减, 上加下减即可解答.

【详解】 解: 将直线 $y = -2x + 3$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位, 得到的直线解析式是 $y = -2x + 3 - 2$, 即

$$y = -2x + 1.$$

故答案为: $y = -2x + 1$

13. 某工厂 10 月份的产值是 100 万元, 计划 12 月份的产值要达到 144 万元, 并每月以相同的增长率增长. 如

果设这个增长率为 x ，由题意可列出关于 x 的方程是_____.

【答案】 $100(1+x)^2 = 144$

【解析】

【分析】 设这个增长率为 x ，根据题意列出一元二次方程，即可求解.

【详解】 解：设这个增长率为 x ，由题意可列出关于 x 的方程是： $100(1+x)^2 = 144$ ，

故答案为： $100(1+x)^2 = 144$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为3、4、5，则最长边上的中线长为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 根据已知数据利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，进而根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 的三边长分别为3、4、5， $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，

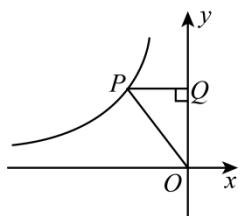
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

$\therefore$ 最长边上的中线长为斜边的一半，即 $\frac{5}{2}$.

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点睛】 本题考查了勾股定理的逆定理，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形是解题的关键.

15. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图像如图所示，若 $\triangle POQ$ 的面积是2，则 k 的值为_____.



【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数 k 的几何意义，利用反比例函数 k 的几何意义即可解答.

【详解】解：设点 P 的坐标为 (m, n) ($m < 0, n > 0$),

$$\text{则 } S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |m| \cdot n = 2,$$

$$\therefore mn = -4.$$

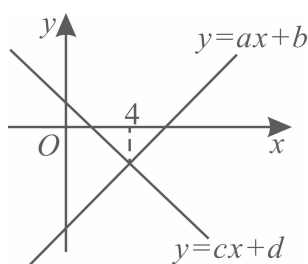
又 $\because$ 点 P 在反比例函数的图像上,

$$\therefore k = mn = -4.$$

故答案为: -4 .

16. 如图所示, 直线 $y = ax + b$ 与直线 $y = cx + d$ 交点的横坐标是 4, 则不等式 $ax + b \geq cx + d$ 的解集是

_____.



【答案】 $x \geq 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数与不等式的关系, 解题的关键是利用函数图象求不等式的解集.

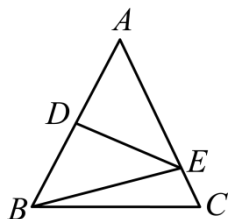
从图象上找到 $y = ax + b$ 在 $y = cx + d$ 上方的部分对应的自变量的取值范围即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = ax + b$ 与直线 $y = cx + d$ 交点的横坐标是 4,

$\therefore$ 不等式 $ax + b \geq cx + d$ 的解集是 $x \geq 4$.

故答案为: $x \geq 4$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AB 的垂直平分线 DE 与边 AB, AC 交于点 D, E , 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长分别是 32cm 和 20cm, 则 BD 的长为_____ cm.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质和定义, 根据垂直平分线上的点到两端距离相等, 得出 $AE = BE$,

进而得到 AB 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长之差, 即可求解.

【详解】解: $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 的周长 } C_{\triangle BCE} = BC + BE + CE = BC + AE + CE = BC + AC = 20\text{cm},$$

$$\because \triangle ABC \text{ 的周长 } C_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 32\text{cm},$$

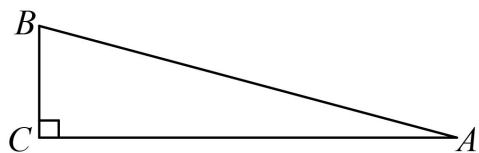
$$\therefore AB = C_{\triangle ABC} - C_{\triangle BCE} = 32 - 20 = 12(\text{cm}),$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm},$$

故答案为: 6.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $AB = 8$, 点 D 是 AB 的中点, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 折叠后点 A 落在点 E , 那么 BE 的长为_____

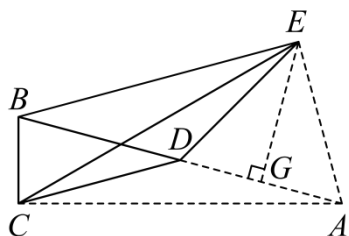


【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 AE , 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G , 由折叠的性质得, $CE = CA$, $\angle ECD = \angle ACD$, $\angle CDE = \angle CDA$, $ED = AD$, 根据直角三角形的性质可得 $CD = AD = 4$, 由三角形外角的性质可得 $\angle BDC = 30^\circ$, 根据直角三角形的性质求得 $\angle DEG = 30^\circ$, $DG = \frac{1}{2}DE = 2$, 利用勾股定理求得 $EG = 2\sqrt{3}$, 从而可得 $BG = 6$, 再利用勾股定理即可求解.

【详解】解: 如图, 连接 AE , 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ,



由折叠的性质得, $CE = CA$, $\angle ECD = \angle ACD$, $\angle CDE = \angle CDA$, $DE = AD$,

$\because \angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 15^\circ$, 点 D 是 AB 的中点,

$$\therefore CD = BD = AD = \frac{1}{2}AB = 4,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore DE = AD = 4, \quad \angle DCA = \angle DAC = 15^\circ, \\
&\therefore \angle CDE = \angle CDA = 180^\circ - \angle DCA - \angle DAC = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ \\
&\therefore \angle BDC = \angle DCA + \angle BAC = 30^\circ, \\
&\therefore \angle BDE = \angle CDE - \angle BDC = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ, \\
&\therefore \angle EDG = 180^\circ - \angle BDE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore EG \perp AB, \text{ 即 } \angle EGD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DEG = 90^\circ - \angle EDG = 30^\circ, \\
&\therefore \text{在 Rt } \triangle DEG \text{ 中, } DG = \frac{1}{2}DE = 2, \\
&EG = \sqrt{DE^2 - DG^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}, \\
&\therefore BG = BD + DG = 4 + 2 = 6, \\
&\therefore \text{在 Rt} \triangle EGB \text{ 中, } BE = \sqrt{BG^2 + EG^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3},
\end{aligned}$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查等腰三角形的性质、勾股定理、直角三角形的性质、三角形外角的性质、折叠的性质, 添加辅助线, 构造直角三角形是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 满分 30 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸上]

19. 计算: $\sqrt{6} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}.$

【答案】 $5\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算进行计算即可求解.

$$\begin{aligned}
&\text{【详解】 解: } \sqrt{6} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} \\
&= 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\
&= 5\sqrt{3} - 2.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根, 求自然数 m 的值并解方程.

【答案】 $m=1$ ，方程的解为 $x_1 = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}$ ， $x_2 = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式、解一元二次方程，解答关键是熟练掌握一元二次方程

$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 根的情况与根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的关系：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根。

根据一元二次方程的定义及根的判别式求出自然数 m 的值，进而解方程即可。

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2-6x+\frac{9}{2}=0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4m \times \frac{9}{2} > 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

解得： $m < 2$ 且 $m \neq 0$ 。

$\because m$ 为自然数，

$$\therefore m=1.$$

当 $m=1$ 时，方程为 $x^2-6x+\frac{9}{2}=0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}.$$

21. 已知正比例函数 $y=kx$ 过第一象限一点 A ，点 A 的横坐标为 2，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，

且 $\triangle AOH$ 的面积为 4，正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 交于 B 、 C 两点。

(1) 求正比例函数解析式；

(2) 求 B 、 C 两点坐标。

【答案】 (1) $y=2x$

(2) $B(1,2)$ ， $C(-1,-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数与反比例函数的交点问题，三角形的面积，待定系数法求函数的解析式，正确理解题意是解答本题的关键。

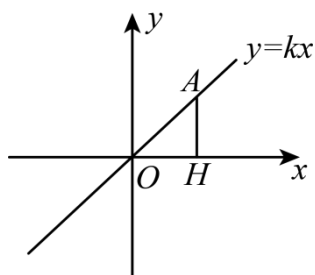
(1) 根据题意求得 $A(2,4)$ ，然后根据待定系数法即可求得正比例函数的解析式；

(2) 根据题意得到方程，解方程即可求得 B 、 C 两点的坐标。

【小问 1 详解】

解：∵点A的横坐标为2，且 $\triangle AOH$ 的面积为4，

如图所示：



$$\therefore S_{\triangle AOH} = \frac{1}{2} \times 2 \times AH = 4,$$

$$\therefore AH = 4,$$

∴点A的纵坐标为4，

$$\therefore A(2, 4),$$

∵正比例函数 $y = kx$ 过第一象限一点A，

$$\therefore 2k = 4,$$

$$\therefore k = 2,$$

∴正比例函数解析式为 $y = 2x$ ；

【小问2详解】

解：由（1）知， $k = 2$ ，

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{2}{x},$$

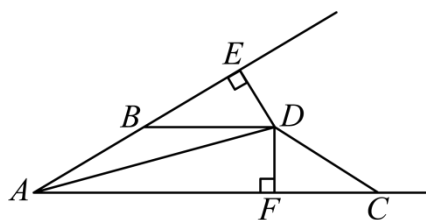
∵正比例函数 $y = 2x$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 交于B、C两点，

$$\therefore 2x = \frac{2}{x},$$

解得： $x = \pm 1$ ，

$$\therefore B(1, 2), C(-1, -2).$$

22. 如图，AD平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点E、F， $DB = DC$ 。



(1) 求证： $BE = CF$ ；

(2) 如果 $BD \parallel AC$, $\angle DAF = 15^\circ$, $DF = 2$, 求 AB 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) 4

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定, 角平分线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 熟悉相关性质是解题的关键.

(1) 证明 $DE = DF$, $\angle E = \angle DFC = 90^\circ$, 进而证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$ (HL), 即可得证;

(2) 根据平行线的性质和含 30° 的直角三角形的性质解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore DE = DF$, $\angle BED = \angle DFC = 90^\circ$;

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ DE = DF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$ (HL),

$\therefore BE = CF$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知 $DE = DF = 2$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle DAF = 15^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 2\angle DAF = 30^\circ$, $\angle BAD = \angle DAF$,

$\because BD \parallel AC$,

$\therefore \angle DBE = \angle BAC = 30^\circ$, $\angle DAF = \angle BDA$,

$\therefore \angle BAD = \angle BDA$,

$\therefore AB = BD$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle DBE = 30^\circ$,

$\therefore BD = 2DE = 2 \times 2 = 4$,

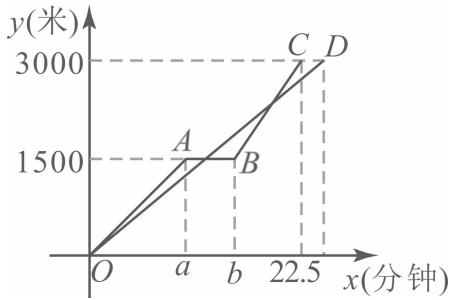
$\therefore AB = BD = 4$.

四、解答题 (本大题共 4 题, 满分 36 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸上]

23. 为了响应“低碳环保, 绿色出行”的公益活动, 小燕和妈妈决定周日骑自行车去图书馆借书. 她们同时从家出发, 小燕先以 150 米/分的速度骑行一段时间, 休息了 5 分钟, 再以 m 米/分钟的速度到达图书馆, 而妈妈始终以 120 米/分钟的速度骑行, 两人行驶的路程 y (米) 与时间 x (分钟) 的关系如图, 请结合图像, 解答

下列问题:

- (1) 图书馆到小燕家的距离是_____米;
- (2) $a=$ _____, $b=$ _____, $m=$ _____;
- (3) 妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是_____; 定义域是_____.



【答案】 (1) 3000 (2) 10 15 200 (3) $y=120x$, $0 \leq x \leq 25$

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图象中的数据可以直接写出图书馆到小燕家的距离;

(2) 根据题意和函数图象中的数据可以得到 a 、 b 、 m 的值;

(3) 根据函数图象中的数据可以得到妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式以及定义域.

【详解】 (1) 由图象可得,

图书馆到小燕家的距离是 3000 米,

故答案为 3000;

(2) $a=1500 \div 150=10$,

$b=a+5=10+5=15$,

$m=(3000-1500) \div (22.5-15)=200$,

故答案为 10, 15, 200;

(3) 妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是 $y=kx$,

当 $y=3000$ 时, $x=3000 \div 120=25$,

则 $3000=25k$, 得 $k=120$,

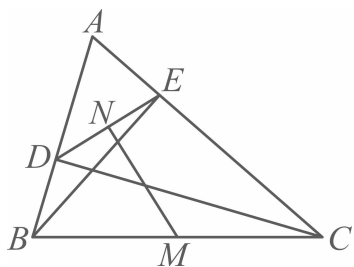
即妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是 $y=120x$, 定义域是 $0 \leq x \leq 25$,

故答案为 $y=120x$, $0 \leq x \leq 25$.

【点睛】 此题考查一次函数的应用, 解题关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

24. 如图, 已知锐角 ABC 中 CD 、 BE 分别是 AB 、 AC 边上的高, M 、 N 分别是线段 BC 、 DE 的中点. 求

证:



(1) $MN \perp DE$.

(2) 若 $\angle A = 60^\circ$, 求证: $\triangle DME$ 是等边三角形

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 连接 DM 、 EM , 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 得到 $DM = EM$, 然后由等腰三角形“三线合一”即可得到答案;

(2) 根据三角形内角和定理、等腰三角形的性质求出 $\angle DME = 60^\circ$ 即可证明.

【小问 1 详解】

如图: 连接 DM 、 EM ,

$\because CD$ 、 BE 分别是 AB 、 AC 边上的高,

$\therefore CD \perp AB, ME \perp AC$,

在 $Rt\triangle BCD$ 与 $Rt\triangle BCE$ 中,

M 是线段 BC 的中点,

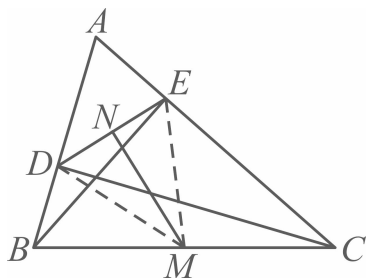
$$\therefore DM = \frac{1}{2}BC, EM = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DM = EM,$$

$\therefore \triangle DEM$ 是等腰三角形,

又因为 N 是线段 DE 的中点,

$$MN \perp DE;$$



【小问 2 详解】

在 ABC 中, $\angle A = 60^\circ$,

$$\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

由 (1) 可知:

$$MB = MD = ME = MC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDM, \quad \angle ACB = \angle MEC,$$

$$\therefore \angle DMB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BDM = 180^\circ - 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle CME = 180^\circ - \angle ACB - \angle MEC = 180^\circ - 2\angle ACB,$$

$$\therefore \angle DME = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ABC) - (180^\circ - 2\angle ACB)$$

$$= 2\angle ABC + 2\angle ACB - 180^\circ$$

$$= 2(\angle ABC + \angle ACB) - 180^\circ$$

$$= 2 \times 120^\circ - 180^\circ$$

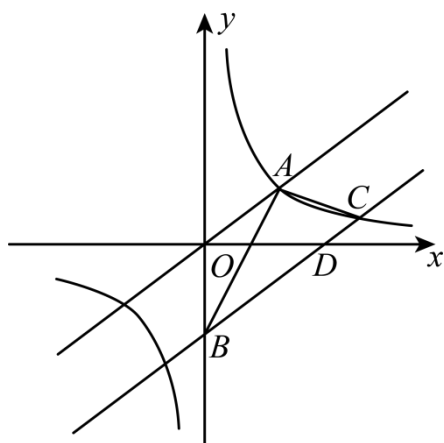
$$= 60^\circ,$$

由 (1) 可知 $\triangle DEM$ 是等腰三角形,

$\therefore \triangle DEM$ 是等边三角形.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 三角形的内角和, 等边三角形的证明; 掌握基本性质是解题的关键.

25. 如图, 正比例函数 $y = k_1x$ 图像与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (x > 0)$ 图像交于点 $A(4, 3)$, 直线 $BC \parallel OA$, 交 y 轴于点 B , x 轴于点 D , 交双曲线于点 C , C 点横坐标为 8, 连接 AC , AB .



(1) 求正比例函数, 反比例函数解析式;

(2) 求 ABC 的面积.

(3) 点 P 是 y 轴上一点, 使得以点 P 、 B 、 D 为顶点的三角形是等腰三角形; 请直接写出点 P 坐标.

【答案】(1) 正比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{4}x$ ，反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$

(2) 18 (3) 点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 或 $(0, 3)$, $(0, -12)$, $\left(0, \frac{7}{4}\right)$

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求解析式，直线围成的图形的面积，等腰三角形的定义及性质，掌握数形结合思想，分类讨论思想是解题的关键.

(1) 根据待定系数法求解即可；

(2) 根据点 C 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像上，求出点 C 的坐标为 $\left(8, \frac{3}{2}\right)$ ，设直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + b$ ，把点 C 坐标代入求得直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$. 过点 $A(4, 3)$ 作 $AE \perp x$ 轴，交 BC 于点 E ，求出 $E\left(4, -\frac{3}{2}\right)$ ，得到 $AE = \frac{9}{2}$ ，根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AE \cdot (x_C - x_B)$ 即可求解；

(3) 分三种情况分别讨论：① $DP = DB$ ，② $BP = BD$ ，③ $BP = DP$ 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 正比例函数 $y = k_1x$ 图像过点 $A(4, 3)$ ，

$$\therefore 3 = 4k_1, \text{ 解得 } k_1 = \frac{3}{4},$$

∴ 正比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{4}x$.

∵ 反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (x > 0)$ 图像过点 $A(4, 3)$ ，

$$\therefore 3 = \frac{k_2}{4}, \text{ 解得 } k_2 = 12,$$

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$.

【小问 2 详解】

解：∵ 点 C 的横坐标为 8，且点 C 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像上，

$$\therefore \text{当 } x = 8 \text{ 时, } y = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

∴ 点 C 的坐标为 $\left(8, \frac{3}{2}\right)$,

∵ $BC \parallel OA$ ，且 OA 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x$ ，

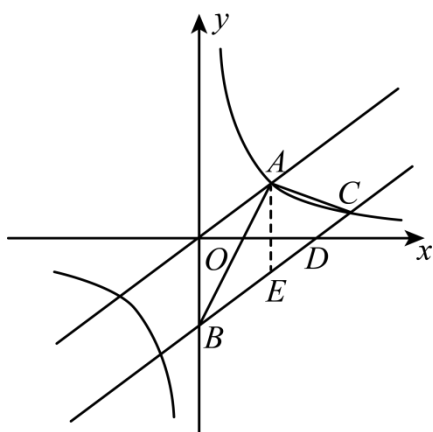
∴ 设直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + b$,

∵ 直线 BC 过点 $C\left(8, \frac{3}{2}\right)$,

∴ $\frac{3}{2} = \frac{3}{4} \times 8 + b$, 解得 $b = -\frac{9}{2}$,

∴ 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$.

过点 $A(4, 3)$ 作 $AE \perp x$ 轴, 交 BC 于点 E ,



∴ 点 E 的横坐标为 4,

把 $x = 4$ 代入函数 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$ 中, 得 $y = \frac{3}{4} \times 4 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$,

∴ $E\left(4, -\frac{3}{2}\right)$,

∴ $AE = \frac{9}{2}$,

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AE \cdot (x_C - x_B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times (8 - 0) = 18$.

【小问 3 详解】

解: 把 $x = 0$ 代入函数 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$, 得 $y = -\frac{9}{2}$,

∴ $B\left(0, -\frac{9}{2}\right)$,

∴ 把 $y = 0$ 代入函数 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$, 得 $0 = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$,

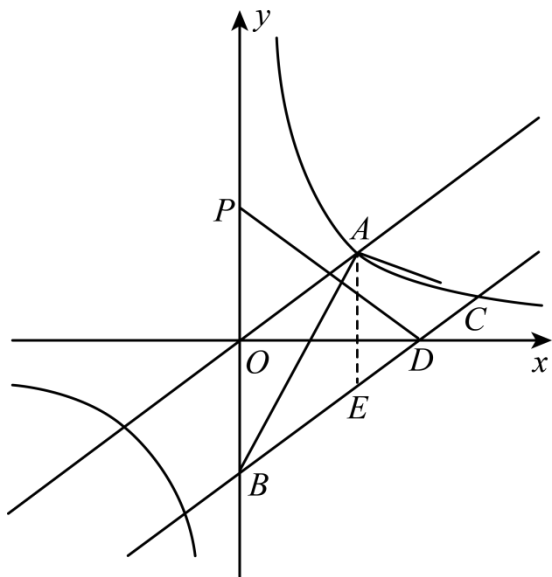
解得 $x = 6$,

∴ $D(6, 0)$,

$$\therefore BD = \sqrt{(0-6)^2 + \left(-\frac{9}{2}-0\right)^2} = \frac{15}{2}.$$

若以点 P 、 B 、 D 为顶点的三角形是等腰三角形，分三种情况讨论：

①如图，若 $DP = DB$ ，

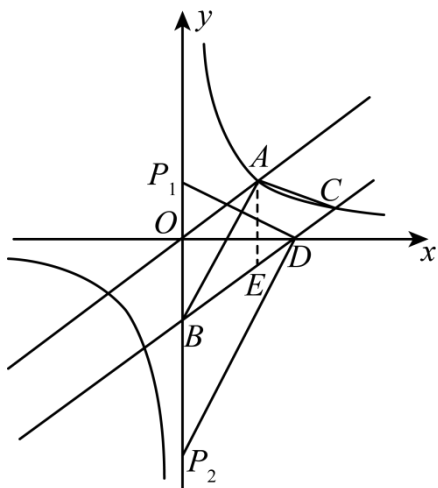


$\therefore BP \perp x$ 轴，

$\therefore$ 点 B 与点 P 关于 x 轴对称，

$$\therefore P\left(0, \frac{9}{2}\right).$$

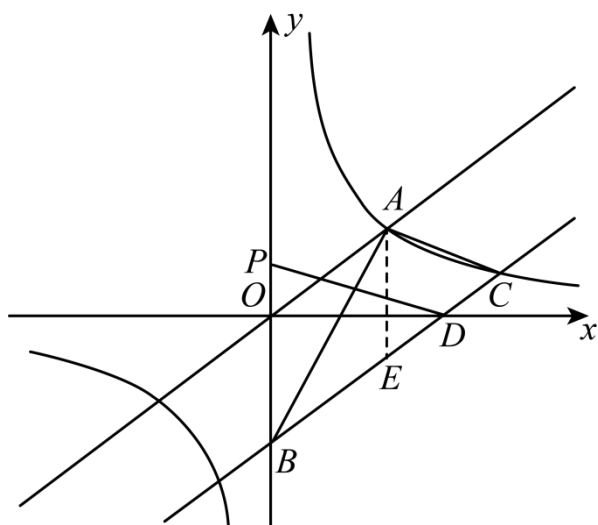
②如图，若 $BP = BD = \frac{15}{2}$ ，



$$\therefore B\left(0, -\frac{9}{2}\right),$$

$$\therefore P(0, 3) \text{ 或 } P(0, -12).$$

③如图，若 $BP = DP$ ，则设点 P 的坐标为 $(0, p)$ ，



$$\therefore B\left(0, -\frac{9}{2}\right), D(6, 0),$$

$$\therefore BP = \left|p + \frac{9}{2}\right|,$$

$$DP = \sqrt{(p-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{p^2 + 36},$$

$$\therefore BP = DP,$$

$$\therefore BP^2 = DP^2, \text{ 即 } \left|p + \frac{9}{2}\right|^2 = (\sqrt{p^2 + 36})^2,$$

$$\therefore \left(p + \frac{9}{2}\right)^2 = p^2 + 36,$$

$$\text{解得 } p = \frac{7}{4},$$

$$\therefore P\left(0, \frac{7}{4}\right).$$

综上所述，点 P 、 B 、 D 为顶点的三角形是等腰三角形时，点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 或 $(0, 3)$ ， $(0, -12)$ ， $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ 。

26. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 3$ 。将一块直角三角板中 30° 角的顶点 D 放在 AB 边上移动，使 30° 角的两边分别与 ABC 的边 AC 、 BC 相交于点 E 、 F ，且使 DE 始终与 AB 垂直。

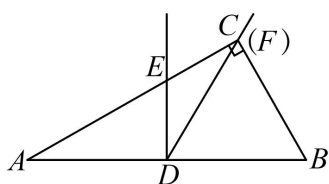


图1

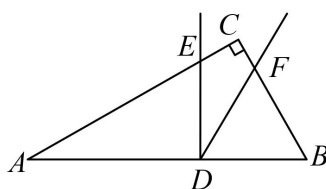
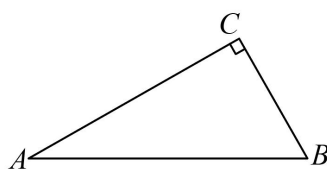


图2



备用图

- (1) 如图 1, 当点 F 与点 C 重合时, 求 CD 的长;
 (2) 如图 2, 设 $AD = x, BF = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
 (3) 如图 2, 连接 EF , 若 $\triangle DEF$ 是直角三角形, 求 AD 的长.

【答案】(1) $\sqrt{3}$

$$(2) y = 2\sqrt{3} - x, \sqrt{3} \leq x \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) AD = \frac{6\sqrt{3}}{5} \text{ 或 } AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle BCD$ 是等边三角形, 得到 $CD = BC$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据 30° 角的直角三角形的性质及勾股定理求出 BC , 即可解答;

(2) 证明等边三角形 BDF , 求出 $BF = BD = y$, 可得 $x + y = 2\sqrt{3}$, 根据 $y = 2\sqrt{3} - x$, 根据 $BF \leq BC$, 得到 $x \geq \sqrt{3}$, 根据一定与线段 AC 、 BC 相交, 得出 AD 最大到 M 处, 求出 AM 即可得出答案;

(3) 分为两种情况: ① E 为直角顶点时. ② F 为直角顶点时, 分别构建方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: (1) $\because DE \perp AB$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE + \angle EDF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle A - \angle ADC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD,$$

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ,$$

$$\angle BCD = \angle ACB - \angle ACD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore CD = DB,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形,

$$\therefore CD = BC,$$

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2BC,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ 即 } 3^2 + BC^2 = (2BC)^2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = BC = \sqrt{3}.$$

【小问 2 详解】

解: $\because DE \perp AB$,

$$\therefore \angle EDB = 90^\circ,$$

$$\because \angle EDF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FDB = \angle EDB - \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FDB = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore DB = DF$$

$\therefore \triangle BDF$ 是等边三角形,

$$\therefore BF = BD,$$

由 (1) 得 $AB = 2BC = 2\sqrt{3}$

$$\therefore AD + BD = AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AD + BF = 2\sqrt{3}, \text{ 即 } x + y = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore y = 2\sqrt{3} - x,$$

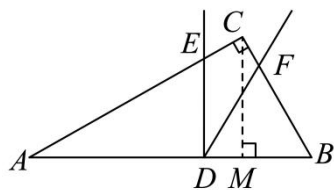
$$\because BF \leq BC, \text{ 即 } y \leq \sqrt{3},$$

$$\therefore 2\sqrt{3} - x \leq \sqrt{3},$$

$$\therefore x \geq \sqrt{3},$$

$\therefore 30^\circ$ 角的两边分别与 ABC 的边 AC 、 BC 交于点 E 、 F ,

$\therefore$ 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 最后 D 只能到 M 点,



$$\therefore CM = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACM \text{ 中, } AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore x \text{ 此时是 } \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{函数的定义域 (即 } x \text{ 的取值范围) 是: } \sqrt{3} \leq x \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【小问 3 详解】

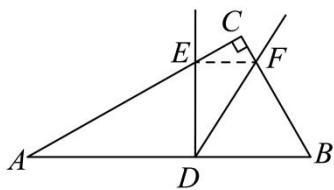
解: $\because \angle ADE = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AE = 2DE,$$

$$\because AD^2 + DE^2 = AE^2, \text{ 即 } x^2 + DE^2 = (2DE)^2,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{3} x.$$

①当 $\angle DEF = 90^\circ$ 时, 如图,



$$\because \angle EDF = 30^\circ, \angle DEF = 90^\circ$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} DF,$$

$$\because DE^2 + EF^2 = DF^2, \text{ 即 } \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} DF\right)^2 = DF^2,$$

$$\therefore DF = \frac{2}{3} x,$$

由 (2) 可知 BDF 是等边三角形,

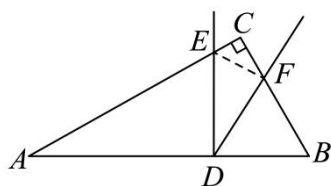
$$\therefore BD = DF = \frac{2}{3}x,$$

$$\because AD + BD = AB, \text{ 即 } x + \frac{2}{3}x = 2\sqrt{3},$$

$$\text{解得: } x = \frac{6\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{即 } AD = \frac{6\sqrt{3}}{5} \text{ 时, } \triangle DEF \text{ 是直角三角形;}$$

②当 $\angle EFD = 90^\circ$ 时, 如图,



$$\because \angle FDE = 30^\circ, \angle EFD = 90^\circ$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{6}x,$$

$$DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore BD = DF = \frac{1}{2}x,$$

$$\because AD + BD = AB, \text{ 即 } x + \frac{1}{2}x = 2\sqrt{3},$$

$$\text{解得: } x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{即 } AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } \triangle DEF \text{ 是直角三角形;}$$

综上所述: 当 $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ 或 $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $\triangle DEF$ 是直角三角形.

【点睛】 本题综合考查含 30° 度角的直角三角形, 勾股定理, 等边三角形的判定及性质, 学会利用参数构建方程, 掌握分类讨论思想是解题的关键.