

同济大学附属（嘉定）实验中学

2024 学年第一学期八年级数学期中考试试卷 (2024. 10)

(时间: 90 分钟; 满分: 120 分)

一、单选题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 将一元二次方程 $3x^2 - x - 2 = 0$ 化成一般形式后, 常数项是 -2 , 则二次项系数和一次项系数分别是 ()

- A. 3, -2 B. 3, 1 C. 3, -1 D. 3, 0

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的一般形式, 熟练掌握一元二次方程一般形式的相关概念是解题的关键. 一元二次方程 $3x^2 - x - 2 = 0$ 就是一般形式, 再找出二次项系数和一次项系数即可.

【详解】解: $\because 3x^2 - x - 2 = 0$ 是一般形式, 常数项是 -2 ,
 $\therefore$ 二次项系数和一次项系数分别是 3 和 -1 ,
故选: C.

2. 下列等式一定正确的是 ()

- A. $\sqrt{81} = \pm\sqrt{9}$ B. $-\sqrt{(-3)^2} = 3$ C. $\sqrt{a^2} = a$ D. $\sqrt[3]{-3^3} = -3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方根和立方根的性质, 逐一判定即可.

【详解】A 选项, $\sqrt{81} = 9$, 错误;
B 选项, $-\sqrt{(-3)^2} = -3$, 错误;
C 选项, $\sqrt{a^2} = |a|$, 不一定正确;
D 选项, $\sqrt[3]{-3^3} = -3$, 正确;
故选: D.

【点睛】此题主要考查对平方根和立方根的理解, 熟练掌握, 即可解题.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > -1$ B. $k > -1$ 且 $k \neq 0$ C. $k < 1$ D. $k < 1$ 且 $k \neq 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了根据一元二次方程根的情况求参数，因为关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，所以 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，代入数值进行计算，即可作答。

【详解】解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times k \times (-1) = 4 + 4k > 0, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\therefore k > -1, \text{ 且 } k \neq 0,$$

故选：B.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 任何定理都有逆定理

B. 真命题的逆命题一定是真命题

C. 任何命题都有逆命题

D. “绝对值等于它本身的数是正数”是真命题

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理，判断事物的语句叫命题；正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题，经过推理论证的真命题叫定理，两个命题的题设与结论为互换的命题互为逆命题。利用命题与定理的知识对各项进行判断即可得到答案。

【详解】解：A、任何定理不一定有逆定理，故 A 说法错误，不符合题意；

B、真命题的逆命题不一定是真命题，故 B 说法错误，不符合题意；

C、任何命题都有逆命题，故 C 说法正确，符合题意；

D、绝对值等于它本身的数是正数或 0，故 D 说法错误，不符合题意；

故选：C.

5. 已知 $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\}$ 表示取三个数中最大的那个数，例如：当 $x = 9$ 时， $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\} = \max\{\sqrt{9}, 9^2, 9\} = 81$ 。当 $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\} = \frac{1}{2}$ 时，则 x 的值为 ()

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用 $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\}$ 的定义分情况讨论即可求解。

【详解】解：当 $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\} = \frac{1}{2}$ 时， $x \geq 0$

① $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ ，解得： $x = \frac{1}{4}$ ，此时 $\sqrt{x} > x > x^2$ ，符合题意；

② $x^2 = \frac{1}{2}$ ，解得： $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；此时 $\sqrt{x} > x > x^2$ ，不合题意；

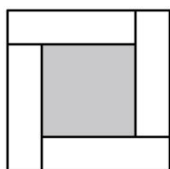
③ $x = \frac{1}{2}$ ， $\sqrt{x} > x > x^2$ ，不合题意；

故只有 $x = \frac{1}{4}$ 时， $\max\{\sqrt{x}, x^2, x\} = \frac{1}{2}$ 。

故选：C。

【点睛】此题主要考查了新定义，正确理解题意分类讨论是解题关键。

6. 对于一元二次方程，我国古代数学家还研究过其几何解法。以方程 $x(x+6)=72$ 为例加以说明。数学家赵爽在其所著的《勾股圆方注》中记载的方法是：如图，将四个长为 $x+6$ ，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，则大正方形的边长是 $x+6+x$ ，面积是四个矩形的面积与中间小正方形的面积之和，即 $4 \times 72 + 6^2$ ，据此易得 $x = \frac{18-6}{2} = 6$ 。小明用此方法解关于 x 的方程 $x(3x-n)=24$ ，其中 $3x-n > x$ 构造出同样的图形，已知小正方形的面积为 4，则 n 的值为（ ）



A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，仿照题干，正确理解一元二次方程的几何解法是解题关键。参照已知方法，将四个长为 $3x-n$ ，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，求出大正方形的边长为 10 ，得到 $n = 4x - 10$ ，再根据小正方形的边长为 $10 - 2x$ ，小正方形的边长的面积是 4，求出 $x = 4$ ，即可得到 n 的值。

【详解】解：由题意可知，将四个长为 $3x-n$ ，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，则大正方形的边长是 $3x-n+x$ ，面积是四个矩形的面积与中间小正方形的面积之和，

$\therefore x(3x-n) = 24$ ，小正方形的面积为 4，

$\therefore$ 大正方形的面积为 $4 \times 24 + 4 = 100$,

$\therefore$ 大正方形的边长为 10,

$\therefore 3x - n + x = 4x - n = 10$,

$\therefore n = 4x - 10$,

$\therefore$ 小正方形的边长为 $3x - n - x$, 即 $10 - 2x$,

$\therefore 3x - n > x$,

即 $10 - 2x > 0$,

故 $(10 - 2x)^2 = 4$,

$\therefore 10 - 2x = \pm 2$,

$\therefore 10 - 2x > 0$,

$\therefore x = 4$,

$\therefore n = 4 \times 4 - 10 = 6$,

故选: C.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解是 _____.

【答案】 $x_1 = -2, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先把常数项移到方程右边, 再利用直接开平方的方法解方程即可得到答案.

【详解】 解: $x^2 - 4 = 0$

移项得: $x^2 = 4$,

方程两边同时开方得: $x = \pm 2$,

解得 $x_1 = -2, x_2 = 2$,

故答案为: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

8. 若最简二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 与 $\sqrt{x+3}$ 能合并, 则 $x =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据两最简二次根式能合并, 得到被开方数相同, 然后列一元一次方程求解即可.

【详解】解：根据题意得， $2x-1=x+3$ ，

移项合并： $x=4$ ，

故答案为：4.

【点睛】本题考查了最简二次根式，利用好最简二次根式的被开方数相同是解题的关键.

9. 在 $\sqrt{0.2}$ ， $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$ ， $\sqrt{\frac{1}{20}}$ 中不是 $\sqrt{5}$ 的同类二次根式的有_____.

【答案】 $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的概念，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式. 将各个二次根式分别化简即可求解.

【详解】解： $\because \sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}} = \frac{3\sqrt{15}}{25}$ ， $\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ ，

$\therefore \sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$ 不是 $\sqrt{5}$ 的同类二次根式，

故答案为： $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$.

10. 假设长方形的面积为 S ，相邻两边长分别为 a ， b ，已知 $S=2$ ， $a=\sqrt{15}$ ，则 $b=_____$.

【答案】 $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $\frac{2}{15}\sqrt{15}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的乘除法，掌握分母有理化是解题的关键. 根据题意得： $S=ab$ ，将 $S=2$ ， $a=\sqrt{15}$ 代入即可得到 b 的值.

【详解】解： $\because$ 长方形的面积为 S ，相邻两边长分别为 a ， b ，

$\therefore S=ab$ ，

$\because S=2$ ， $a=\sqrt{15}$ ，

$\therefore b = \frac{S}{a} = \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ ，

故答案为: $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

11. 《原本》是古希腊数学家欧几里得的著作, 它以公理和原名为基础推演出更多的结论, 是流传最广、影响最大的一部世界数学名著. 请写出命题“如果 $a=b$, 那么 $a^2=b^2$ ”的逆命题: _____.

【答案】 如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$

【解析】

【分析】 本题考查了命题的逆命题, 掌握逆命题的定义是解题的关键.

根据逆命题的定义, 将原命题的题设和结论互换即可. 互逆命题的定义: 如果一个命题的条件与结论分别是另一个命题的结论与条件, 那么这两个命题称为互逆命题, 如把其中一个称为原命题, 那么另一个称为它的逆命题.

【详解】 “如果 $a=b$, 那么 $a^2=b^2$ ”的逆命题是: 如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$.

故答案为: 如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$.

12. 若一元二次方程的根为 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$, 则该一元二次方程可以为_____.

【答案】 $2x^2 + 3x + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了公式法解一元二次方程, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若其有实数根, 那么其实数根为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 据此结合题意得到 $a=2$, $b=3$, $c=1$, 即可得到答案.

【详解】 解: 设关于 x 的一元二次方程为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,

$\because$ 一元二次方程的根为 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$,

$\therefore a=2$, $b=3$, $c=1$,

$\therefore$ 该一元二次方程可以为 $2x^2 + 3x + 1 = 0$,

故答案为: $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

13. 双十一期间, 某型号的手机连续两次降价, 每个手机的售价由原来的 1200 元降到 588 元, 若每次降价的百分率相同, 设每次降价的百分率为 x , 则可列出方程_____.

【答案】 $1200(1-x)^2 = 588$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用，根据“每个手机的售价由原来的 1200 元降到 588 元，若每次降价的百分率相同”列方程即可.

【详解】 解：由题意得， $1200(1-x)^2 = 588$,

故答案为： $1200(1-x)^2 = 588$.

14. 在实数范围内分解因式 $x^2 - 4x - 2$ 的结果是_____.

【答案】 $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$.

【解析】

【分析】 用公式法求出方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 的根是 $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$, 据此进行因式分解即可.

【详解】 解： $\because$ 方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 中,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 24 > 0$$

$$\therefore \text{原方程的根是: } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{24}}{2 \times 1} = 2 \pm \sqrt{6},$$

$$\text{即: } x_1 = 2 - \sqrt{6}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{6},$$

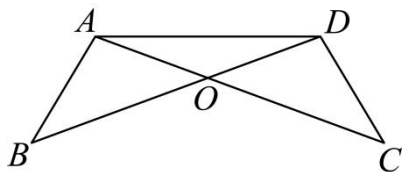
$$\therefore x^2 - 4x - 2 \text{ 分解因式得: } x^2 - 4x - 2 = (x - 2 + \sqrt{6})(x - 2 - \sqrt{6})$$

故答案是： $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$.

【点睛】 本题考查的是方程的因式分解，求出方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 的两个根，再根据

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 进行因式分解是解题的关键.

15. 如图， AC 、 BD 相交于点 O ， $AB = DC$ ， 要使 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ ， 则需添加一个条件， 这个条件可以是_____.



【答案】 $\angle B = \angle C$ 或 $\angle BAO = \angle CDO$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定，熟练掌握五种判定方法是解答本题的关键.

根据已知条件， $AB = DC$ ， $\angle AOB = \angle DOC$ ，再加一个条件 $\angle B = \angle C$ 或 $\angle BAO = \angle CDO$ ，即可满足 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (AAS).

【详解】 解：在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中，

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle DOC \\ \angle B = \angle C \\ AB = DC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC \text{ (AAS)}.$$

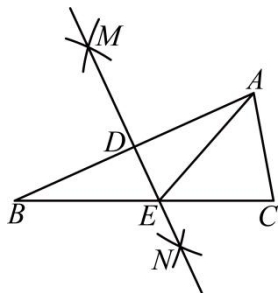
或在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中，

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle DOC \\ \angle BAO = \angle CDO, \\ AB = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC \text{ (AAS)}.$$

故答案为： $\angle B = \angle C$ 或 $\angle BAO = \angle CDO$.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 80^\circ$ ，分别以点 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧交于 M ， N 两点，连接 MN 分别交 AB ， BC 于点 D ， E . 若 $CA = CE$ ，则 $\angle B$ 的大小为 _____ $^\circ$.



【答案】 25

【解析】

【分析】 本题主要考查了垂直平分线的性质，三角形内角和定理以及三角形外角的定义，由题意可得 $\angle CEA = \angle CAE$ ，由三角形内角和定理可求出 $\angle CEA = 50^\circ$ ，由作图可知 MN 垂直平分 AB ，由垂直平分线的性质可得出 $BE = AE$ ，进一步可知 $\angle B = \angle EAB$ ，由三角形的外角定义可求出 $\angle B$.

【详解】 解： $\because CA = CE$ ，

$$\therefore \angle CEA = \angle CAE,$$

$$\because \angle C = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle CEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 50^\circ,$$

由作图可知: MN 垂直平分 AB ,

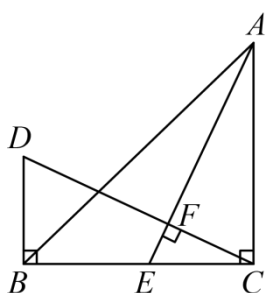
$$\therefore BE = AE,$$

$$\therefore \angle B = \angle EAB,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle CEA = 25^\circ,$$

故答案为: 25.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, AE 是 BC 边上的中线, $CF \perp AE$, 垂足为 F , $BD \perp BC$ 交 CF 的延长线于 D . 若 $AC = 10\text{cm}$, 则 $BD =$ _____ cm .



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的性质和中线, 根据题意得 $\angle D = \angle AEC$ 和 $\angle DBC = \angle ECA$, 则有 $\triangle DBC \cong \triangle ECA$, 得到 $BD = CE$, 由 AE 是 BC 边上的中线即可求得答案.

【详解】 解: $\because BD \perp BC$, $CF \perp AE$,

$$\therefore \angle DCB + \angle D = \angle DCB + \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle AEC,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad BD \perp BC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ECA = 90^\circ,$$

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ECA$ 中

$$\begin{cases} \angle D = \angle AEC \\ \angle DBC = \angle ECA \\ BC = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ECA (AAS),$$

$$\therefore BD = CE,$$

$\because AE$ 是 BC 边上的中线,

$$\therefore BD=EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AC=10\text{cm},$$

$$\therefore BD=5\text{cm},$$

故答案为：5.

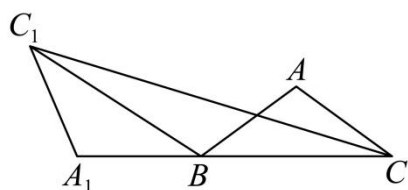
18. $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=38^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转, 使得点 A 落在直线 BC 上, 记作点 A_1 , 点 C 落在点 C_1 处, 则 $\angle BC_1C =$ _____ 度.

【答案】19 或 71

【解析】

【分析】分两种情况：当 A_1 在线段 CB 延长线上时和当 A_1 在线段 BC 上时, 根据旋转的性质和三角形的内角和定理、三角形的外角的性质, 分别求解即可.

【详解】解：当 A_1 在线段 CB 延长线上时, 连接 CC_1 , 如图所示:



$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转, 使得点 A 落在直线 BC 上, 记作点 A_1 , 点 C 落在点 C_1 处,

$$\therefore \angle ABC = \angle A_1BC_1, \quad BC = BC_1,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1BC_1 = 38^\circ,$$

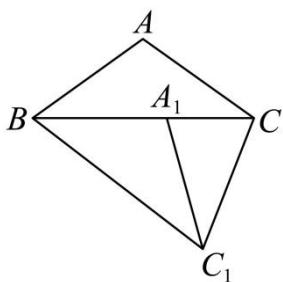
$$\therefore BC = BC_1,$$

$$\therefore \angle BCC_1 = \angle BC_1C,$$

$$\therefore \angle A_1BC_1 = \angle BCC_1 + \angle BC_1C = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle BC_1C = 19^\circ;$$

当 A_1 在线段 BC 上时, 连接 CC_1 , 如图所示:



∴ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转, 使得点 A 落在直线 BC 上, 记作点 A_1 , 点 C 落在点 C_1 处,

$$\therefore \angle ABC = \angle A_1BC_1 = 38^\circ, \quad BC = BC_1,$$

$$\therefore \angle BCC_1 = \angle BC_1C,$$

$$\therefore \angle BC_1C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A_1BC_1) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 38^\circ) = 71^\circ,$$

综上所述, $\angle BC_1C = 19^\circ$ 或 71° .

故答案为: 19 或 71

【点睛】 本题考查了旋转的性质、三角形的内角和定理、三角形的外角的性质, 解本题的关键在分别画出图形进行解答.

三、解答题 (共 66 分, 19-23 题每题 6 分共 30 分, 24-26 题每题 8 分共 24 分, 27 题 12 分)

19. 计算: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$

【答案】 $-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 先把 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$ 进行分母有理化以及运用完全平方公式化简, 得 $2 + \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, 再进行合并同类二次根式, 即可作答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (3+2\sqrt{3}+1) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 2 + \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= -2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

20. 计算: $3\sqrt{x^2y} \times \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2}{y}} \div 2\sqrt{x^3y^2} (x > 0, y > 0)$

【答案】 $\frac{\sqrt{x}}{4y}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘除法. 根据二次根式的乘除法法则进行计算即可.

【详解】 解: $3\sqrt{x^2y} \times \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2}{y}} \div 2\sqrt{x^3y^2}$

$$= \left(3 \times \frac{1}{6} \div 2\right) \sqrt{x^2y \cdot \frac{x^2}{y} \div x^3y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{x^2y \cdot \frac{x^2}{y} \cdot \frac{1}{x^3y^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{4y}.$$

21. 用配方法解方程: $4x^2 - 2x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】 先把常数项移到等号右边, 将二次项系数化为 1, 得到 $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$, 方程两边同时加上一次项系数一半的平方 $\frac{1}{16}$, 配成完全平方式, 得到 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$, 直接开平方后即可求解.

【详解】 解: $4x^2 - 2x - 1 = 0$

移项, 得: $4x^2 - 2x = 1$,

系数化为 1, 得: $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$,

配方, 得: $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$,

$$\text{即} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16},$$

$$\text{开方, 得: } x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

$$22. \text{ 解方程: } (x+2)(x-1)=10$$

$$\text{【答案】 } x_1 = 3, \quad x_2 = -4$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，根据已知将原式分解为两式相乘等于0是解答本题的关键. 先解方程整理为一般形式: $x^2 + x - 12 = 0$ ，再运用因式分解法求出答案即可.

$$\text{【详解】 解: 去括号, 得: } x^2 + x - 2 = 10,$$

$$\text{移项, 得: } x^2 + x - 2 - 10 = 0,$$

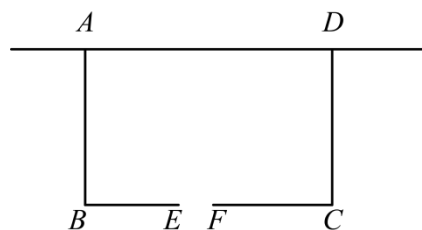
$$\text{合并同类项, 得 } x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x-3)(x+4)=0,$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x+4=0$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4.$$

23. 如图，某农场有一道长10米的围墙，计划用25米长的围栏靠墙围成一个面积为72平方米的长方形养鸡场，在墙的对面对开了一个1米宽的门，求围成长方形养鸡场的边 AB 的长度.



$$\text{【答案】 } 9 \text{ 米}$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，设围成长方形养鸡场的边 AB 的长度为 x 米，则 AD 的长为

$(25-2x+1)$ 米，根据靠墙围成一个面积为 72 平方米的长方形养鸡场，列出一元二次方程，解之取符合题意的值即可。找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

【详解】解：设围成长方形养鸡场的边 AB 的长度为 x 米，则 AD 的长为 $(25-2x+1)$ 米，

$$x(25-2x+1)=72,$$

$$x^2-13x+36=0,$$

$$\text{解得 } x_1=4, \quad x_2=9,$$

当 $x=4$ 时， $25-2x+1=18>10$ ，故舍去；

当 $x=9$ 时， $25-2x+1=8<10$ ，符合题意；

所以养鸡场的边 AB 的长度为 9 米。

24. 习近平总书记说：“读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气”。某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆。据统计，第一天进馆 48 人次，进馆人数逐日增加，到第三天结束累计进馆 228 人次，若进馆人次的日平均增长率相同。

(1) 求进馆人次的日平均增长率；

(2) 因条件限制，学校图书馆每日接纳能力不超过 200 人次，在进馆人次的日平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四天的进馆人次，并说明理由。

【答案】(1) 进馆人次的日平均增长率为 50%

(2) 校图书馆能接纳第四天的进馆人次，理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，理解题意，正确找出等量关系是解题的关键。

(1) 设进馆人次的日平均增长率为 x ，先分别表示出第二个月和第三个月的进馆人次，再根据第一个月的进馆人次加第二和第三个月的进馆人次等于 228，列方程求解；

(2) 根据 (1) 所计算出的月平均增长率，计算出第四个月的进馆人次，再与 200 比较大小即可。

【小问 1 详解】

解：设进馆人次的日平均增长率为 x ，

$$\text{根据题意得：} 48+48(1+x)+48(1+x)^2=228,$$

$$\text{解得：} x_1=0.5=50\%, \quad x_2=-3.5 \text{ (不合题意，舍去),}$$

$\therefore$ 进馆人次的日平均增长率为 50%；

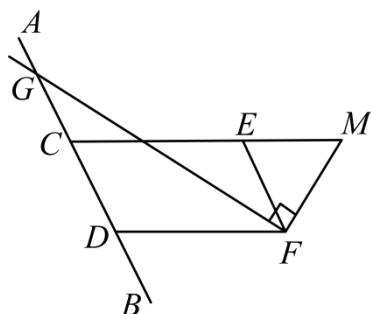
【小问 2 详解】

第四天的进馆人次为： $48 \times (1 + 50\%)^3 = 162$ (人)，

$$162 < 200,$$

∴ 校图书馆能接纳第四天的进馆人次.

25. 如图 1, 点 C, D 在直线 AB 上, $\angle ACE + \angle BDF = 180^\circ$, $EF \parallel AB$.



(1) 求证: $CE \parallel DF$;

(2) $\angle DFE$ 的角平分线 FG 交 AB 于点 G , 过点 F 作 $FM \perp FG$ 交 CE 的延长线于点 M . 若 $\angle CMF = 55^\circ$, 求 $\angle CDF$ 的度数.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\angle CDF = 110^\circ$.

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的判定和性质, 角平分线的定义.

(1) 根据平角的性质进行等量代换, 得到 $\angle BDF = \angle BCE$, 利用同位角相等两直线平行即可证明;

(2) 根据两直线平行, 同旁内角互补得到 $\angle DFM = 125^\circ$, 进而得到 $\angle DFG = 35^\circ$, 再根据角平分线的定义, 得到 $\angle DFE = 2\angle DFG = 70^\circ$, 最后利用平行线的性质, 即可求出 $\angle CDF$ 的度数.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACE + \angle BDF = 180^\circ$, $\angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BDF = \angle BCE,$$

$$\therefore CE \parallel DF;$$

【小问 2 详解】

解: $\because CE \parallel DF$,

$$\therefore \angle CMF + \angle DFM = 180^\circ,$$

$$\because \angle CMF = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle DFM = 125^\circ,$$

$$\because FM \perp FG,$$

$$\therefore \angle GFM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG = \angle DFM - \angle GFM = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ,$$

$\because FG$ 是 $\angle DFE$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DFE = 2\angle DFG = 70^\circ,$$

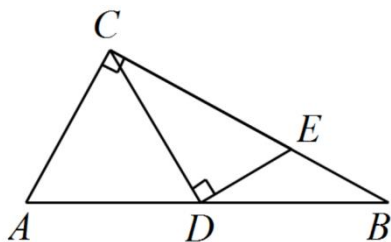
$\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \angle CDF + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = 110^\circ.$$

26. 已知: 如图所示, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D 是 AB 上一点, $DE \perp CD$ 于 D , 交 BC 于 E , 且有

$$AC = AD = CE. \text{ 求证: } DE = \frac{1}{2}CD$$

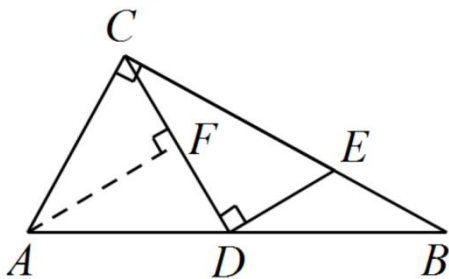


【答案】见解析

【解析】

【分析】过 A 作 $AF \perp CD$ 于 F , 由等腰三角形三线合一, 可以得到 $CF = \frac{1}{2}CD$; 证明 $\triangle ACF \cong \triangle CED$, 可以得到 $CF = DE$, 从而得到结论.

【详解】证明: 过 A 作 $AF \perp CD$ 于 F , 如下图:



$$\because AC = AD, AF \perp CD$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CD, \angle AFC = 90^\circ$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACF + \angle DCE = 90^\circ$$

$$\text{又} \because DE \perp CD$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ, \quad \angle DCE + \angle CED = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACF = \angle CED, \quad \angle AFC = \angle CDE$$

在 $\triangle ACF$ 与 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACF = \angle CED \\ \angle AFC = \angle CDE \\ AC = CE \end{cases}$$

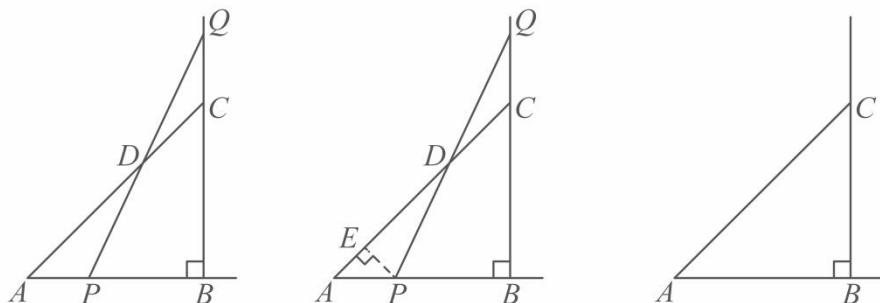
$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle CED,$$

$$\therefore CF = DE$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CD.$$

【点睛】本题考查全等三角形的判定，等腰三角形的三线合一等知识点，能够由已知条件，作出相关的辅助线是解题的关键.

27. 等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边 $AB = BC = 20\text{cm}$, $AC = 20\sqrt{2}\text{cm}$, 点 P 、 Q 分别从 A 、 C 两点同时出发, 均以 $1\text{cm}/\text{秒}$ 的相同速度做直线运动, 已知 P 沿射线 AB 运动, Q 沿边 BC 的延长线运动, PQ 与直线 AC 相交于点 D . 设 P 点运动时间为 t 秒, $\triangle PCQ$ 的面积为 $S \text{ cm}^2$.



备用图

- (1) 当点 P 在边 AB 上时, 用含有 t 的代数式表示 $\triangle PCQ$ 的面积 S ;
- (2) 当点 P 运动几秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$?
- (3) 作 $PE \perp AC$ 于点 E , 当点 P 、 Q 运动时, 线段 DE 的长度是否改变? 如果不变, 请直接写出 DE 的长度; 如果改变, 请说明理由.

【答案】(1) $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$

(2) 当点 P 运动 $10 + 10\sqrt{5}$ 秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$

(3) DE 线段的长度不会改变, $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得: $AP = CQ = t\text{cm}$, $BP = (20 - t)\text{cm}$, 根据 $S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB$ 即可求解;

(2) 由 (1) 知, 当 $0 < t \leq 20$ 时, $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$, 当 $t > 20$ 时, $BP = (t - 20)\text{cm}$, $S = \frac{1}{2}t^2 - 10t$,

再求出 $S_{\triangle ABC} = 200\text{cm}^2$, 根据 $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$ 列方程求解即可;

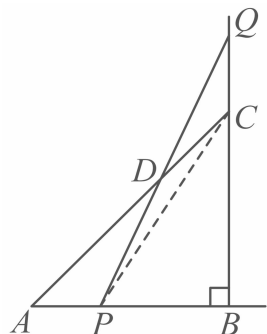
(3) 当点 P 在线段 AB 上时, 如图, 过 Q 作 $QM \perp AC$, 交直线 AC 于点 M , 根据题意可得 $\angle A = \angle ACB = \angle QCM = 45^\circ$, 证明 $\triangle AEP \cong \triangle CMQ$, 得到 $AE = CM$, $PE = QM$, 推出 $AC = EM = 20\sqrt{2}\text{cm}$, 证明 $\triangle PDE \cong \triangle QDM$, 根据全等三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 根据题意可得: $AP = CQ = t\text{cm}$,

当点 P 在边 AB 上时, $BP = AB - AP = (20 - t)\text{cm}$,

$$\therefore S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB = \frac{1}{2}t(20 - t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t;$$



【小问 2 详解】

由 (1) 知, 当 $0 < t \leq 20$ 时, $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$,

当 $t > 20$ 时, $BP = AP - AB = (t - 20)\text{cm}$,

$$\therefore \text{此时 } S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB = \frac{1}{2}t(t - 20) = \frac{1}{2}t^2 - 10t,$$

$\because$ 等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边 $AB = BC = 20\text{cm}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200\text{cm}^2,$$

$$\therefore S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \text{当 } 0 < t \leq 20 \text{ 时, } -\frac{1}{2}t^2 + 10t = 200,$$

整理可得: $t^2 - 20t + 400 = 0$,

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 400 = -1200 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根;

$$\text{当 } t > 20 \text{ 时, } \frac{1}{2}t^2 - 10t = 200,$$

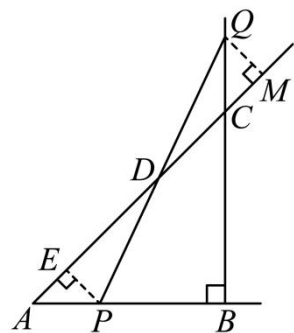
$$\text{解得: } t_1 = 10 + 10\sqrt{5}, \quad t_2 = 10 - 10\sqrt{5} \quad (\text{不合题意, 舍去});$$

综上所述, 当点 P 运动 $10 + 10\sqrt{5}$ 秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$;

【小问 3 详解】

线段 DE 的长度不会改变, 理由如下:

当点 P 在线段 AB 上时, 如图, 过 Q 作 $QM \perp AC$, 交直线 AC 于点 M ,



$$\because AB = BC, \quad \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle QCM = 45^\circ,$$

在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle CMQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle QCM \\ \angle AEP = \angle CMQ = 90^\circ, \\ AP = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEP \cong \triangle CMQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = CM, \quad PE = QM,$$

$$\therefore AE + CE = CM + CE, \quad \text{即 } AC = EM = 20\sqrt{2} \text{ cm},$$

在 $\triangle PDE$ 和 $\triangle QDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle PDE = \angle QDM \\ \angle PED = \angle QMC, \\ PE = QM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PDE \cong \triangle QDM (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DM,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}EM = 10\sqrt{2}\text{cm},$$

当点 P 在线段 AB 的延长线上时，同理可得： $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$ ，

综上所述， DE 线段的长度不会改变， $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$ 。

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，一元二次方程的应用，解题的关键是掌握相关知识。