

2024 学年第一学期期中考试八年级数学拓展卷

时间：40 分钟 满分：50 分

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 已知方程 $(x+a)(x-4)=0$ 和方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + b = 0$ 的根完全相同，则 $a+b =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解及解一元二次方程：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 先解方程 $(x+a)(x-4)=0$ 得到 $x_1 = -a$ ， $x_2 = 4$ ，再把 $x=4$ 代入方程

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + b = 0$ 中求出 $b = -2$ ，接着解方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$ 可得到 $a = 1$ ，然后计算 $a+b$ 的值.

【详解】 解： $\because (x+a)(x-4)=0$ ，

$$\therefore x_1 = -a, \quad x_2 = 4,$$

把 $x=4$ 代入方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + b = 0$ 得 $8 - 6 + b = 0$ ，解得 $b = -2$ ，

解方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$ ，解得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 4$ ，

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore a+b = 1-2 = -1.$$

故答案为 -1.

2. $\sqrt{-\frac{5}{3-x}}$ 是二次根式，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式有意义的条件. 掌握二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，是解题的关键.

根据二次根式有意义的条件得 $3-x < 0$ ，即得 $x > 3$.

【详解】 $\because \sqrt{-\frac{5}{3-x}}$ 是二次根式，

$$\therefore -\frac{5}{3-x} \geq 0.$$

$$\because 5 > 0, \quad 3-x \neq 0,$$

$$\therefore 3-x < 0.$$

$$\therefore x > 3.$$

故答案为: $x > 3$.

3. 已知 $0 < x < 1$, 化简 $\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4} =$ _____.

【答案】 $2x$

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质得 $\left|x + \frac{1}{x}\right| - \left|x - \frac{1}{x}\right|$, 然后利用 x 的范围去绝对值后合并即可

【详解】 $\because 0 < x < 1$,

$$\therefore x - \frac{1}{x} < 0, x + \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{原式} = \sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 4} - \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 4}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \left|x + \frac{1}{x}\right| - \left|x - \frac{1}{x}\right|$$

$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}$$

$$= 2x$$

故答案为: $2x$

【点睛】 本题考查了二次根式的性质与化简, 熟练掌握二次根式的性质是解决此类问题的关键.

4. 多项式 $2x^2 - 6x + 10$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{11}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程配方法的应用, 运用配方法进行配方是解题的关键. 根据配方法进行求解即可.

【详解】 解: $\because 2x^2 - 6x + 10$,

$$= 2(x^2 - 3x) + 10,$$

$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 10 - \frac{9}{2},$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2},$$

∴ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 多项式 $2x^2 - 6x + 10$ 的最小值为 $\frac{11}{2}$.

故答案为: $\frac{11}{2}$.

5. 设方程 $x^2 - x + k = 0$ 的一个根的 3 倍少 7 为另一个根, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + m = 0 (a \neq 0)$ 根与系数的关系: 若方程的两根分别为 x_1 ,

x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 设方程的一个根为 a , 则另一个根为 $3a - 7$, 根据根与系数的关系得出

$a + 3a - 7 = 1$, 得出 $a = 2$, 另一个根为 -1 , 进一步利用两根的积得出 k 的数值即可.

【详解】 解: 设方程 $x^2 - x + k = 0$ 另一个根为 a , 则一个根为 $3a - 7$,

则 $a + 3a - 7 = 1$, 解得 $a = 2$,

$$\therefore 3a - 7 = -1$$

$$\text{因此 } k = 2 \times (-1) = -2.$$

故答案为: -2.

6. 已知实数 a 满足 $|1-a| - |a| = 1$, 那么 $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 - 2a$ 或 $-2a + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质和化简, 关键是依据题意, 弄清 a 的取值范围, 体现了分类讨论思想. 实数 a 满足 $|1-a| - |a| = 1$, 分三种情况讨论, ① $a > 1$ ② $0 \leq a \leq 1$ ③ $a < 0$, 看哪个符合题意, 然后把符合题意的代入, 即可解答.

【详解】 解: ∵ 实数 a 满足 $|1-a| - |a| = 1$,

① 当 $a > 1$ 时, $|1-a| - |a| = a - 1 - a = -1$, 不符合题意;

② 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $|1-a| - |a| = 1 - a - a = 1 - 2a$, 不符合题意;

③当 $a < 0$ 时, $|1-a| - |a| = 1-a+a=1$,

$$\therefore \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2} = 1-a-a=1-2a.$$

故答案为 $1-2a$.

7. 已知实数 x 、 y 满足 $x^2+3x-8=0$, $y^2+3y-8=0$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} =$ _____.

【答案】 $-\frac{25}{8}$ 或 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系及分式的加法、运用完全平方公式求值, 若 x_1 , x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根时, $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, 能熟记根与系数的关系的是解此题的关键.

先利用根与系数的关系得 $x+y=-3$, $xy=-8$, 再利用分式加法的计算法则计算即可.

【详解】 解: 由题意可知, 当 $x \neq y$ 时, 实数 x 、 y 是一元二次方程 $x^2+3x-8=0$ 的两个实数根,

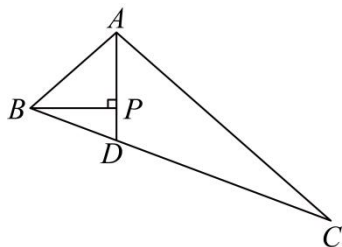
$\therefore x, y$ 满足 $x+y=-3, xy=-8$,

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2+x^2}{xy} = \frac{(y+x)^2-2xy}{xy} = \frac{(-3)^2-2 \times (-8)}{-8} = -\frac{25}{8},$$

当 $x=y$ 时, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 1+1=2$,

故答案为: $-\frac{25}{8}$ 或 2.

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $BP \perp AD$ 于点 P , $AB=4$, $BP=3$, $AC=10$, $\angle C=18^\circ$, 则 $\angle ABC =$ _____ $^\circ$.

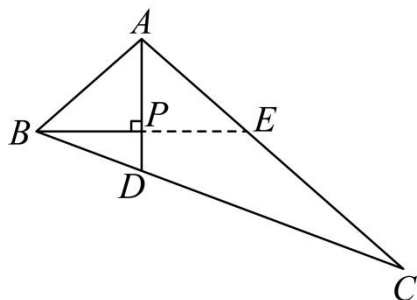


【答案】 54

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，三角形外角的性质，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键．延长 BP 交 AC 于点 E ，根据角平分线的定义可得 $\angle BAD = \angle DAE$ ，再根据垂直定义可得 $\angle APB = \angle APE = 90^\circ$ ，从而利用 ASA 证明 $\triangle ABP \cong \triangle AEP$ ，然后利用全等三角形的性质可得 $\angle ABE = \angle AEB$ ， $BP = PE = 3$ ， $AB = AE = 4$ ，从而可得 $BE = EC = 6$ ，进而可得 $\angle EBC = \angle C = 18^\circ$ ，最后利用三角形的外角性质可得 $\angle AEB = \angle ABE = 36^\circ$ ，从而利用角的和差关系进行计算即可解答．

【详解】 解：如图，延长 BP 交 AC 于点 E ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle DAE$ ，

$\because BP \perp AD$ ，

$\therefore \angle APB = \angle APE = 90^\circ$ ，

$\because AP = AP$ ，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle AEP$ (ASA)，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$ ， $BP = PE = 3$ ， $AB = AE = 4$ ，

$\because AC = 10$ ，

$\therefore EC = AC - AE = 10 - 4 = 6$ ，

$\because BE = BP + EP = 6$ ，

$\therefore BE = EC$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle C = 18^\circ$ ，

$\because \angle AEB$ 是 $\triangle EBC$ 的一个外角，

$\therefore \angle AEB = \angle EBC + \angle C = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle ABE = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 54^\circ$ ，

故答案为：54.

9. 已知： ABC 是边长为15cm的等边三角形，点 D 、点 E 分别在边 AB ， AC 上，点 F 为边 BC 的三

等分点，将 $\triangle ADE$ 沿着直线 DE 翻折，点 A 恰好与点 F 重合，则 $\triangle BDF$ 的周长为_____cm.

【答案】 20cm 或 25cm

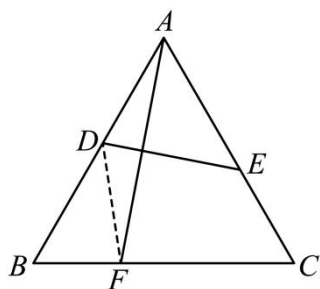
【解析】

【分析】 本题主要考查折叠的性质，由于点 F 为边 BC 的三等分点，所以分点 F 为靠近点 B 和点 C 的三等分点两种情况讨论求解即可.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC = AC = 15\text{cm},$$

①点 F 为边 BC 的三等分点，且点 F 靠近点 B 时，如图①，



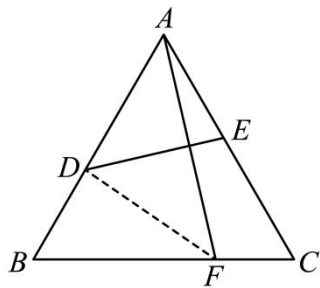
图①

$$\therefore BF = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 15 = 5\text{cm},$$

由折叠的性质得， $DF = DA$ ，

$$\therefore \triangle BDF \text{ 的周长} = BF + BD + DF = BF + BD + AD = BF + AB = 5 + 15 = 20\text{cm}$$

②点 F 为边 BC 的三等分点，且点 F 靠近点 C 时，如图②，



图②

$$\therefore BF = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 15 = 10\text{cm}$$

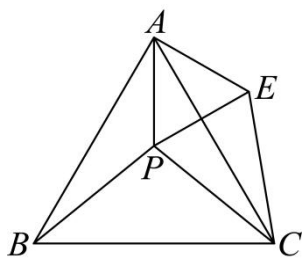
由折叠的性质得， $DF = DA$ ，

$$\therefore \triangle BDF \text{ 的周长} = BF + BD + DF = BF + BD + AD = BF + AB = 10 + 15 = 25\text{cm}$$

综上， $\triangle BDF$ 的周长为 20cm 或 25cm.

故答案为： 20cm 或 25cm.

10. 如图， $\triangle ABP$ 中， $\angle APB = \angle \alpha$ ，把 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到 $\triangle ACE$. 连结 BC 、 PE 、 PC ，测量得 $\angle BPC = 100^\circ$. 若 $\triangle CPE$ 为等腰三角形，则 $\angle \alpha$ 的度数是_____.



【答案】 100° 或 130° 或 160°

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．也考查了等边三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质．先用 α 表示 $\angle CPE = 200^\circ - \alpha$ ， $\angle CEP = \alpha - 60^\circ$ ，再利用三角形内角和定理计算出 $\angle PCE = 40^\circ$ ，然后由 $\triangle CPE$ 为等腰三角形分类讨论：当 $\angle CPE = \angle CEP$ 时，即 $200^\circ - \alpha = \alpha - 60^\circ$ ；当 $\angle CPE = \angle PCE$ 时，即 $200^\circ - \alpha = 40^\circ$ ；当 $\angle PCE = \angle CEP$ 时，即 $\alpha - 60^\circ = 40^\circ$ ，再分别解方程求 α ．

【详解】 解： $\because \triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到 $\triangle ACE$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle PAE = 60^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AP = AE$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle APE$ 都是等边三角形；

$\therefore \angle CPE = 360^\circ - \angle APB - \angle BPC - \angle APE = 200^\circ - \alpha$ ，

而 $\angle CEP = \angle AEC - \angle AEP = \alpha - 60^\circ$ ，

$\therefore \angle PCE = 180^\circ - \angle CPE - \angle CEP = 180^\circ - (200^\circ - \alpha) - (\alpha - 60^\circ) = 40^\circ$ ，

$\therefore \triangle CPE$ 为等腰三角形，下面分三种情况讨论：

①当 $\angle CPE = \angle CEP$ 时，

$200^\circ - \alpha = \alpha - 60^\circ$ ，解得 $\alpha = 130^\circ$ ；

②当 $\angle CPE = \angle PCE$ 时，

$200^\circ - \alpha = 40^\circ$ ，解得 $\alpha = 160^\circ$ ；

③当 $\angle PCE = \angle CEP$ 时， $\alpha - 60^\circ = 40^\circ$ ，解得 $\alpha = 100^\circ \dots$

综上所述，若 $\triangle CPE$ 为等腰三角形，则 $\alpha = 100^\circ$ ， 130° ， 160° ．

故答案为： 100° 或 130° 或 160° ．

二、解答题（第 11 题 3 分，第 12 题 7 分，第 13 题 10 分，总分 20 分）

11. 在《代数学》中记载了求方程 $x^2 + 8x = 33$ 正数解的几何方法：如图 1，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边为一边向外构造四个面积为 $2x$ 的矩形，得到大正方形的面积为 $33 + 16 = 49$ ，则该方程的正数解为 $7 - 4 = 3$ ．小明尝试用此方法解关于 x 的方程 $x^2 + 10x = c$ 时，构造出如图 2 所示正方形，已知图

2 中阴影部分的面积和为 39. 该方程的正数解为多少.

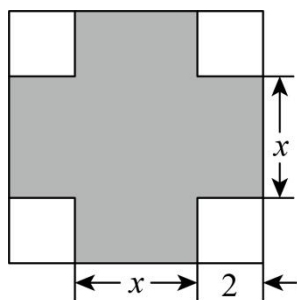


图 1

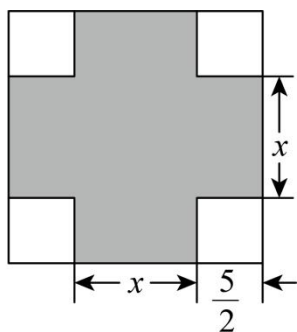


图 2

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，读懂题意并数形结合是解题的关键. 根据已知的数学模型，同理可得空白小正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ ，先计算出大正方形的面积等于阴影部分的面积 + 4 个小正方形的面积，从而可得大正方形的边长，再用其减去两个空白正方形的边长即可得解.

【详解】 解：如图 2，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边长为一边向外构造四个面积为 $\frac{5}{2}x$ 的矩形，得到大正方形的面积为：

$$39 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 4 = 39 + 25 = 64,$$

$$\therefore \text{该方程的正数解为 } \sqrt{64} - \frac{5}{2} \times 2 = 3.$$

12. 小明用的练习本可在甲、乙两个商店内买到，已知两个商店的标价都是每个练习本 1 元，但甲商店的优惠条件是：购买 10 本以上，从第 11 本开始按标价的 75% 卖；乙商店的优惠条件是：从第 1 本开始就按标价的 90% 卖.

(1) 小明要买 20 个练习本，到哪个商店购买较省钱？

(2) 写出甲、乙两个商店中，收款 y (元) 关于购买本数 x (本) ($x > 10$) 的关系式.

(3) 小明现有 24 元钱，最多可买多少个本子？

【答案】 (1) 甲商店，理由见解析

(2) 甲商店： $y = 0.75x + 2.5$ ；乙商店： $y = 0.9x$

(3) 小明用 24 元最多可买 28 本

【解析】

【分析】此题考查了一次函数的应用，函数关系式，解题时首先认真审题，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，然后解答即可.

(1) 根据题意，到甲购买 10 本以上，第 11 本按标价的 75% 卖，如果买 20 本，则付款 $10 \times 1 + 1 \times 75\% \times (20 - 10)$ ，到乙买收款： $20 \times 90\% \times 1$ 即可得到答案；

(2) 当 $x > 10$ 时，分别根据题意列出函数关系式，即可得到答案；

(3) 将 $y = 24$ 分别代入 (2) 中函数关系式，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：甲商店.

甲店收款为： $10 \times 1 + 1 \times 75\% \times (20 - 10) = 17.5$ (元)，

乙店收款为： $20 \times 90\% \times 1 = 18$ (元)，

$\because 17.5 < 18$ ，

$\therefore$ 买 20 本时，到甲店购买省钱；

【小问 2 详解】

解：甲商店： $x > 10$ 时， $y = 1 \times 10 + 1 \times 75\%(x - 10)$ ，即 $y = 0.75x + 2.5$ ；

乙商店： $x > 10$ 时， $y = 1 \times 90\%x$ ，即 $y = 0.9x$ ；

【小问 3 详解】

解：将 $y = 24$ 代入 $y = 0.75x + 2.5$ 得：

$$0.75x + 2.5 = 24$$

$$x = 28\frac{2}{3},$$

所以 24 元钱最多在甲商店可买 28 本，

将 $y = 24$ 代入 $y = 0.9x$ 得：

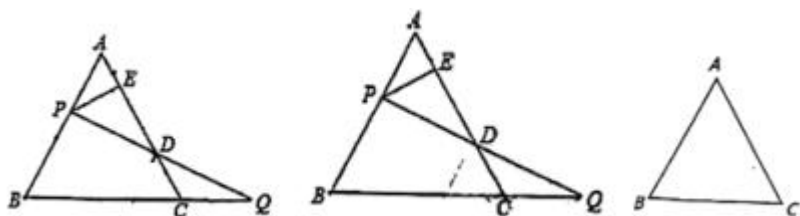
$$0.9x = 24$$

$$x = 26\frac{2}{3},$$

所以 24 元钱最多在乙商店可买 26 本，

答：小明用 24 元最多可买 28 本.

13. 已知：如图，等边三角形 ABC ，点 P 和 Q 分别从 A 和 C 两点同时出发，它们的速度相同. 点 P 沿射线 AB 运动，点 Q 沿边 BC 的延长线运动，设 PQ 与直线 AC 相交于点 D ，作 $PE \perp AC$ 于 E ；



(1) 当 $\triangle DCQ$ 为等腰三角形时，过点 D 作 AB 的平行线，交 BC 于 M ，试探究线段 DM 与 AP 的大小关系，并加以证明.

- (2) ①当点 P 在边 AB 上时，直接写出 DE 与 AC 的数量关系（不需要证明）；
 ②当点 P 在 AB 的延长线上时，①中的结论还成立吗？若成立在图中画出图形并证明. 如不成立，指出 DE 与 AC 的关系并说明理由.

【答案】(1) $AP = DM$ ，理由见解析

(2) ① $DE = \frac{1}{2}AC$ ；②成立，画图及证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由等边三角形性质可得 $\angle B = \angle A = \angle ACB = 60^\circ$ ，由平行线的性质可得 $\angle DMC = \angle B = 60^\circ$, $\angle MDC = \angle A = 60^\circ$ ，得出 $\angle DMC = \angle MDC = \angle ACB = 60^\circ$ ，由等边三角形判定得出 $DM = MC = DC$ ；再证明 $DC = CQ$ ， $DM = CQ$ ，再由题意得出 $AP = CQ$ ，最后可得结论；

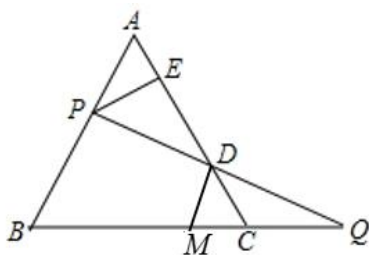
(2) ①作 $QF \perp AC$ ，交直线 AC 的延长线于点 F ，易证 $\triangle APE \cong \triangle CQF$ ，可得 $AE = FC$ ， $PE = QF$ ，可证 $\triangle PDE \cong \triangle QDF$ ，可得 $DE = DF$ ，即 $DE = \frac{1}{2}EF$ ，等量代换得， $DE = \frac{1}{2}AC$ ；

②作 $QF \perp AC$ ，交直线 AC 的延长线于点 F ，连接 EQ ， PF 。再依照①证明即可.

【小问1详解】

解： $AP = DM$ ，理由如下：

如图，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle B = \angle A = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DMC = \angle B = 60^\circ, \angle MDC = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DMC = \angle MDC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore DM = MC = DC,$$

$$\because \triangle DCQ \text{ 为等腰三角形, } \angle DCQ = 120^\circ,$$

$$\therefore DC = CQ,$$

$$\therefore DM = CQ,$$

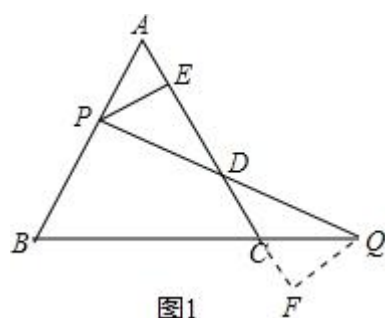
$\because$ 点 P 和 Q 分别从 A 和 C 两点同时出发, 它们的速度相同.

$$\therefore AP = CQ,$$

$$\therefore AP = DM;$$

【小问 2 详解】

解: ①如图 1, 作 $QF \perp AC$, 交直线 AC 的延长线于点 F ,



又 $\because PE \perp AC$ 于 E ,

$$\therefore \angle CFQ = \angle AEP = 90^\circ,$$

$\because$ 点 P 、 Q 做匀速运动且速度相同,

$$\therefore AP = CQ,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle FCQ = 60^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle APE$ 和 $\triangle CQF$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle FCQ \\ \angle AEP = \angle CFQ = 90^\circ, \\ AP = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle CQF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = FC, \quad PE = QF,$$

$$\text{又} \because \angle PDE = \angle FDQ, \quad \angle PED = \angle QFD,$$

$$\therefore \triangle PDE \cong \triangle QDF (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DF,$$

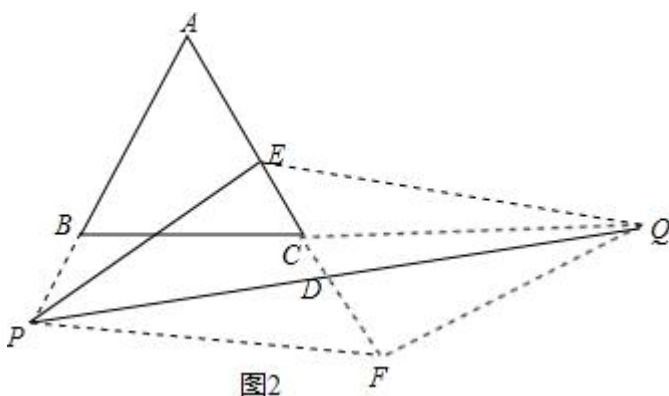
$$\therefore DE = \frac{1}{2} EF,$$

$$\because EF = EC + CF = EC + AE = AC,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC;$$

②结论还成立. 理由如下:

如图2, 作 $QF \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 F , 连接 EQ, PF .



$$\text{同①可得} \triangle APE \cong \triangle CQF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = FC, \quad PE = QF,$$

$$\because PE \parallel QF,$$

$$\therefore \angle PED = \angle QFD, \quad \angle EPD = \angle FQD,$$

$$\therefore \triangle PED \cong \triangle QFD (\text{ASA}),$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} EF,$$

$$\because EF = EC + CF = EC + AE = AC,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC.$$

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的判定与性质、等腰三角形的性质, 全等三角形判定与性质, 平行线的性质的运用, 熟练掌握等边三角形的判定与性质、等腰三角形的性质, 全等三角形判定与性质, 平行线的性质是解答本题的关键.

