

2024 学年第一学期期中质量调研卷

八年级数学

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

一、填空题 (本大题共 14 题, 每题 2 分, 满分 28 分)

1. 化简: $\sqrt{27} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质化简即可.

【详解】 $\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 9} = 3\sqrt{3}$

2. 化简 $\sqrt{(4-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4-\pi$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 化简即可.

【详解】 解: $\because 4-\pi > 0$

$$\therefore \sqrt{(4-\pi)^2} = |4-\pi| = 4-\pi,$$

故答案为: $4-\pi$.

3. 写出一个 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{2a+b}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化, 有理化因式是指两个含有根式的代数式, 当它们相乘时, 它们的积不含有根式, 这样的两个代数式互称为有理化因式, 由此判断即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{2a+b})^2 = 2a+b,$

$\therefore \sqrt{2a+b}$ 的有理化因式为 $\sqrt{2a+b},$

故答案为: $\sqrt{2a+b}$ (答案不唯一).

4. 若最简二次根式 $\sqrt{m^2-2}$ 与 $\sqrt{3m+2}$ 是同类二次根式, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】根据同类二次根式的定义，得 $m^2 - 2 = 3m + 2$ ，且被开方数是非负数解答即可.

本题考查了同类二次根式的定义，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解：根据题意，得 $m^2 - 2 = 3m + 2$ ，

解得 $m = 4, m = -1$ ，

当 $m = -1$ 时， $m^2 - 2 = 3m + 2 = -1$ ，不符合题意，舍去；

当 $m = 4$ 时， $m^2 - 2 = 3m + 2 = 14$ ，符合题意；

故答案为：4.

5. 不等式 $\sqrt{5}x - 1 > 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > \sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，严格遵循解不等式的基本步骤是解本题的关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数，不等号方向要改变. 通过移项、合并同类项、系数化为1，再根据分母有理化化简即可求出不等式的解集.

【详解】解： $\sqrt{5}x - 1 > 2x$

$$\sqrt{5}x - 2x > 1$$

$$(\sqrt{5} - 2)x > 1$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{5} - 2}, \text{ 即 } x > \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

故答案为： $x > \sqrt{5} + 2$.

6. 方程 $3(x + 2)^2 = 24$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}, x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查直接开平方法解一元二次方程，先把方程化简成 $(x + 2)^2 = 8$ ，再直接开平方即可.

【详解】解： $\because 3(x + 2)^2 = 24$ ，

$$\therefore (x+2)^2 = 8,$$

$$\therefore x+2 = \pm\sqrt{8},$$

$$\therefore x = -2 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\therefore x_1 = -2 - 2\sqrt{2}, x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$$

故答案为: $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}, x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$.

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的常数项是 0, 则 $a =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义以及相关概念, 解题的关键是确定常数项, 并注意二次项系数不为零的前提条件.

根据一元二次方程的定义以及常数项为 0, 列出方程解答即可.

【详解】 解: 由题意可知: $a^2 - 1 = 0$,

$\therefore$ 解得: $a = 1$ 或 $a = -1$,

又 $\because a - 1 \neq 0$,

$\therefore a \neq 1$,

$\therefore a = -1$.

故答案为: -1.

8. 若 $a^2 + a - 1 = 0$, $b^2 + b - 1 = 0$, 且 $a \neq b$, 则 $a + b =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据题意, 得 a, b 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个根, 利用根与系数的关系解答即可.

本题考查了构造一元二次方程解题, 根与系数的关系的应用, 正确构造方程, 活用根与系数的关系是解题的关键.

【详解】 解: $\because a^2 + a - 1 = 0$, $b^2 + b - 1 = 0$, 且 $a \neq b$,

$\therefore a, b$ 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个根,

$\therefore a + b = -1$.

故答案为: -1.

9. 在实数范围内因式分解: $x^2 + 3x - 1 =$ _____

【答案】 $\left(x + \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 利用一元二次方程的解法在实数范围内分解因式即可.

【详解】 令 $x^2 + 3x - 1 = 0$

$$\therefore x_1 = -\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = -\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

故答案为 $\left(x + \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$

【点睛】 本题考查实数范围内的因式分解, 利用一元二次方程的解法即可解答, 熟练掌握相关知识点是解题关键.

10. 函数 $y = \sqrt{2x + 1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式成立的条件求解即可.

【详解】 解: 由题意可得: $2x + 1 \geq 0$

解得: $x \geq -\frac{1}{2}$

故答案为: $x \geq -\frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查二次根式成立的条件, 掌握二次根式的被开方数是非负数是本题的解题关键.

11. 函数 $y = kx + (k^2 - 4)$ 是正比例函数, 且图像经过第二、四象限, 则 $k =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据题意, 得 $k < 0, k^2 - 4 = 0$, 解答即可.

本题考查了正比例函数的定义, 图象分布, 熟练掌握定义和图象分布是解题的关键.

【详解】 解: 根据题意, 得 $k < 0, k^2 - 4 = 0$,

解得 $k < 0, k = \pm 2$,

故 $k = -2$,

故答案为: -2 .

12. 若反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ 图像上有 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(2, y_3)$ 三点, 则 y_1, y_2, y_3 从小到大排列 _____.

【答案】 $y_1 < y_3 < y_2$

【解析】

【分析】 根据题意, 得 $k = a^2 + 1 > 0$, 判定函数图象在每个象限内, y 随 x 的增大而减小, 且横坐标、纵坐标同号, 解答即可.

本题考查了反比例函数图象的性质, 熟练掌握性质是解题的关键.

【详解】 解: 根据得 $k = a^2 + 1 > 0$,

$\therefore$ 函数图象在每个象限内, y 随 x 的增大而减小, 且横坐标、纵坐标同号,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ 图像上有 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(2, y_3)$ 三点,

$\therefore y_1 < 0, y_2 > y_3 > 0$,

$\therefore y_1, y_2, y_3$ 从小到大排列为: $y_1 < y_3 < y_2$,

故答案: $y_1 < y_3 < y_2$.

13. 某钢厂一月份产量 100 万吨, 二、三月份产量的月增长率相同, 已知第一季度总产量是 331 万吨, 设二、三月份的月增长率为 x , 可列出方程_____.

【答案】 $100 + 100(1+x) + 100(1+x)^2 = 331$

【解析】

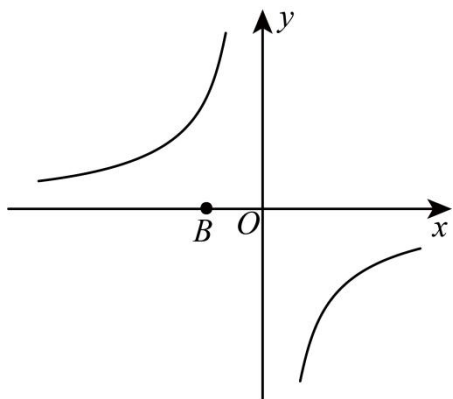
【分析】 设平均每月的增长率为 x , 根据题意, 得第二个月的营业额为 $100(1+x)$, 第三个月的营业额为 $100(1+x)^2$, 求和列出方程即可. 本题考查了平均增长率问题, 正确列方程并熟练解答是解题的关键.

【详解】 设平均每月的增长率为 x ,

根据题意, 得第二个月的营业额为 $100(1+x)$, 第三个月的营业额为 $100(1+x)^2$,

故答案为: $100 + 100(1+x) + 100(1+x)^2 = 331$.

14. 如图, 正比例函数 $y = -2x$ 与反比例函数的图像交于点 A, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴, 垂足为点 $B(-2, 0)$, 若在反比例函数图像上有一点 C, 使 $\triangle ABC$ 的面积为 10, 则点 C 的坐标是_____.



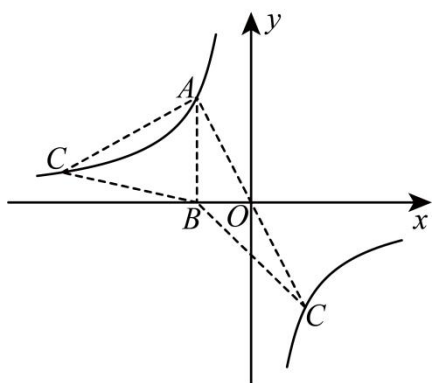
【答案】 $\left(3, -\frac{8}{3}\right)$ 或 $\left(-7, \frac{8}{7}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数与一次函数交点, 反比例函数与面积, 先求出 $A(-2, 4)$, 得到 $AB = 4$, 反比例函数解析式为 $y = -\frac{8}{x}$, 再设 $C\left(n, -\frac{8}{n}\right)$, 最后由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot |n - (-2)| = \frac{1}{2} \times 4 |n + 2| = 2 |n + 2|$ 列方程求解即可.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = -2x$ 与反比例函数的图像交于点 A,

$\therefore$ 设 $A(m, -2m)$, 反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,



$\because$ 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴, 垂足为点 $B(-2, 0)$,

$\therefore m = -2$,

$\therefore A(-2, 4)$,

$$\therefore AB = 4,$$

把 $A(-2, 4)$ 代入反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ 得 $4 = \frac{k}{-2}$, 解得 $k = -8$,

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = -\frac{8}{x},$$

$$\therefore \text{设 } C\left(n, -\frac{8}{n}\right),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot |n - (-2)| = \frac{1}{2} \times 4 |n + 2| = 2 |n + 2|,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 10,

$$\therefore 2 |n + 2| = 10,$$

解得 $n = 3$ 或 $n = -7$,

$$\therefore C\left(3, -\frac{8}{3}\right) \text{ 或 } \left(-7, \frac{8}{7}\right),$$

故答案为: $\left(3, -\frac{8}{3}\right)$ 或 $\left(-7, \frac{8}{7}\right)$.

二、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

15. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{\frac{5}{3}a}$

B. $\sqrt{0.7a}$

C. $\sqrt{30x^3}$

D. $\sqrt{x^2 - y^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式, 被开方数不含有分母, 被开方数不含有开得尽方的因数或因式, 这样的二次根式是最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的定义是解本题的关键. 根据最简二次根式的定义逐一判断即可.

【详解】解: A. 被开方数中含有分母, 不是最简二次根式, 不符合题意,

B. 被开方数含有小数, 不是最简二次根式, 不符合题意,

C. 被开方数含有开得尽方的因数, 不是最简二次根式, 不符合题意,

D. 被开方数中不含能开得尽方的因数, 是最简二次根式, 符合题意,

故选: D.

16. 下列关于 x 的方程中, 一元二次方程是 ()

A. $ax^2 + 2x + 1 = 0$

B. $(x+3)(x+3) = x(x-1)$

C. $\sqrt{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

D. $x^2 = \frac{1}{x^2} + 7$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，一般地，形如 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 a, b, c 都是常数且 $a \neq 0$ 的方程叫做一元二次方程。根据一元二次方程的定义进行逐一判断即可。

【详解】A、当 $a = 0$ 时， $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 不是一元二次方程，不符合题意；

B、 $(x+3)(x+3) = x(x-1)$ 整理后为 $7x+9=0$ 不是一元二次方程，不符合题意；

C、 $\sqrt{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$ ，是一元二次方程，符合题意；

D、 $x^2 = \frac{1}{x^2} + 7$ ，不是整式方程，不是一元二次方程，不符合题意；

故选：C。

17. 下列说法中，正确的是（ ）

A. 长方形的面积为 20cm^2 时，它的长与宽成正比例

B. 若 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ，则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

C. 若反比例函数 $y = \frac{1}{2x}$ ，则 y 随 x 增大而减小

D. 若 y 与 x 成反比例， z 与 y 成反比例，则 z 与 x 也成反比例

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查正比例与反比例，函数求值，反比例函数的性质，根据乘积一定成反比例，比值一定成正比例求值即可。

【详解】解：A、长方形的面积为 20cm^2 时，它的长与宽乘积一定，成反比例，原说法错误，不符合题意；

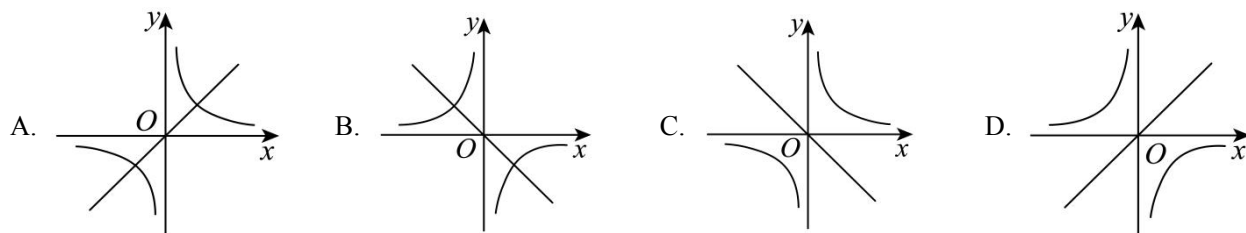
B、当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -4$ ，原说法正确，符合题意；

C、若反比例函数 $y = \frac{1}{2x}$ ，则在每一象限内 y 随 x 增大而减小，原说法错误，不符合题意；

D、若 y 与 x 成反比例， z 与 y 成反比例，则可设 $xy = m$ ， $zy = n$ ，此时 $\frac{x}{z} = \frac{m}{n}$ ，比值一定，则 z 与 x 成正比例，原说法错误，不符合题意；

故选：B.

18. 正比例函数 $y = kx$ 中，如果 y 随 x 增大而增大，那么它和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的大致图像是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查正比例函数与反比例函数的性质，由正比例函数 $y = kx$ 中，如果 y 随 x 增大而增大，可得 $k > 0$ ，得到反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 过一、三象限，据此判断即可.

【详解】解：∵正比例函数 $y = kx$ 中，如果 y 随 x 增大而增大，

∴ $k > 0$ ，图象过一、三象限，

∴反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在一三象限，

故选：A.

三、简答题（本大题共 5 题，每题 6 分，满分 30 分）

19. 计算： $\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(4\sqrt{0.5} + \frac{1}{3}\sqrt{27} \right) + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

【答案】 $3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的混合运算，先化简各项，再算加减即可.

【详解】解： $\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(4\sqrt{0.5} + \frac{1}{3}\sqrt{27} \right) + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \right) + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 3 + 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{2}$$

$$= 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

20. 计算: $\sqrt{a^2b} \div 2\sqrt{ab} \times 3\sqrt{\frac{a}{b}}$

【答案】 $\frac{3a}{2b}\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘除法则化简即可；

【详解】 原式 $= (1 \div 2 \times 3) \sqrt{a^2b \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a^2b}{b^2}} = \frac{3a}{2b} \sqrt{b}.$

【点睛】 本题主要考查了二次根数的乘除运算，准确计算是解题的关键.

21. 解方程: $(x-3)^2 + 4x(x-3) = 0.$

【答案】 $x_1=3, x_2=\frac{3}{5}.$

【解析】

【详解】 试题分析: 方程的左边提取公因式 $x-3$, 即可分解因式, 因而方程利用因式分解法求解.

试题解析: 原式可化为: $(x-3)(x-3+4x)=0,$

$$\therefore x-3=0 \text{ 或 } 5x-3=0,$$

$$\text{解得 } x_1=3, x_2=\frac{3}{5}.$$

考点: 解一元二次方程——因式分解法.

22. 用配方法解方程: $x^2+2\sqrt{5}x=4.$

【答案】 $x_1 = -\sqrt{5}+3, x_2 = -\sqrt{5}-3.$

【解析】

【分析】根据配方法，两边配上一次项系数一半的平方即可得到 $(x + \sqrt{5})^2 = 9$ ，然后利用直接开平方法求解。

【详解】解： $x^2 + 2\sqrt{5}x = -4$ ，

$$x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = -4 + 5, \text{ 即 } (x + \sqrt{5})^2 = 1,$$

$$\therefore x + \sqrt{5} = \pm 1,$$

$$\therefore x_1 = -\sqrt{5} + 1, x_2 = -\sqrt{5} - 1.$$

【点睛】本题主要考查配方法解一元二次方程。

23. 先化简，再求值：

已知 $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ ，求 $\frac{a^2 - 2a + 1}{a - 1} - \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 1}}{a^2 - a}$ 的值。

【答案】 $a - 1 + \frac{1}{a}$ ，3

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，二次根式的混合运算，正确计算是解题的关键。先化简得 $a - 1 + \frac{1}{a}$ ，

再将 $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ 代入 $a - 1 + \frac{1}{a}$ 即可得。

【详解】解：原式 $= \frac{(a - 1)^2}{a - 1} - \frac{\sqrt{(1 - a)^2}}{a(a - 1)}$

$$= a - 1 - \frac{1 - a}{a(a - 1)}$$

$$= a - 1 + \frac{1}{a}$$

当 $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ 代入 $a - 1 + \frac{1}{a}$ 得：

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 3.$$

四、解答题（本大题共4题，24、25、26每题7分，27题9分，满分30分）

24. 等腰三角形的三边长为 a 、 b 、 c ，已知 $a = 2$ ，且 b 、 c 是关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m + 2 = 0$ 的两个根，求 m 的值，并求出这个三角形的周长。

【答案】 $m = 7$ ，三角形周长为 8.

【解析】

【分析】根据根与系数关系定理，得 $b+c = 6, bc = m+2$ ，结合等腰三角形，三角形三边关系定理解答即可.
本题考查了一元二次方程的解和解一元二次方程，也考查了三角形三边的关系. 掌握一元二次方程的解法和等腰三角形恰当分类是解题的关键.

【详解】解： $\because b, c$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m + 2 = 0$ 的两个根，

$$\therefore b+c = 6, bc = m+2,$$

$\because$ 等腰三角形的三边长为 a, b, c ，且 $a = 2$ ，

当 $a = b = 2$ 时，

$$\therefore c = 4, 8 = m+2,$$

$$\text{解得 } c = 4, m = 6,$$

$$\therefore a+b = 4 = c,$$

故构不成三角形，不符合题意；

当 $a = c = 2$ 时，

$$\therefore b = 4, 8 = m+2,$$

$$\text{解得 } b = 4, m = 6,$$

$$\therefore a+c = 4 = b,$$

故构不成三角形，不符合题意；

当 $b = c$ 时，

$$\therefore b = c = 3, 9 = m+2,$$

$$\text{解得 } b = c = 3, m = 7,$$

$$\therefore a+c = 5 > 3 = b,$$

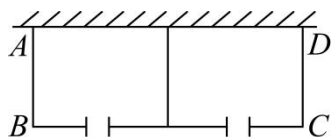
故构成三角形，符合题意；

故三角形的周长为： $a+b+c = 2+3+3 = 8, m = 7$ ，

综上所述， $m = 7$ ，三角形周长为 8.

25. 如图，小区要建一个面积为 90 平方米的长方形车棚，分别停放自行车和电瓶车，为节约材料，车棚一边靠着原有的一堵墙，墙长 16 米，另三边用木栏围起，车棚开两扇 1.5 米的小门. 已知木栏材料总长 30 米，

且正好用完，求这个车棚的长和宽分别是多少米？



【答案】这个车棚的长是 15 米，宽是 6 米

【解析】

【分析】此题考查了一元二次方程的应用，设这个车棚的宽为 x 米，则这个车棚的长为 $(33-3x)$ 米，根据面积为 90 平方米列出方程求解即可.

【详解】解：设这个车棚的宽为 x 米，则这个车棚的长为 $30+1.5\times 2-3x=33-3x$ 米，
根据题意得： $(33-3x)x=90$ ，

整理得： $x^2-11x+30=0$ ，

解得： $x_1=5, x_2=6$ ，

当 $x=5$ 时， $33-3x=33-3\times 5=18>16$ 不符合题意，舍去；

当 $x=6$ 时， $33-3x=33-3\times 6=15<16$ ，符合题意，

答：这个车棚的长是 15 米，宽是 6 米.

26. 阅读下面的材料，回答问题.

解方程 $x^4-5x^2+4=0$.

这是一个一元四次方程，由这个方程的特点，可以采用“换元法”起到降次的目的，将其转化成一元二次方程求解，它的解法如下：

解：设 $x^2=y$ ，那么 $x^4=y^2$ ，于是原方程可变为 $y^2-5y+4=0$ ，解得 $y_1=1$ ， $y_2=4$.

当 $y=1$ 时， $x^2=1$ ， $\therefore x=\pm 1$ ；

当 $y=4$ 时， $x^2=4$ ， $\therefore x=\pm 2$ ；

所以，原方程有四个根，分别为 $x_1=1$ ， $x_2=-1$ ， $x_3=2$ ， $x_4=-2$.

请运用以上方法回答问题：

已知 $(x^2+x)^2-4(x^2+x)-12=0$ ，求 x^2+x 的值.

【答案】 $x^2+x=6$

【解析】

【分析】 本题考查换元法解一元二次方程，设 $x^2 + x = y$ ，于是原方程可变为 $y^2 - 4y - 12 = 0$ ，求出 y 的值即可。

【详解】 解： 设 $x^2 + x = y$ ，于是原方程可变为 $y^2 - 4y - 12 = 0$ ，

$$(y-6)(y+2)=0$$

$$\therefore y-6=0 \text{ 或 } y+2=0,$$

$$\text{解得 } y_1=6, \quad y_2=-2,$$

当 $x^2 + x = y = 6$ 时，整理得 $x^2 + x - 6 = 0$ ， $\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) = 25 > 0$ ，符合题意；

当 $x^2 + x = y = -2$ 时，整理得 $x^2 + x + 2 = 0$ ， $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$ ，不符合题意；

综上所述， $x^2 + x = 6$ 。

27. 已知 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限图像上，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴，垂足为点 B ，将射线 AB 绕点 A 顺时针旋转 45° ，交 x 轴负半轴于点 C ，交 y 轴正半轴于点 D ，

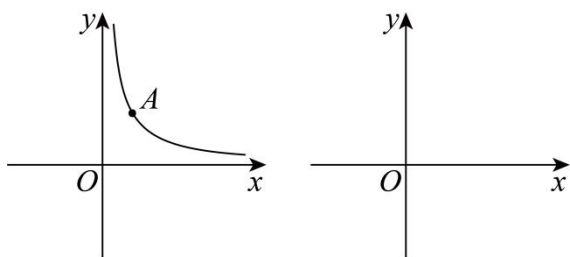


图1

(1) 如图 1，若 $A(2,3)$ ，求反比例函数解析式及 $\triangle ABC$ 面积。

(2) 点 E 为线段 AC 中点，射线 BE 交 y 轴于点 F ，连接 CF ，当 $\triangle CFB$ 面积为 6 时，求 k 的值。

(3) 在 (2) 的条件下，若 $S_{\triangle CFB} = 3S_{\triangle CEF}$ ，求点 A 坐标。

【答案】 (1) 反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{9}{2}$

(2) $k = 6$

(3) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 4\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数上点的特征，等腰直角三角形的判定与性质，旋转的性质；

(1) 直接把 $A(2,3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 求解析式，再由旋转和垂直得到 $AB = BC = 3$ ，最后根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$

计算即可；

(2) 设 $A\left(m, \frac{k}{m}\right)$ ，由旋转和垂直得到 $AB = BC = \frac{k}{m}$ ，由点 E 为线段 AC 中点，可得 $OB = OF = m$ ，最后根据 $S_{\triangle CFB} = 6 = \frac{1}{2}BF \cdot BC = \frac{1}{2}m \cdot \frac{k}{m}$ 计算即可；

(3) 在 (2) 的条件下，反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ ， $A\left(m, \frac{6}{m}\right)$ ， $S_{\triangle CFB} = 3S_{\triangle CEF} = 6$ ， $S_{\triangle VCEF} = 2$ ，然后根据当 E 在第二象限或第象限分别画出图形，求出 $S_{\triangle CAB} = 2S_{\triangle CEB}$ ，再根据 $S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2}AB^2$ 列方程计算即可。

【小问 1 详解】

解：∵ $A(2, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限图像上，

∴ 把 $A(2, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $3 = \frac{k}{2}$ ，解得 $k = 6$ ，

∴ 反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ ，

∴ 过点 $A(2, 3)$ 作 $AB \perp x$ 轴，垂足为点 B ，将射线 AB 绕点 A 顺时针旋转 45° ，交 x 轴负半轴于点 C ，交 y 轴正半轴于点 D ，

∴ $AB = 3$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 45^\circ$ ，

∴ $\angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$ ，

∴ $AB = BC = 3$ ，

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限图像上，

∴ 设 $A\left(m, \frac{k}{m}\right)$ ， $m > 0$

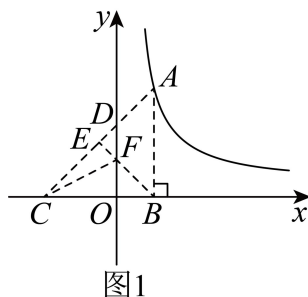


图1

$\therefore$ 过点 $A\left(m, \frac{k}{m}\right)$ 作 $AB \perp x$ 轴，垂足为点 B ，将射线 AB 绕点 A 顺时针旋转 45° ，交 x 轴负半轴于点 C ，

交 y 轴正半轴于点 D ，

$$\therefore AB = \frac{k}{m}, OB = m, \angle ABC = 90^\circ, \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BC = \frac{k}{m},$$

$\therefore$ 点 E 为线段 AC 中点，

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle OFB = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = OF = m,$$

$$\therefore S_{\triangle CFB} = 6 = \frac{1}{2} BF \cdot BC = \frac{1}{2} m \cdot \frac{k}{m},$$

$$\therefore k = 6;$$

【小问 3 详解】

解：在 (2) 的条件下，反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ ， $A\left(m, \frac{6}{m}\right)$ ， $S_{\triangle CFB} = 3S_{\triangle CEF} = 6$ ，

$$\therefore S_{\triangle CEF} = 2,$$

当 E 在第二象限时，如图，

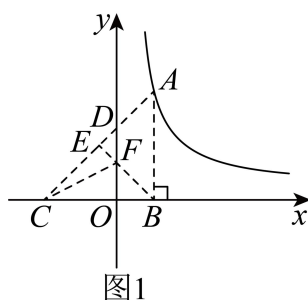


图1

$$\therefore S_{\triangle CEB} = S_{\triangle CFB} + S_{\triangle CEF} = 6 + 2 = 8,$$

$\therefore$ 点 E 为线段 AC 中点，

$$\therefore S_{\triangle CAB} = 2S_{\triangle CEB} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AB^2 = 16, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{m}\right)^2 = 16,$$

解得 $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ (负值舍去), 此时 $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 4\sqrt{2}\right)$;

当 E 在第一象限时, 如图,

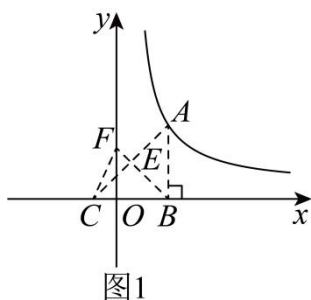


图1

$$\therefore S_{\triangle CEB} = S_{\triangle CFB} - S_{\triangle CEF} = 6 - 2 = 4,$$

$\because$ 点 E 为线段 AC 中点,

$$\therefore S_{\triangle CAB} = 2S_{\triangle CEB} = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AB^2 = 8, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{m}\right)^2 = 8,$$

解得 $m = \frac{3}{2}$ (负值舍去), 此时 $A\left(\frac{3}{2}, 4\right)$;

综上所述, $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 4\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.