

2024 学年第一学期八年级数学学科期中练习卷

(完卷时间：100 分钟，满分：100 分)

试卷说明：1、本试卷含四个大题，共 27 题。答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效。

2、本试卷中每道选择题只有一个正确答案；

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

A. $x(x+1) = x^2$

B. $x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

C. $x^2 - \frac{1}{x} = 0$

D. $ax^2 + 2x + 3 = 0$ (a 为常数)

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程，叫做一元二次方程”，熟记一元二次方程的定义是解题关键。根据一元二次方程的定义逐项判断即可得。

【详解】解：A、 $x(x+1) = x^2$ 化简后是 $x = 0$ ，是一元一次方程，则此项不符合题意；

B、 $x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$ 是一元二次方程，则此项符合题意；

C、 $x^2 - \frac{1}{x} = 0$ 中 $\frac{1}{x}$ 是分式，则不是一元二次方程，则此项不符合题意；

D、当 $a = 0$ 时，方程 $ax^2 + 2x + 3 = 0$ 是一元一次方程；当 $a \neq 0$ 时，方程 $ax^2 + 2x + 3 = 0$ 是一元二次方程，则此项不符合题意；

故选：B。

2. 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{2x}$

C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $2\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】将各项先化为最简二次根式，再根据同类二次根式的定义逐项判断即可。

【详解】A. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故该选项符合题意；

B. $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{2x}$ ，不是同类二次根式，故该选项不符合题意；

C. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，不是同类二次根式，故该选项不符合题意；

D. $2\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{2}$ ，不是同类二次根式，故该选项不符合题意；

故选 A

【点睛】 本题考查了同类二次根式的定义：化成最简二次根式后，被开方数相同，这样的二次根式叫做同类二次根式，掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

3. 下列关于 x 的方程一定有实数解的是 ()

A. $x^2 + 1 = 0$

B. $x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 - bx + 1 = 0$ (b 为常数)

D. $x^2 - bx - 1 = 0$

(b 为常数)

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据一元二次方程根的判别式逐项判断即可.

【详解】 解： A、 $x^2 + 1 = 0$ 的判别式为： $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$ ，方程没有实数解，不符合题意；

B、 $x^2 - x + 1 = 0$ 的判别式为： $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$ ，方程没有实数解，不符合题意；

C、 $x^2 - bx + 1 = 0$ (b 为常数) 的判别式为： $\Delta = b^2 - 4$ ，方程不一定有实数解，不符合题意；

D、 $x^2 - bx - 1 = 0$ (b 为常数) 的判别式为： $\Delta = b^2 + 4 > 0$ ，方程一定有实数解，符合题意；

故选 D.

【点睛】 此题主要考查一元二次方程实数根的情况，正确利用根的判别式进行判断是解题关键.

4. 已知 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 是直线 $y = -2x$ 上的两个点，如果 $x_1 < x_2$ ，那么 y_1 和 y_2 的大小关系正确的是 ()

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法判断

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的性质，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大； $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，熟记正比例函数的性质是解题的关键. 根据正比例函数 $k < 0$ ， y 随 x 的增大而减小即可判断.

【详解】 $\because$ 直线 $y = -2x$ 中 $k = -2 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

又 $\because A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 是直线 $y = -2x$ 上的两个点, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore y_1 > y_2$,

故选: A.

5. 下列各关系式中成正比例的个数有 ()

- (1) 圆的周长与半径 (2) 正方形的面积与边长
(3) 速度一定, 路程与时间 (4) 长方形的面积 S 一定时, 长 a 和宽 b

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正比例函数, 理解相应函数的意义和相应的关系式是正确判断的前提.

分别得出四个问题中的两个变量的函数关系式, 进而确定是正比例函数的个数即可.

【详解】解: (1) 圆的周长 C 与半径 R 之间的关系为: $C = 2\pi R$ 是正比例函数;

(2) 正方形的面积 S 与边长 a 的关系为: $S = a^2$ 不是正比例函数;

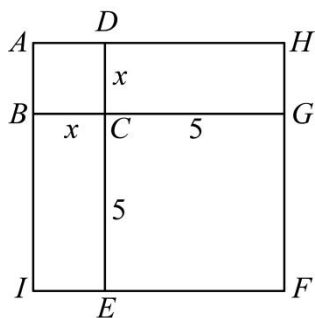
(3) 速度一定, 路程 S 与时间 t 之间的关系为: $s = tv$ 是正比例函数;

(4) 长方形的面积 S 一定时, 长 a 和宽 b 的关系为: $a = \frac{S}{b}$ 不是正比例关系;

$\therefore$ 是正比例函数的有 (1) (3), 共 2 个,

故选: C.

6. 公元 9 世纪, 阿拉伯数学家阿尔·花拉子米在其著作《代数学》中提到构造图形来寻找某个一元二次方程的解的方法: 先构造边长为 x 正方形 $ABCD$, 再分别以 BC , CD 为边作另一边长为 5 的长方形, 最后得到四边形 $AIFH$ 是面积为 64 的正方形, 如图所示, 花拉子米寻找的是下列哪个一元二次方程 () 的解



A. $x^2 + 10x = 25$

B. $x^2 + 10x = 64$

C. $x^2 + 10x = 39$

D. $x^2 + 10x = 99$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可知正方形ABCD面积为 x^2 ，长方形BCEI，DCGH的面积均为 $5x$ ，正方形CEFG面积为25，列出方程即可解答.

【详解】正方形ABCD面积为 x^2 ，长方形BCEI，DCGH的面积均为 $5x$ ，正方形CEFG面积为25，四者面积之和为 $x^2 + 10x + 25$ 与四边形AIFH面积相等，

所以 $x^2 + 10x + 25 = 64$ ，整理得 $x^2 + 10x = 39$

故选C.

【点睛】此题考查一元二次方程的应用，解题关键在于理解题意列出方程.

二、填空题（本大题共12题，每题2分，满分24分）

7. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域是 ____.

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】本题考查了求函数自变量的取值范围，根据分式有意义的条件与二次根式有意义的条件得出不等式组，解不等式组即可求解，掌握分式有意义的条件与二次根式有意义的条件是解题的关键.

【详解】解：由 $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ，

$\therefore x-3 > 0$ ，解得： $x > 3$ ，

故答案为： $x > 3$.

8. $\sqrt{x-1} + 2$ 的有理化因式可以是 ____.

【答案】 $\sqrt{x-1} - 2$

【解析】

【分析】利用平方差公式进行有理化即可得.

【详解】解：因为 $(\sqrt{x-1} + 2)(\sqrt{x-1} - 2) = x - 1 - 4 = x - 5$ ，

所以 $\sqrt{x-1} + 2$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{x-1} - 2$ ，

故答案为： $\sqrt{x-1} - 2$.

【点睛】本题考查了有理化因式，熟练掌握有理化的方法是解题关键.

9. 不等式 $\sqrt{3}x - 5 > 2x$ 的解集是 _____.

【答案】 $x < -5\sqrt{3} - 10$

【解析】

【分析】 根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、系数化为 1 进行计算即可得.

【详解】 解： $\sqrt{3}x - 5 > 2x$,

移项得： $\sqrt{3}x - 2x > 5$,

合并得： $(\sqrt{3} - 2)x > 5$,

解得： $x < -5\sqrt{3} - 10$,

故答案为： $x < -5\sqrt{3} - 10$.

【点睛】 本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数不等号方向要改变.

10. 在实数范围内分解因式： $x^2 - \sqrt{5}x + 1 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查在实数范围内分解因式，解题的关键是利用求根公式因式分解. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 时，

$x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ ，根据求根公式的分解方法和特点即可求解.

【详解】 解： $\because x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 时， $x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$,

$\therefore x^2 - \sqrt{5}x + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,

故答案为： $\left(x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

11. 已知函数 $f(x) = x + \frac{3}{x}$ ，那么 $f(\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】将 $x=\sqrt{3}$ 代入 $f(x)=x+\frac{3}{x}$ 中即可求解.

【详解】解：当 $x=\sqrt{3}$ 时， $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

故答案为 $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查求函数值；解题关键是能够理解 $f(x)$ 中 x 与 $\sqrt{3}$ 的关系.

12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+1=-2k$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围为_____.

【答案】 $k < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义和根的判别式进行求解即可.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+1=-2k$ 有两个不相等的实数根，

化为一般式为： $x^2-4x+1+2k=0$,

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4(1+2k) > 0,$$

$$\text{解得 } k < \frac{3}{2},$$

故答案为： $k < \frac{3}{2}$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的定义和一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2-4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2-4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2-4ac < 0$ ，则方程没有实数根.

13. 如果正比例函数 $y=(k-3)x$ 的图象位于第二、四象限内，那么满足条件的正整数 k 是_____.

【答案】 1 或 2

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数的图象与系数的关系，熟知正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 中，当 $k < 0$ 时，函数的图象在二、四象限是解答此题的关键.

先根据正比例函数 $y=(k-3)x$ 的图象在第二、四象限内可得出关于 k 的不等式，求出 k 的取值范围即可求解.

【详解】解：∵正比例函数 $y=(k-3)x$ 的图象在第二、四象限内，

$$\therefore k-3 < 0, \text{ 解得 } k < 3.$$

$\because k$ 为正整数,

$\therefore k = 1$ 或 2 ,

故答案为: 1 或 2 .

14. 如果直线 $y = (k-1)x$ 的图像与 $y = \frac{-2}{x}$ 的图像有公共点, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$ 或 $k > 1$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数与一次函数图象交点问题, 一元二次方程根的判别式.

把 $y = (k-1)x$ 代入 $y = \frac{-2}{x}$, 得方程 $(k-1)x^2 + 2 = 0$, 再根据直线 $y = (k-1)x$ 的图像与 $y = \frac{-2}{x}$ 的图像

有公共点, 则 $\Delta = -4(k-1) \times 2 \geq 0$, 又 $k-1 \neq 0$, 求解即可.

【详解】 解: 把 $y = (k-1)x$ 代入 $y = \frac{-2}{x}$, 得

$$(k-1)x = \frac{-2}{x}$$

变形得: $(k-1)x^2 + 2 = 0$,

$\because$ 直线 $y = (k-1)x$ 的图像与 $y = \frac{-2}{x}$ 的图像有公共点,

$\therefore$ 方程 $(k-1)x^2 + 2 = 0$ 有实数根,

当 $k-1=0$, 即: $k=1$ 时, 方程化为 $2=0$, 方程无实数根, 不符合题意;

当 $k-1 \neq 0$ 时,

方程 $(k-1)x^2 + 2 = 0$ 为一元二次方程,

$\therefore$ 方程有实数根,

$$\therefore \Delta = -4(k-1) \times 2 \geq 0$$

解得: $k \leq 1$,

$\because$ 当 $k-1 \neq 0$,

$\therefore k < 1$.

故答案为: $k < 1$.

15. 某地 2024 年 4 月份的房价平均每平方米为 40100 元, 该地 2022 年同期的房价平均每平方米为 39800 元. 假设这两年该地房价的平均增长率为 x , 根据题意可列出关 x 的方程为_____.

【答案】 $39800(1+x)^2 = 40100$

【解析】

【分析】本题考查从实际问题抽象出一元二次方程，增长率问题，一般形式为 $a(1+x)^2 = b$ ， a 为起始时间的有关数量， b 为终止时间的有关数量。

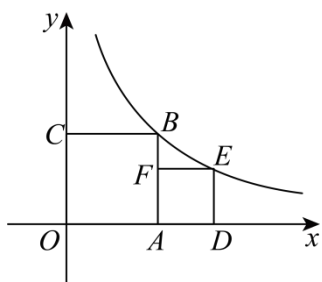
若设房价平均每年的增长率为 x ，根据增长后的量 = 增长前的量 $\times (1 + \text{增长率})$ 即可列出方程。

【详解】解：设房价平均每年的增长率为 x ，

根据题意，得 $39800(1+x)^2 = 40100$ 。

故填空答案： $39800(1+x)^2 = 40100$ 。

16. 如图，正方形 $OABC$ ， $ADEF$ 的顶点 A, D, C 在坐标轴上，点 F 在 AB 上，点 B, E 在函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上，则点 E 的横坐标是_____。



【答案】 $1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的综合题的解法：先设某些点的坐标，再利用几何性质表示其他点的坐标或求其他图象的解析式，然后再利用几何性质建立等量关系求未知字母的值。

先根据正方形的性质设 B 点坐标为 (a, a) ，则 $a = \frac{4}{a}$ ，解得 $a = 2$ ，即 $B(2, 2)$ ，再设 E 点坐标为 $(2+b, b)$ ，

得到 $(2+b) \cdot b = 4$ ，解得 $b = -1 \pm \sqrt{5}$ ，即可求得点 E 的横坐标。

【详解】解：设 B 点坐标为 (a, a) ，

$\therefore a = \frac{4}{a}$ ，解得 $a = \pm 2$ ，负值舍去，

$\therefore B(2, 2)$ ，

设 E 点坐标为 $(2+b, b)$ ，

而 E 点在函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上，

$\therefore (2+b) \cdot b = 4$ ，解得 $b = -1 \pm \sqrt{5}$ ，

而 $b > 0$ ，

$$\therefore b = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的横坐标} = 2 + \sqrt{5} - 1 = 1 + \sqrt{5}.$$

故答案为: $1 + \sqrt{5}$.

17. 对于实数 a, b , 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab (a \geq b) \\ ab - a^2 (a < b) \end{cases}$. 例如 $4 * 2$, 因为 $4 > 2$, 所以

$$4 * 2 = 4^2 - 4 \times 2 = 8. \text{ 若 } x_1, x_2 \text{ 是一元二次方程 } x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ 的两个根, 则 } x_1 * x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -6 或 30

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 新定义运算, 理解新定义是解题的关键, 注意分类讨论.

用因式分解法求出一元二次方程的解, 再分类讨论即可求解.

【详解】 解: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-5=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 或 } x=5,$$

当 $x_1 = -1, x_2 = 5$ 时,

$$x_1 * x_2 = (-1) * 5 = (-1) \times 5 - (-1)^2 = -6;$$

当 $x_1 = 5, x_2 = -1$ 时,

$$x_1 * x_2 = 5 * (-1) = 5^2 - 5 \times (-1) = 30.$$

故答案为: -6 或 30.

18. 平面直角坐标系中, 点 A 坐标为 $(\sqrt{3}, 2)$, 点 B 与点 A 关于原点对称, 将点 B 沿 x 轴向右平移 m 个单位

后恰好落在反比例函数 $y = -\frac{4\sqrt{3}}{x}$ 的图像上, 则 m 的值为 ____.

【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 此题主要考查了反比例函数图像上点的坐标特点, 关于原点对称点的特征, 以及点的平移规律,

关键是要懂得左右移动改变点的横坐标, 左减, 右加. 先求出 $B(-\sqrt{3}, -2)$, 则平移后 $B'(-\sqrt{3} + m, -2)$,

再将其代入 $y = -\frac{4\sqrt{3}}{x}$, 解方程即可.

【详解】解: 由题意得 $B(-\sqrt{3}, -2)$,

则点 B 沿 x 轴向右平移 m 个单位后为 $B'(-\sqrt{3} + m, -2)$,

$\therefore$ 平移后的点落在反比例函数 $y = -\frac{4\sqrt{3}}{x}$ 的图像上,

$\therefore$ 将 $B'(-\sqrt{3} + m, -2)$ 代入 $y = -\frac{4\sqrt{3}}{x}$ 得: $(-\sqrt{3} + m) \times (-2) = -4\sqrt{3}$,

解得: $m = 3\sqrt{3}$,

故答案为: $3\sqrt{3}$.

三、简答题 (每题 6 分, 共 36 分)

19. 计算: $4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

【答案】 $-\sqrt{3} - 7$

【解析】

【分析】根据二次根式的乘法, 完全平方公式, 分母有理化进行计算即可求解.

【详解】解: $4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}-2}$

$$= 2\sqrt{6} - (3 + 2 + 2\sqrt{6}) - (2 + \sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{6} - 5 - 2\sqrt{6} - 2 - \sqrt{3}$$

$$= -\sqrt{3} - 7.$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

20. 计算: $12a\sqrt{a^2b} \div 3b^2 \sqrt{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

【答案】 $4\sqrt{a}$

【解析】

【分析】系数先除后乘, 被开方数也是按这个顺序运算, 把除法化为乘法求出最后结果.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：原式} &= 12a \div 3b^2 \sqrt{a^2 b \div \frac{a^2}{b} \times \frac{b^2}{a}} \\
 &= \frac{4a}{b^2} \sqrt{a^2 b \times \frac{b}{a^2} \times \frac{b^2}{a}} \\
 &= \frac{4a}{b^2} \frac{b^2 \sqrt{a}}{a} \\
 &= 4\sqrt{a}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的乘除法、二次根式的性质与化简，掌握计算时先乘除，后化简，运算顺序是解题关键.

21. 用配方法解方程： $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握配方法是解题关键. 先方程两边同除以 2，再利用完全平方公式进行配方，利用配方法解方程即可得.

【详解】解： $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$,

$$2x^2 - x = \frac{1}{4},$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8},$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \text{ 即 } \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16},$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以方程的解为 $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.

22. 解方程： $(x+1)^2 - 16(x-3)^2 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{11}{5}, x_2 = \frac{13}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握直接开平方法，因式分解法，配方法和公式法是解题的关键． 本题先利用平方差公式进行因式分解，再利用因式分解法即可求解．

【详解】 解： $(x+1)^2 - 16(x-3)^2 = 0$

$$(x+1)^2 - [4(x-3)]^2 = 0$$

$$(x+1+4x-12)(x+1-4x+12) = 0$$

$$5x-11=0 \text{ 或 } -3x+13=0$$

解得： $x_1 = \frac{11}{5}, x_2 = \frac{13}{3}$ ．

23. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $2x-3$ 成反比例. 并且当 $x=2$ 时, $y=5$; 当 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{7}{4}$ 求 y 与 x 之间的函数关系式.

【答案】 $y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{2x-3}$

【解析】

【分析】 本题考查求函数表达式, 设 $y_1 = k_1x, y_2 = \frac{k_2}{2x-3}$, 待定系数法求出 k_1, k_2 , 即可. 掌握待定系数法求函数解析式, 是解题的关键.

【详解】 解: 设 $y_1 = k_1x, y_2 = \frac{k_2}{2x-3}$,

则: $y = y_1 + y_2 = k_1x + \frac{k_2}{2x-3}$,

由题意, 得:
$$\begin{cases} 2k_1 + \frac{k_2}{2 \times 2 - 3} = 5 \\ \frac{1}{2}k_1 + \frac{k_2}{2 \times \frac{1}{2} - 3} = -\frac{7}{4} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{2x-3}.$$

24. 已知关于 x 的方程 $(x-k)^2 - x = k^2 - 4k + 2$.

(1) 求证: 无论 k 取何实数, 这个方程总有实数根;

(2) 当等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$, 另两边长 b, c 恰好是这个方程的两根时, 求 ABC 的周长.

【答案】(1) 证明过程见解析

(2) ABC 的周长为 10, 解题过程见解析

【解析】

【分析】(1) 整理成一般形式, 根据一元二次方程根的判别式, 当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有两个实数根, 所以只需证明 $\Delta \geq 0$ 即可;

(2) 分 $b = c$, 两边长 b, c 有一边是 4, 利用等腰三角形的性质与三边关系探讨得出答案即可.

【小问 1 详解】

证明: 方程整理成一般形式为 $x^2 - (2k+1)x + 4k - 2 = 0$,

$$\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \times 1 \times (4k-2)$$

$$= 4k^2 - 12k + 9$$

$$= (2k-3)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 无论 k 取什么实数值, 方程总有实数根;

【小问 2 详解】

解: 当 $b = c$ 时, $\Delta = 0$,

$$\text{即 } 2k - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{3}{2},$$

$$\text{此时 } x_1 = x_2 = \frac{2k+1}{2} = 2,$$

$$\therefore 2 + 2 = 4,$$

$\therefore$ 此时不能构成三角形;

$$\text{当两边长 } b, c \text{ 有一边是 4 时, } (4-k)^2 - 4 = k^2 - 4k + 2,$$

$$\text{解得: } k = \frac{5}{2},$$

$$\text{关于 } x \text{ 的方程 } (x-k)^2 - x = k^2 - 4k + 2 \text{ 即 } x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$\text{解得: } x = 2 \text{ 或 } x = 4,$$

等腰 ABC 的三边长为 2、4、4,

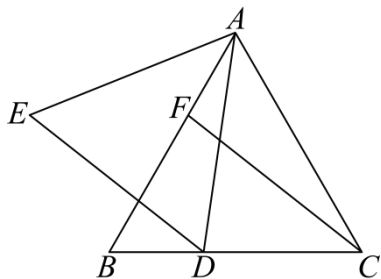
$$\therefore ABC \text{ 的周长为 } 2 + 4 + 4 = 10.$$

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 也考查了三

角形三边的关系以及分类讨论思想的运用. 解题的关键是在求等腰三角形的周长时, 要分类讨论.

四、解答题 (第 25 题 6 分, 第 26 题 6 分, 第 27 题 10 分, 共 22 分)

25. 如图, 已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形, 点 D 在边 BC 上, 点 F 是 AB 边上一点, 且 $BF = CD$.



(1) 求证: $\triangle BFC \cong \triangle CDA$;

(2) 求证: $DE \parallel CF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 平行线的判定, 熟练掌握相关性质与判定是解题的关键.

(1) 由等边三角形的性质得 $AC = BC$, $\angle ACB = \angle B = 60^\circ$, 即可用 SAS 定理得出结论;

(2) 由 $\triangle BFC \cong \triangle CDA$, 得 $\angle BCF = \angle CAD$, 再由等边三角形的性质证明 $\angle BDE = \angle BCF$, 即可由平行线的判定定理得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AC = BC$, $\angle ACB = \angle B = 60^\circ$,

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} CB = AC \\ \angle B = \angle ACD, \\ BF = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BFC \cong \triangle CDA$ (SAS),

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle BFC \cong \triangle CDA$

$\therefore \angle BCF = \angle CAD$

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$,

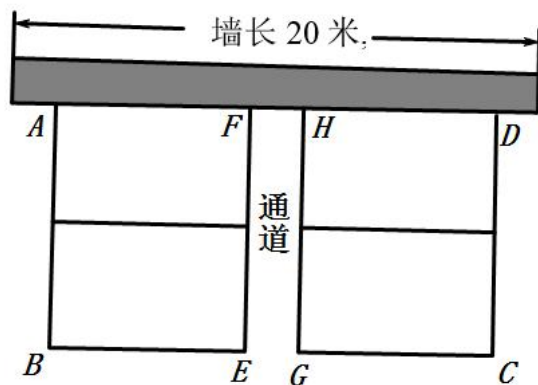
$$\therefore \angle ADE + \angle BDE = \angle ACB + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BCF,$$

$$\therefore DE \parallel CF;$$

26. 如图,用总长为 80 米的篱笆,在一面靠墙的空地上围成如图所示的花圃 ABCD,花圃中间有一条 2 米宽的人行通道,园艺师傅用篱笆围成了四个形状、大小一样的鲜花种植区域,鲜花种植总面积为 192 平方米,花圃的一边靠墙,墙长 20 米,求 AB 和 BC 的长.



【答案】AB=12m, BC=18m.

【解析】

【分析】设 AB=x, 则 $BE = \frac{80-4x}{4}$, 根据鲜花种植总面积为 192 平方米及矩形的面积得到一元二次方程即可求解.

【详解】设 AB=x, 则 $BE = \frac{80-4x}{4}$,

$$\therefore 4 \times \frac{x}{2} \times \frac{80-4x}{4} = 192$$

解得 $x_1=8, x_2=12$,

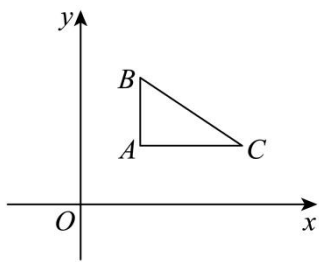
当 $x=12$ 时, $BE=8$, $\therefore BC=2 \times 8 + 2 = 18 < 20$, 符合题意;

当 $x=8$ 时, $BE=12$, $\therefore BC=2 \times 12 + 2 = 26 > 20$, 不符合题意, 舍去;

故 AB=12m, BC=18m.

【点睛】此题主要考查一元二次方程的应用, 解题的关键是根据图形找到等量关系列出方程求解.

27. 如图, 在直角坐标系中, $Rt\triangle ABC$ 位于第一象限, 两条直角边 AC、AB 分别平行于 x 轴、y 轴, 点 A 的坐标为 (1,1), $AB=2$, $AC=3$.



- (1) 求直线 OB 表达式;
- (2) 若反比例函数的图象经过点 A 和点 P , 使 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP}$, 求点 P 的坐标;
- (3) 在边 AC 有一点 M , 且 $AM = 2MC$, 连结 BM 并延长至 N , 使 $MN = BM$, 求点 N 的坐标.

【答案】 (1) $y = 3x$

(2) $P\left(4, \frac{1}{4}\right)$

(3) $N(5, -1)$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得出 B 点的坐标, 利用待定系数法求出直线 OB 的解析式即可;

(2) 设反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$, 把 A 点坐标代入反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$, 求得 $m = 1$, 再设点 P 坐标为 $\left(x, \frac{1}{x}\right)$, 根据 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AB \cdot |1-x| = \frac{1}{2} \times 2 |1-x| = |1-x|$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$, 所以 $S_{\triangle APB} = S_{\triangle ABC} = 3$, 则 $|1-x| = 3$, 求解即可求解.

(3) 过点 N 作 $DN \parallel x$ 轴, 交 y 轴于 D , 延长 BA 交 x 轴于 F , 交 DN 于 E , 连接 ME , 先求出 $AM = 2$, 再由直角三角形的性质和等腰三角形的性质求出 $AE = AB = 2$, 则 $EF = 1$, 然后证明 AM 是 $\triangle BEN$ 的中位线, 求得 $NE = 2AM = 4$, 从而得出 $ND = 5$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AB$ 平行于 y 轴, 点 A 的坐标为 $(1, 1)$, $AB = 2$,

$\therefore B(1, 3)$,

设直线 OB 解析式为 $y = kx$,

把 $B(1, 3)$ 代入 $y = kx$, 得 $k = 3$,

$\therefore$ 直线 OB 解析式为 $y = 3x$;

【小问 2 详解】

解：设经过点 A 、 P 的反比例函数解析式为 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$,

把 $A(1,1)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$, 得 $m = 1$,

$\therefore$ 经过点 A 和点 P 的反比例函数解析式为 $y = \frac{1}{x}$,

设点 P 坐标为 $\left(x, \frac{1}{x}\right)$,

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AB \cdot |1-x| = \frac{1}{2} \times 2 |1-x| = |1-x|,$$

$$\because S_{\text{Rt } \triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3, \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP},$$

$$\therefore S_{\triangle APB} = S_{\text{Rt } \triangle ABC} = 3,$$

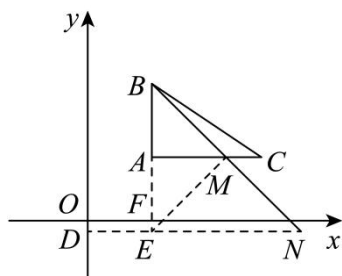
$$\therefore |1-x| = 3,$$

$$\therefore x_1 = 4, \quad x_2 = -2 \quad (\text{不符合题意, 舍去}),$$

$$\therefore P\left(4, \frac{1}{4}\right).$$

【小问 3 详解】

解：过点 N 作 $DN \parallel x$ 轴, 交 y 轴于 D , 延长 BA 交 x 轴于 F , 交 DN 于 E , 连接 ME , 如图,



$$\because AM = 2MC, \quad AC = 3,$$

$$\therefore AM = 2,$$

$$\because AC \parallel x \text{ 轴}, \quad DN \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore AC \parallel EN$$

$$\therefore \angle NEB = \angle CAB = 90^\circ$$

$$\therefore MN = BM$$

$$\therefore EM = MN = BM$$

$$\because AB \perp AC$$

$$\therefore AE = AB = 2,$$

$$\therefore NE = 2AM = 4$$

$$\because A(1,1),$$

$$\therefore EF = 1, \quad DE = 1$$

$$\therefore ND = DE + NE = 1 + 4 = 5$$

$\therefore$ 点 N 在第四限,

$$\therefore N(5, -1).$$

【点睛】 本题考查待定系数法求正比例和反比例函数的解析式，反比例函数的图象性质，坐标与图形，三角形的面积，直角三角形的性质，等腰三角形的性质，三角形中位线性质，正确作出图形和辅助线是解题的关键.