

八年级数学学科

(满分 100 分，考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分)

1. 下列二次根式中，不能与 $\sqrt{2}$ 合并的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，同类二次根式的概念，熟练掌握二次根式的化简是解题的关键. 先将各二次根式化简，再根据同类二次根式的概念进行判断即可.

【详解】 A、因为 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，所以 A 不符合题意；

B、因为 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ，所以 B 不符合题意；

C、因为 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，所以 C 符合题意；

D、因为 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，所以 D 不符合题意.

故选： C.

2. 下列方程中，是一元二次方程的是 ()

- A. $x + \frac{1}{x} = 1$ B. $x(x+1) = x^2 - 1$
C. $\sqrt{x^2 + x} = 1$ D. $\sqrt{5}x^2 - x = 5x^2 - \sqrt{5}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程. 根据一元二次方程的定义对各选项进行逐一分析即可.

【详解】 解： A、 $x + \frac{1}{x} = 1$ 中含有分式，所以该方程不是一元二次方程，不符合题意；

B、 $x(x+1) = x^2 - 1$ 化简可得 $x+1=0$ ，未知数的次数是 1，不是一元二次方程，不符合题意；

C、 $\sqrt{x^2 + x} = 1$ ，不是整式方程，所以该方程不是一元二次方程，不符合题意；

D、 $\sqrt{5}x^2 - x = 5x^2 - \sqrt{5}$ ，该方程是一元二次方程，符合题意.

故选: D.

3. 在下列各式中, 二次根式 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ B. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ C. $\sqrt{a+b}$ D. $\sqrt{a-b}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用平方差公式及有理化因式的定义逐个判断即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, 故 A、C、D 均不符合题意, 选项 B 符合题意,

故选: B.

【点睛】 本题考查二次根式的化简、分母有理化等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

4. 下列各点中, 在正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图像上的是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ B. $(-3, -1)$ C. $(0, -1)$ D. $(6, 3)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的图像. 熟练掌握正比例函数的图像是解题的关键.

将点横坐标代入, 求函数值, 然后判断作答即可.

【详解】 解: 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ 不在正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图像上, 故 A 不符合要求;

当 $x = -3$ 时, $y = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$, $(-3, -1)$ 在正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图像上, 故 B 符合要求;

当 $x = 0$ 时, $y = \frac{1}{3} \times 0 = 0$, $(0, -1)$ 不在正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图像上, 故 C 不符合要求;

当 $x = 6$ 时, $y = \frac{1}{3} \times 6 = 2$, $(6, 3)$ 不在正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图像上, 故 D 不符合要求;

故选: B.

5. 对所有实数 a , b , 下列等式从左到右一定成立的是 ()

- A. $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$ B. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$C. (-\sqrt{a})^2 = -|a|$$

$$D. \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，二次根式的化简，二次根式的乘法法则，熟知上述性质和计算法则是解题的关键。利用二次根式的性质化简，二次根式的乘法法则，逐一判断即可解答。

【详解】解：当 $a - b \geq 0$ 时， $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$ ，当 $a - b < 0$ 时， $\sqrt{(a-b)^2} = -a + b$ ，故 A 不一定成立；

当 a, b 都小于 0 时， $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ ，故 B 不一定成立；

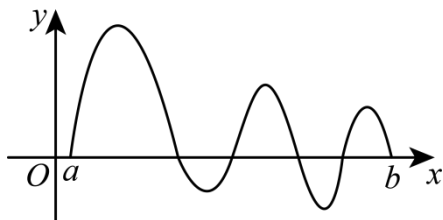
$(-\sqrt{a})^2 = |a|$ ，故 C 不成立；

$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$ ，故 D 成立，

故选：D。

6. 如图是某函数的图象，当 $a \leq x \leq b$ 时，若在该函数图象上可以找到 n 个不同的点

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，使得 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 恒成立，则 n 的值不可能是（ ）



A. 2

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了函数图象，学会利用数形结合的思想解决问题是解题关键。

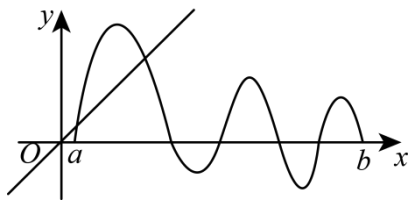
设 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k (k \neq 0)$ ，则在该函数图象上 n 个不同的点， $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，也都在

正比例的图象上，画出函数图象，观察正比例函数 $y = kx$ 与其交点情况即可求解。

【详解】解：设 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k (k \neq 0)$ ，则在该函数图象上 n 个不同的点， $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

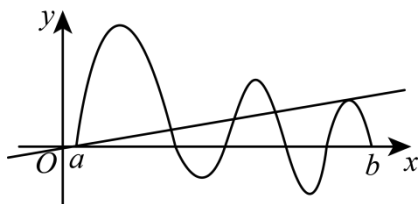
也都在 $y = kx$ ，的图象上，画出函数图象观察交点即可求解。

如图 1



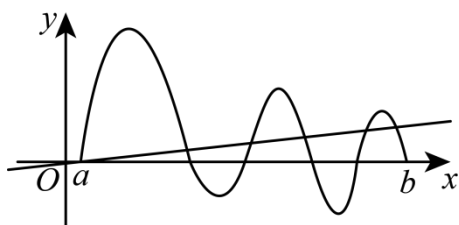
正比例函数与该函数图象有 2 个交点，故 A 不符合；

如图 2



正比例函数与该函数图象有 5 个交点，故 B 不符合；

如图 3



正比例函数与该函数图象有 6 个交点，故 C 不符合；

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 化简： $\sqrt{48} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，二次根式的乘法，逆用二次根式的乘法，根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解： $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$,

故答案为： $4\sqrt{3}$.

8. 计算： $\sqrt{20} \times \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的乘法，利用二次根式的乘法法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \sqrt{20} \times \sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \sqrt{20 \times \frac{1}{5}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

故答案为：2.

9. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】根据二次根式和分式有意义的条件列不等式即可.

【详解】解：根据题意可得， $x-1 > 0$,

解得， $x > 1$,

故答案为： $x > 1$.

【点睛】本题考查了二次根式和分式有意义的条件，解题关键是熟练运用相关性质列不等式，确定自变量的取值范围.

10. 方程 $x^2 - 3x = 0$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 3$

【解析】

【详解】解： $x(x-3) = 0$ ，

解得： $x_1 = 0, x_2 = 3$.

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = 3$.

11. 在实数范围内因式分解： $x^2 - 4x - 1 =$ _____.

【答案】 $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})$

【解析】

【分析】 本题考查了实数，分解因式，能选择正确的方法分解因式是解此题的关键．注意分解因式要彻底．先拆项，将 -1 拆成 $4-5$ ，再根据完全平方公式变形，最后根据平方差公式分解即可．

【详解】 解 $x^2 - 4x - 1$

$$= x^2 - 4x + 4 - 5$$

$$= (x-2)^2 - 5$$

$$= (x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5}).$$

故答案为: $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})$.

12. 已知正比例函数 $y = (2-5m)x$, y 的值随 x 的值的增大而增大, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{2}{5}$ 或 $m < 0.4$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的性质，根据正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而减小解答即可，

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = (2-5m)x$, y 的值随 x 的值的增大而增大,

$$\therefore 2-5m > 0,$$

$$\text{解得: } m < \frac{2}{5}.$$

$$\text{故答案为: } m < \frac{2}{5}.$$

13. 已知函数 $f(x) = 2x+1$, 如果 $f(a) = 3$, 那么 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查求函数的值. 把 $x = a$ 代入 $f(x) = 2x+1$ 求解即可.

【详解】 解: 把 $x = a$ 代入 $f(x) = 2x+1$ 得 $f(a) = 2a+1 = 3$,

$$\text{解得 } a = 1.$$

故答案为: 1.

14. 已知关于 y 的一元二次方程 $y^2 + 2y - k = 1$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式. 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

依题意得, $\Delta = 2^2 - 4[-(k+1)] \geq 0$, 计算求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 y 的一元二次方程 $y^2 + 2y - k = 1$ 有实数根,

$$\therefore y^2 + 2y - (k+1) = 0$$

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4[-(k+1)] \geq 0,$$

解得, $k \geq -2$,

故答案为: $k \geq -2$.

15. 某文具店为迎接“购物节”, 提高水笔销量, 经过两次降价后 (每次降价的百分率相同), 由每盒 25 元降至每盒 16 元. 则降价的百分率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的实际应用, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

设每次降价的百分率为 x , 根据原价及现价, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其小于 1 的值即可得出结论.

【详解】 解: 设每次降价的百分率为 x ,

$$\text{根据题意得: } 25(1-x)^2 = 16,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1}{5} = 20\%, \quad x_2 = \frac{9}{5} = 180\% \text{ (舍),}$$

答: 每次降价的百分率为 20%.

故答案为: 20%.

16. 若正比例函数 $y = 2x (x < 0)$ 图像上一点到 y 轴的距离是 $2\sqrt{2}$, 则这点的坐标为_____.

【答案】 $(-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 此题考查了正比例函数, 准确求解点的坐标是解题的关键.

根据题意得到这个点的横坐标为 $-2\sqrt{2}$, 然后代入求解即可.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = 2x (x < 0)$ 图像上一点到 y 轴的距离是 $2\sqrt{2}$,

$$\therefore \text{这个点的横坐标为 } -2\sqrt{2}$$

∴ 将 $x = -2\sqrt{2}$ 代入 $y = 2x = 2 \times (-2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$.

∴ 这点的坐标为 $(-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$.

故答案为: $(-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$.

17. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程称为“差 1 方程”. 例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x - m = 0$ (m 是常数) 是“差 1 方程”, 则 m 的值为_____

【答案】 -2 或 0 或 -2

【解析】

【分析】 本题考查根与系数的关系. 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 由题意, 得:
 $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$, $x_2 - x_1 = 1$, 利用完全平方公式的变形形式进行计算即可.

【详解】 解: 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 由题意, 得: $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$, $x_2 - x_1 = 1$,
∴ $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (m-1)^2 + 4m = 1$,

解得: $m = -2$ 或 $m = 0$,

故答案为: -2 或 0.

18. 已知 p 、 q 是实数, 有且只有三个不同的 x 满足方程 $|x^2 + px + q| = 3$, 则 q 的最小值是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解以及根的判别式, 由 $|x^2 + px + q| = 3$ 得到 $x^2 + px + q - 3 = 0$ ①,
 $x^2 + px + q + 3 = 0$ ②, 根据根的判别式得到 $\Delta_1 = p^2 - 4q + 12$, $\Delta_2 = p^2 - 4q - 12$, 依此 $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 = 24$,
可得 $p^2 - 4q - 12 = 0$, 根据题意由根的判别式得到 $p^2 - 4q - 12 = 0$ 是解题的关键.

【详解】 解: ∵ $|x^2 + px + q| = 3$,

∴ $x^2 + px + q - 3 = 0$ ①, $x^2 + px + q + 3 = 0$ ②,

∴ $\Delta_1 = p^2 - 4q + 12$, $\Delta_2 = p^2 - 4q - 12$,

∴ $\Delta_1 > \Delta_2$,

∴ 有且只有三个不同的 x 值满足方程 $|x^2 + px + q| = 3$,

$$\therefore \Delta_2 = 0, \Delta_1 = 24,$$

$$\therefore p^2 - 4q - 12 = 0,$$

$$\therefore q = \frac{1}{4}p^2 - 3,$$

当 $p = 0$ 时, q 的最小值 -3 ,

故答案为: -3 .

二、简答题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 满分 20 分)

19. 计算: $\sqrt{24} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\sqrt{12}$

【答案】 $\frac{8\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式混合运算, 熟练掌握运算法则, 是解题的关键. 根据二次根式性质进行化简, 然后再根据二次根式加减运算法则进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{24} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\sqrt{12}$

$$= 2\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \left(2\sqrt{6} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

20. 计算: $\frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2}$

【答案】 $-\frac{16}{9}x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式乘除混合运算, 涉及二次根式性质化简、二次根式被开方式非负、二次根式乘法运算法则及二次根式除法运算法则等, 熟练掌握二次根式性质及乘除运算法则是解决问题的关键. 先根据二次根式性质化简, 再结合二次根式乘除运算法则求解即可得到答案.

【详解】解： $\frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2}$

$$= -\left(\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\right) \sqrt{x^4y \cdot \frac{y^2}{x} \cdot \frac{1}{xy^2}}$$

$$= -\frac{16}{9}\sqrt{x^2y}$$

$$= -\frac{16}{9}x\sqrt{y};$$

另一种解法：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \div \frac{3y\sqrt{x}}{4} \\ &= \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \cdot \frac{4}{3y\sqrt{x}} \\ &= -\frac{16}{9}x\sqrt{y}.\end{aligned}$$

21. 解方程： $(2x+1)^2 = 2x^2 + x$

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，熟练掌握用因式分解法求解一元二次方程是解题的关键。

先化简，再运用因式分解法求解即可。

【详解】解： 化简整理，得 $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$$(2x+1)(x+1) = 0$$

$$2x+1=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1.$$

22. 用配方法解方程： $3x^2 - 6x + 2 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 观察题干，根据配方法，即可得出结论。

【详解】解： $3x^2 - 6x + 2 = 0$

移项，得： $3x^2 - 6x = -2$ ，

二次项系数化为 1，得：

$$x^2 - 2x = -\frac{2}{3},$$

配方，得： $(x-1)^2 = \frac{1}{3}$ ，

$$\text{开方，得： } x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故答案为 } x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，配方是解题关键，配方法的步骤是移项，二次项系数化为 1，配方，开方.

三、解答题（本大题共 6 题，第 23、24 题每题 5 分，第 25、26、27 题每题 6 分，第 28 题 10 分，满分 38 分）

23. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ ，求代数式 $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+5x+6}$ 的值.

【答案】 $\frac{1}{x+3}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化，利用二次根式的性质进行化简，因式分解等知识. 熟练掌握分母有理化，利用二次根式的性质进行化简，因式分解是解题的关键.

利用二次根式的性质进行化简，进行因式分解可得化简结果，分母有理化可得 x 的值，然后代值求解即可.

【详解】 解：由题意知， $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$,

$$\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+5x+6} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+3},$$

$$\text{将 } x = \sqrt{5}-2 \text{ 代入得，原式} = \frac{1}{\sqrt{5}-2+3} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

24. 已知方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2，求另一个根及 m 的值.

【答案】 方程的另一个根是 4， m 的值是 -1 或 3

【解析】

【分析】根据一元二次方程的判别式，确定 m 的取值范围，再根据方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为2，求出 m 的值，代入 m 的值，即可求解.

【详解】解：方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ ，则 $a = 1$ ， $b = -6$ ， $c = m^2 - 2m + 5$ ，

$\therefore$ 方程有两个根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 2m + 5) \geq 0,$$

$$\therefore m^2 - 2m - 4 \leq 0,$$

$$\therefore 1 - \sqrt{5} \leq m \leq 1 + \sqrt{5},$$

$\therefore$ 方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为2，

$$\therefore 4 - 12 + m^2 - 2m + 5 = 0, \text{ 则 } m_1 = -1, m_2 = 3,$$

当 $m = -1$ 时，方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 得， $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$ ，

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = 4;$$

当 $m = 3$ 时，方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 得， $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$ ，

$$\therefore x_3 = 2, x_4 = 4,$$

$\therefore x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为2，求另一个根是4， m 的值是-1或3.

故答案为：方程的另一个根是4， m 的值是-1或3.

【点睛】本题主要考查根的判别式，根据一个根求另有一个根，及参数的值，掌握本的判别式，解一元二次方程的方法，分类讨论的方法是解题的关键.

25. 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图像经过一、三象限，且经过 $P(k + 2, 4k + 3)$

(1) 求 k 的值.

(2) 当 $y = \frac{2}{3}$ 时，求 x 的值.

【答案】(1) $k = 3$

(2) $x = \frac{2}{9}$

【解析】

【分析】本题主要考查解一元二次方程和正比例函数的性质，

(1) 根据题意将点代入正比例函数中得到一元二次方程，结合正比例函数的性质即可求得 k ，

(2) 将 y 值代入解方程即可.

【小问 1 详解】

解: 将 $x = k + 2$, $y = 4k + 3$ 代入 $y = kx$, 得

$$4k + 3 = k(k + 2)$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$(k - 3)(k + 1) = 0$$

$$k_1 = 3, k_2 = -1,$$

$\because$ 正比例函数图形经过一、三象限

$$\therefore k = 3;$$

【小问 2 详解】

解: 将 $y = \frac{2}{3}$ 代入 $y = 3x$

$$\frac{2}{3} = 3x$$

$$\therefore x = \frac{2}{9}.$$

26. 已知关于 x 的方程 $(m^2 - m)x^2 - 4mx + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 m 为整数, 且 $m < 3$, a 是方程的一个根, 求代数式 $2a^2 - 2a - \frac{3a^2 - 1}{2} + 1$ 的值.

【答案】(1) $m > 0$ 且 $m \neq 1$

(2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 一元二次方程的定义, 代数式求值, 理解根的判别式是解答关键.

(1) 根据一元二次方程的定义, 根的判别式来求解;

(2) 根据题意先求出 m , 进而得到 $a^2 - 4a = -2$, 再代入代数式中进行计算求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得 $\therefore m^2 - m \neq 0$,

$$\therefore m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 1,$$

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m^2 - m) \times 4 = 16m > 0.$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m > 0 \text{ 且 } m \neq 1.$$

【小问2详解】

解：由题意得： $0 < m < 3$ ，且为 $m \neq 1$ 的整数，

$$\therefore m = 2.$$

$$\text{将 } x = a, \quad m = 2 \text{ 代入 } (m^2 - m)x^2 - 4mx + 4 = 0$$

$$\text{得： } a^2 - 4a = -2,$$

$$\backslash 2a^2 - 2a - \frac{3a^2 - 1}{2} + 1$$

$$= 2a^2 - 2a - \frac{3a^2}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$$

将 $a^2 - 4a = -2$ 代入 $\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$ 中

$$\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

27. 同学们开展的综合实践活动中取得了系列丰硕的成果，需要推广宣传．原计划使用一块正方形 $ABCD$ 场地布展，后经过研究，发现长与宽之比为 $3:2$ 的长方形 $AGFE$ 场地展览效果更好，因此需要把长增加 6 米，宽增加 2 米（如图 1）．

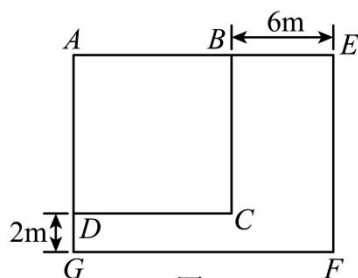


图1



图2

(1) 直接写出长方形区域 $AEFG$ 的宽 AG 是_____m，长 AE 是_____m.

(2) 现计划将长方形区域 $AEFG$ 按图 2 的方式进行划分，展示四各小组的项目成果，在各展区之间留宽度

(2) 过点 P 作 $PA \perp x$ 轴, 过点 Q 作 $QB \perp x$ 轴, 垂足分别是 A 、 B . 如果 $\triangle APQ$ 的面积是 $\triangle OPQ$ 面积的 $\frac{3}{4}$, 请求出 k 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 线段 PA 与直线 $y = kx$ 相交于点 G , 直线 $y = 3x$ 上是否存在点 D , 使 $S_{\triangle ODG} = \frac{1}{2} S_{\triangle OPG}$? 如果存在, 请直接写出 D 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $P(1,3)$, $Q\left(\frac{1}{k}, 1\right)$

(2) $k = \frac{1}{3}$

(3) 存在, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数解析式, 坐标与图形, 解分式方程等知识. 熟练掌握一次函数解析式, 坐标与图形, 解分式方程是解题的关键.

(1) 由点 $P(1, a)$ 在直线 $y = 3x$ 上, 可得 $a = 3$, 即 $P(1, 3)$; 由直线 $y = kx (0 < k < 1)$ 上有一点 $Q(b, 1)$, 可得 $bk = 1$, 可求 $b = \frac{1}{k}$, 进而可得 $Q\left(\frac{1}{k}, 1\right)$;

(2) 由题意知, $A(1, 0)$, $B\left(\frac{1}{k}, 0\right)$, 则 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{k} - 1\right)$,

$S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle APQ} + S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle BOQ} = \frac{3}{2k} - \frac{1}{2}$, 由 $\triangle APQ$ 的面积是 $\triangle OPQ$ 面积的 $\frac{3}{4}$, 可得

$\frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{k} - 1\right) = \left(\frac{3}{2k} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4}$, 计算求出满足要求的解即可;

(3) 由题意知, 设 $D(m, 3m)$, 当 D 在第一象限时, 如图, 由 $S_{\triangle ODG} = \frac{1}{2} S_{\triangle OPG}$, 可得 $OD = \frac{1}{2} OP$, 可求 $D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; 当 D 在第三象限时, 如图, D' , 由题意知, $OD = OD'$, 则 $D'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $P(1, a)$ 在直线 $y = 3x$ 上,

$\therefore a = 3$, 即 $P(1, 3)$;

$\because$ 直线 $y = kx (0 < k < 1)$ 上有一点 $Q(b, 1)$,

$$\therefore bk=1,$$

$$\text{解得, } b=\frac{1}{k},$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{k}, 1\right);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由题意知, } A(1, 0), B\left(\frac{1}{k}, 0\right),$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{k} - 1\right),$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle APQ} + S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle BOQ} = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{k} - 1\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{k} - 1\right) \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} \times 1 = \frac{3}{2k} - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle APQ \text{ 的面积是 } \triangle OPQ \text{ 面积的 } \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{k} - 1\right) = \left(\frac{3}{2k} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4},$$

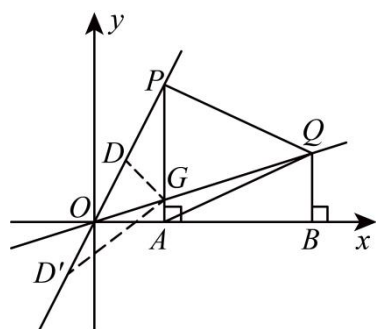
$$\text{解得, } k = \frac{1}{3},$$

$$\text{经检验, } k = \frac{1}{3} \text{ 是原分式方程的解且符合要求;}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 设 } D(m, 3m),$$

当 D 在第一象限时, 如图,



$$\therefore S_{\triangle ODG} = \frac{1}{2} S_{\triangle OPG},$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} OP,$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right);$$

当 D 在第三象限时，如图， D' ,

由题意知， $OD = OD'$,

$$\therefore D' \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right),$$

综上所述，存在， D 的坐标 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$.