

2024 学年第一学期期中考试

八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

请将所有题目的答案写在答题纸上, 写在试卷上无效

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式中与 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{30}$

B. $\sqrt{12}$

C. $\sqrt{32}$

D. $\sqrt{24}$

【答案】C

【解析】

【分析】把 $\sqrt{18}$ 和各选项中的式子化为最简二次根式, 再由同类二次根式的概念解答即可.

【详解】解: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

A、 $\sqrt{30}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数相同, 是同类二次根式, 符合题意;

D、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查的是同类二次根式, 熟知一般地, 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式是解题的关键.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$

D. $\sqrt{a^2} = a$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的运算法则即可求解判断.

【详解】A. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 不能计算, 故错误;

B. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 正确;

$$C. \frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}, \text{ 故错误}$$

$$D. \sqrt{a^2} = |a|, \text{ 故错误}$$

故选 B.

【点睛】此题主要考查二次根式的运算，解题的关键是熟知其运算法则.

3. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是 ()

$$A. x^2 = -1$$

$$B. ax^2 + bx + c = 0 \text{ (其中 } a、b、c \text{ 是常数)}$$

$$C. x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$D. (x-3)(x-2) = x^2 - 1$$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查的是一元二次方程的判断，掌握一元二次方程的定义及一般形式是解题关键. 先将各项一元二次方程不是一般形式的化为一般形式，然后根据一元二次方程的定义逐一判断即可.

【详解】解：A. $x^2 = -1$ ，是一元二次方程，故符合题意；

B. 当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 $a、b、c$ 是常数) 不是一元二次方程，故不符合题意；

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$ 不是整式方程，所以不是一元二次方程，故不符合题意；

D. $(x-3)(x-2) = x^2 - 1$ ，整理，得 $5x - 7 = 0$ ，不是一元二次方程，故不符合题意.

故选：A.

4. 如果关于 x 的二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，那么 a 的取值范围是 ()

$$A. 0 < a < \frac{9}{16}$$

$$B. a \leq \frac{9}{16}$$

$$C. a \geq \frac{9}{16}$$

$$D. a \leq \frac{9}{16} \text{ 且 } a \neq 0$$

【答案】D

【解析】

【分析】因二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，所以 $ax^2 + 3x + 4 = 0$ 有实数根，据此求解即可.

【详解】 $\because$ 二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，

$\therefore ax^2 + 3x + 4 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = 9 - 16a \geq 0, \quad a \neq 0$$

$$\therefore a \leq \frac{9}{16} \text{ 且 } a \neq 0.$$

故选：D.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式，以及因式分解法解一元二次方程：若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，那么一元二次方程可整理为 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

5. 在函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图像上有三点 $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ ，已知 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ ，则下列各式中，正确的是 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_2 > y_1 > y_3$ D. $y_1 > y_3 > y_2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数的图像与性质，先判断反比例函数的图像所在的象限和增减性，进而可得结论.

【详解】 解： $\because k < 0$,

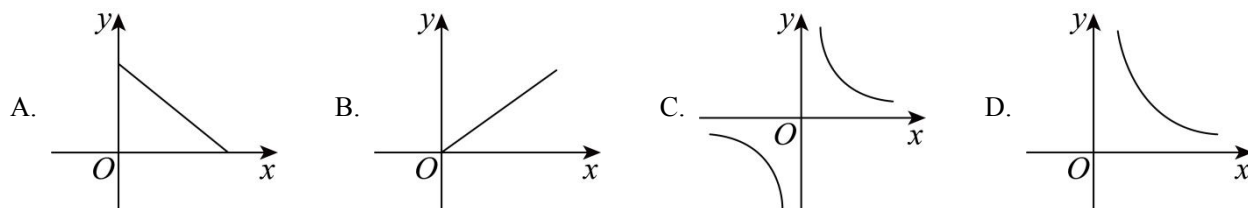
$\therefore$ 函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图像在第二、四象限，且在每一个象限， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ 在函数图像上， $x_1 < x_2 < 0 < x_3$,

$\therefore y_2 > y_1 > 0 > y_3$,

故选：C.

6. 已知矩形的面积为 5，它的长 y 与宽 x 之间的关系用图像大致可表示为 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图象，理解反比例函数的图象是解答关键.

根据矩形的面积公式求出 $y = \frac{5}{x}$ ，利用矩形的长和宽都是正数来确定反比例函数图象.

【详解】 解： $\because$ 矩形的面积为 5，

$\therefore$ 它的长 y 与宽 x 之间的关系： $xy = 5$,

$$\therefore y = \frac{5}{x},$$

$\therefore$ 它是反比例函数，则 A 和 B 不符合题意.

因为矩形的长和宽都是正数，

所以反比例函数的图象只能在第一象限，故 D 符合题意.

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

7. 化简： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，解题的关键是掌握二次根式的性质，利用二次根式的性质进行化简.

【详解】 解： $\because 4 < 5$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{5} - 2.$$

故答案为： $\sqrt{5}-2$

8. 化简： $\sqrt{20a^3b^2} (b > 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2ab\sqrt{5a}$

【解析】

【分析】 本题考查了根据二次根式的性质进行化简，根据算术平方根的非负性可求得结果，正确求解是解题的关键.

【详解】 解：根据二次根式的性质可知： $a \geq 0$,

$$\because b > 0,$$

$$\therefore \text{原式} = 2ab\sqrt{5a},$$

故答案为： $2ab\sqrt{5a}$.

9. 函数 $y = \sqrt{2-3x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x \leq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的意义及性质，被开方数大于或等于 0，据此作答.

【详解】根据二次根式的意义，被开方数 $2-3x \geq 0$,

解得 $x \leq \frac{2}{3}$.

故函数 $y = \sqrt{2-3x}$ 的定义域是 $x \leq \frac{2}{3}$.

故答案为: $x \leq \frac{2}{3}$.

【点睛】主要考查了二次根式的意义和性质. 概念: 式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式. 性质: 二次根式中的被开方数必须是非负数, 否则二次根式无意义. 掌握二次根式的概念和性质是关键.

10. 已知 $f(x) = \frac{2}{x-2}$, 则 $f(\sqrt{5}) =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{5} + 4$

【解析】

【分析】本题主要考查了求函数值, 分母有理化, 直接把 $x = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{2}{x-2}$ 中进行求解即可.

【详解】解: $\because f(x) = \frac{2}{x-2}$,

$$\begin{aligned}\therefore f(\sqrt{5}) &= \frac{2}{\sqrt{5}-2} \\&= \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2) \times (\sqrt{5}+2)} \\&= \frac{2(\sqrt{5}+2)}{5-4} \\&= 2\sqrt{5} + 4,\end{aligned}$$

故答案为: $2\sqrt{5} + 4$.

11. 不等式 $\sqrt{3}x - 1 < 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】本题考查解一元一次不等式, 二次根式的运算, 根据解一元一次不等式的步骤进行求解即可.

【详解】解: $\because \sqrt{3}x - 1 < 2x$,

$$\therefore \sqrt{3}x - 2x < 1,$$

$$\therefore x > \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\sqrt{3}-2,$$

故答案为: $x > -\sqrt{3}-2$.

12. 若 $x = -1$ 是方程 $x^2 - mx - 3 = 0$ 的一个根, 则 m 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的解的定义将 $x = -1$ 代入方程 $x^2 - mx - 3 = 0$, 列出关于 m 的方程, 通过解方程求得 m 的值即可.

【详解】 解: $\because x = -1$ 是方程 $x^2 - mx - 3 = 0$ 的一个根,

$$\therefore 1 + m - 3 = 0,$$

解得: $m = 2$,

故答案为: 2.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的解, 解题的关键是根据题意得出 $1 + m - 3 = 0$.

13. 方程 $x(x-2) = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=3$.

【解析】

【详解】 因式分解法解一元二次方程.

【分析】 原方程可化为 $x(x-2) - x = 0$,

$$x(x-2-1) = 0,$$

$$x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得: $x_1=0$, $x_2=3$.

14. 方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根据方程有两个实数根, 得到 $\Delta \geq 0$, 结合一元二次方程的二次项的系数不为 0, 进行求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得: $\Delta = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k+1 \geq 0$, 且 $k \neq 0$,

解得： $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ ；

故答案为： $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

15. 一元二次方程 $x^2 - 9x + 20 = 0$ 的两个根是等腰三角形的底和腰，则这个三角形的周长为_____

【答案】 13 或 14

【解析】

【详解】解： $x^2 - 9x + 20 = 0$ ， $(x - 4)(x - 5) = 0$ ，所以 $x = 4$ 或 $x = 5$ ，

当 4 为腰，5 为底时，周长 $= 4 + 4 + 5 = 13$ ，

当 5 为腰，4 为底时，周长 $= 5 + 5 + 4 = 14$ ，

故答案为 13 或 14.

16. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 4xy - y^2 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查在实数范围内因式分解，先令 $2x^2 - 4xy - y^2 = 0$ ，利用求根公式求出两个根，根据 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 分解即可.

【详解】解： 令 $2x^2 - 4xy - y^2 = 0$ ，

$a = 2, b = -4y, c = -y^2$ ，

$b^2 - 4ac = 16y^2 - 4 \times 2 \times (-y^2) = 24y^2$ ，

$x = \frac{4y \pm \sqrt{24y^2}}{4} = \frac{4y \pm 2\sqrt{6}y}{4} = \frac{2y \pm \sqrt{6}y}{2}$ ，

$\therefore 2x^2 - 4xy - y^2 = 2\left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}y\right)$ ，

故答案为： $2\left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}y\right)$.

17. 已知函数 $y = (m + 1)x^{m^2 - 3}$ 是正比例函数，且 y 随 x 的增大而减小，则 $m =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据正比例函数定义可得 $m^2-3=1$ ，再根据正比例函数的性质可得 $m+1 < 0$ ，再解即可.

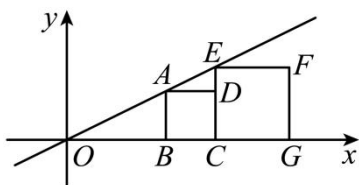
【详解】解：由题意得： $m^2-3=1$ ，且 $m+1 < 0$ ，

解得： $m=-2$ ，

故答案为： -2 .

【点睛】此题主要考查了正比例函数的定义和性质，关键是掌握形如 $y=kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数，当 $k > 0$ 时，直线 $y=kx$ 依次经过第三、一象限，从左向右上升， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时，直线 $y=kx$ 依次经过第二、四象限，从左向右下降， y 随 x 的增大而减小.

18. 如图，正方形 $ABCD$ ， $CEFG$ 边在 x 轴的正半轴上，顶点 A ， E 在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上，如果正方形 $ABCD$ 边长是 1，那么点 F 的坐标是_____.



【答案】 $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的应用，涉及到正方形的性质、点的坐标，解题的关键是熟练掌握正方形的性质求得点 A 、 E 的坐标. 令 $y=1$ 可得 $x=2$ ，即点 $A(2,1)$ 根据正方形的性质可得点 E 的横坐标，代入解析式即可求得点 E 的纵坐标，继而根据正方形的性质可得点 F 的坐标.

【详解】解： $\because$ 正方形 $ABCD$ ， $CEFG$ 边在 x 轴的正半轴上，

$\therefore AB = BC = CD = AD = 1$ ， $CE = CG = EF = GF$ ， AB 、 CD 、 CE 、 $FG \perp x$ 轴，

$\because$ 顶点 A ， E 在直线 $y = \frac{1}{2}x$ ，

令 $y=1$ ，则 $x=2$ ，

$\therefore$ 点 $A(2,1)$ ，

$\therefore$ 点 E 的横坐标为 3，

将 $x=3$ 代入直线 $y = \frac{1}{2}x$ ，得 $y = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 点 E 、 F 的纵坐标是 $\frac{3}{2}$ ，

$$\text{即 } CE = FG = EF = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的横坐标为 } 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{即点 } F\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

三、简答题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{18} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

【答案】 $5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先化简二次根式、分母有理化, 再根据二次根式的加减法法则进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{18} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

$$= 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查的是二次根式的混合运算, 熟练掌握法则是本题的解题关键.

$$20. \text{ 计算: } \frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a > 0).$$

【答案】 $-a\sqrt{ab}.$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘除法计算, 根据二次根式的乘除法计算法则求解即可.

【详解】 解: $\frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$= \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{b} \div 3\right) \sqrt{ab \cdot a^3b \div \frac{a}{b}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{b}\sqrt{ab \cdot a^3b \div \frac{a}{b}} \\
&= -\frac{1}{b}\sqrt{a^3b^3} \\
&= -\frac{ab}{b}\sqrt{ab} \\
&= -a\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

21. 用配方法解方程: $3x^2 - 1 = 6x$.

【答案】 $x_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$

【解析】

【分析】 先把方程两边都除以 3, 使二次项的系数为 1, 然后再配上一次项系数一半的平方, 利用配方法解方程.

【详解】 解: 由方程 $3x^2 - 1 = 6x$, 得方程 $x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0$,

把方程 $x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0$ 的常数项移到等号的右边, 得到 $x^2 - 2x = \frac{1}{3}$,

方程两边同时加上一次项系数一半的平方, 得到 $x^2 - 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$,

配方得 $(x-1)^2 = \frac{4}{3}$,

所以 $x_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程--配方法, 属于基础题.

配方法的一般步骤:

(1) 把常数项移到等号的右边;

(2) 把二次项的系数化为 1;

(3) 等式两边同时加上一次项系数一半的平方.

22. 解方程: $y - \frac{y^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}.$

【答案】 $y_1 = 1 + \sqrt{3}, y_2 = 1 - \sqrt{3}.$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先把原方程化为一般式, 再利用配方法解方程即可.

【详解】解： $\because y - \frac{y^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2},$

$$\therefore 2y - y^2 + 1 = -1,$$

$$\therefore y^2 - 2y - 2 = 0,$$

$$\therefore y^2 - 2y = 2,$$

$$\therefore y^2 - 2y + 1 = 3,$$

$$\therefore (y - 1)^2 = 3,$$

$$\therefore y - 1 = \pm\sqrt{3},$$

解得 $y_1 = 1 + \sqrt{3}, y_2 = 1 - \sqrt{3}.$

23. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k + 3)x + 2k + 2 = 0.$

(1) 求证：无论 k 取何值，方程总有两个实数根；

(2) 若方程有一个不小于 4 的根，求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $k \geq 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，解一元二次方程：

(1) 根据题意只需要证明 $\Delta = [-(k + 3)]^2 - 4(2k + 2) \geq 0$ 即可；

(2) 利用因式分解法求出方程的两个根为 $x_1 = 2, x_2 = k + 1$ ，再根据方程有一个不小于 4 的根列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

证明：由题意得， $\Delta = [-(k + 3)]^2 - 4(2k + 2)$

$$= k^2 + 6k + 9 - 8k - 8$$

$$= k^2 - 2k + 1$$

$$= (k - 1)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 无论 k 取何值，方程总有两个实数根；

【小问 2 详解】

解: $\because x^2 - (k+3)x + 2k + 2 = 0,$

$\therefore (x-k-1)(x-2) = 0,$

解得 $x_1 = 2, x_2 = k+1,$

$\therefore$ 方程有一个不小于 4 的根,

$\therefore k+1 \geq 4,$

$\therefore k \geq 3.$

四、解答题 (本大题共 4 小题, 满分 27 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤)

24. 已知函数 $y = \frac{x}{k} (k \neq 0)$, 函数值 y 随 x 的值增大而减小, 且点 $A(3, k-2)$ 在这个函数的图像上.

(1) 求 k 的值;

(2) 若一个反比例函数图像过点 A , 请指出它的函数值 y 随自变量 x 的值的变化的情况?

【答案】 (1) $k = -1$;

(2) 在每一象限内, y 随 x 的增大而增大.

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数解析式, 解一元二次方程, 求反比例函数解析式, 反比例函数的增减性:

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求出点 A 坐标, 进而求出对应的反比例函数解析式, 据此可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 函数 $y = \frac{x}{k} (k \neq 0)$ 的函数值 y 随 x 的值增大而减小,

$\therefore k < 0,$

$\because$ 点 $A(3, k-2)$ 在这个函数的图像上,

$\therefore k-2 = \frac{3}{k},$

$\therefore k = -1$ 或 $k = 3$ (舍去);

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得 $k = -1$, 则 $k-2 = -3$,

$\therefore A(3, -3),$

设经过点 A 的反比例函数解析式为 $y = \frac{k_1}{x} (k_1 \neq 0)$,

$$\therefore 3 = \frac{k_1}{-3}, \text{ 即 } k_1 = -9,$$

$$\therefore \text{经过点 } A \text{ 的反比例函数解析式为 } y = \frac{-9}{x},$$

$\therefore$ 经过点 A 的反比例函数在每一象限内, y 随 x 的增大而增大.

25. 小明在一幅长为 80cm, 宽为 50cm 的矩形风景画的四周镶一条相同宽度的金色纸边, 制成一幅矩形挂图, 如图所示, 如果要使整个挂图的面积是 5400cm^2 , 求金色纸边的宽度.



【答案】 金色纸边的宽度为 5cm.

【解析】

【分析】 设金色纸边的宽度为 $x\text{cm}$, 则挂图的长为 $(80+2x)\text{cm}$, 宽就为 $(50+2x)\text{cm}$, 根据题目条件列出方程, 求出其解就可以.

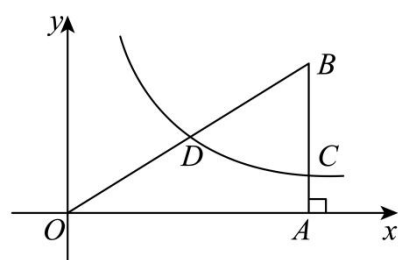
【详解】 解: 设金色纸边的宽度为 $x\text{cm}$, 则挂图的长为 $(80+2x)\text{cm}$, 宽就为 $(50+2x)\text{cm}$, 根据题意得: $(80+2x)(50+2x) = 5400$,

解得: $x_1 = -70$ (不符合题意, 舍去), $x_2 = 5$.

答: 金色纸边的宽度为 5cm.

考点: 一元二次方程的应用.

26. 如图 $\text{Rt}\triangle OAB$, $BA \perp OA$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在第一象限内的图像与 AB 交于点 $C(8,1)$ 与 OB 交于点 $D(4,m)$.



(1) 求该反比例函数的解析式及直线 OB 的解析式;

(2) 连接 CD , 求 $\triangle BCD$ 的面积.

【答案】 (1) 反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$, 直线 OB 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$

(2) 6.

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合：

(1) 把点 C 坐标代入反比例函数解析式中求出反比例函数解析式，进而求出点 D 的坐标，再利用待定系数法求出直线 OB 的解析式即可；

(2) 先求出点 B 的坐标，进而求出 BC 的长，再利用三角形面积计算公式求解即可．

【小问 1 详解】

解：把 $C(8,1)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中得： $1 = \frac{k}{8}$ ，解得 $k = 8$ ，

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$ ，

在 $y = \frac{8}{x}$ 中，当 $x = 4$ 时， $y = \frac{8}{4} = 2$ ，

$\therefore D(4,2)$ ，

设直线 OB 解析式为 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$ ，

把 $D(4,2)$ 代入 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$ 中得： $2 = 4k_1$ ，解得 $k_1 = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 OB 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$ ，

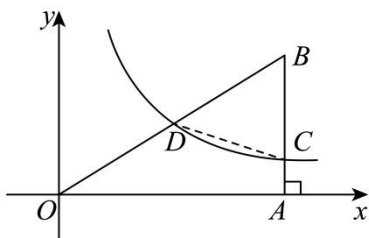
【小问 2 详解】

解：在 $y = \frac{1}{2}x$ 中，当 $x = 8$ 时， $y = 4$ ，

$\therefore B(8,4)$ ，

$\therefore BC = 3$ ，

$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 3 \times (8 - 4) = 6$ ．



27. 请阅读以下材料：

①若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根，则方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系：

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，把它们称为一元二次方程根与系数关系定理（韦达定理）．

②定义：已知 x_1, x_2 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根，若 $x_1 < x_2 < 0$ ，且

$3 < \frac{x_1}{x_2} < 4$ ，则称这个方程为“限根方程”。如：一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 的两根为 $x_1 = -10, x_2 = -3$ ，

因为 $-10 < -3 < 0$ ， $3 < \frac{-10}{-3} < 4$ ，所以一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 为“限根方程”。

请解决下列问题：

(1) 判断一元二次方程 $x^2 + 9x + 14 = 0$ 是否为“限根方程”，并说明理由；

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”，且方程的两根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$ ，求 k 的值；

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (1-m)x - m = 0$ 是“限根方程”，则 m 的取值范围为_____。（此小问直接填空，不写过程）

【答案】(1) 是，理由见解析

(2) 2 (3) $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ 或 $-4 < m < -3$

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程，一元二次方程根与系数的关系，一元二次方程根的判别式。读懂题意，理解“限根方程”的定义是解题关键。

(1) 解该一元二次方程，得出 $x_1 = -7, x_2 = -2$ ，再根据“限根方程”的定义判断即可；

(2) 由一元二次方程根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = -\frac{k+7}{2}$ ， $x_1x_2 = \frac{k^2+3}{2}$ ，代入 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$ ，

即可求出 $k_1 = 2, k_2 = -1$ 。再结合“限根方程”的定义分类讨论舍去不合题意的值即可；

(3) 解该一元二次方程，得出 $x_1 = -1, x_2 = m$ 或 $x_1 = m, x_2 = -1$ 。再根据此方程为“限根方程”，即得出此方程有两个不相等的实数根，结合一元二次方程根的判别式即可得出 $\Delta > 0, m < 0$ 且 $m \neq -1$ ，可求出 m 的取值范围。最后分类讨论即可求解。

【小问1详解】

解： $x^2 + 9x + 14 = 0$ ，

$(x+2)(x+7) = 0$ ，

$\therefore x+2=0$ 或 $x+7=0$ ，

$$\therefore x_1 = -7, x_2 = -2.$$

$$\because -7 < -2, \quad 3 < \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} < 4,$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”；

【小问2详解】

解： $\because$ 方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 的两个根分比为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{k+7}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{k^2+3}{2}.$$

$$\because x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1,$$

$$\therefore -\frac{k+7}{2} + \frac{k^2+3}{2} = -1,$$

$$\text{解得: } k_1 = 2, \quad k_2 = -1.$$

分类讨论：①当 $k = 2$ 时，原方程为 $2x^2 + 9x + 7 = 0$,

$$\therefore x_1 = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad 3 < \frac{x_1}{x_2} = \frac{7}{2} < 4,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”，

$\therefore k = 2$ 符合题意；

②当 $k = -1$ 时，原方程为 $2x^2 + 6x + 4 = 0$,

$$\therefore x_1 = -2, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = 2 < 3,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 不是“限根方程”，

$\therefore k = -1$ 不符合题意.

综上所述 k 的值为 2；

【小问3详解】

$$\text{解: } x^2 + (1-m)x - m = 0,$$

$$(x+1)(x-m)=0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-m=0,$$

$$\therefore x_1=-1, x_2=m \text{ 或 } x_1=m, x_2=-1.$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”，

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0, m < 0 \text{ 且 } m \neq -1,$$

$$\therefore (1-m)^2 + 4m > 0, \text{ 即 } (1+m)^2 > 0,$$

$$\therefore m < 0 \text{ 且 } m \neq -1.$$

分类讨论：①当 $-1 < m < 0$ 时，

$$\therefore x_1=-1, x_2=m,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{-1}{m} < 4,$$

$$\text{解得: } -\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4};$$

②当 $m < -1$ 时，

$$\therefore x_1=m, x_2=-1,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{m}{-1} < 4,$$

$$\text{解得: } -4 < m < -3.$$

综上所述， m 的取值范围为 $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ 或 $-4 < m < -3$.