

徐汇中学 2024 学年初二年级第一学期期中考试数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 + 10 分)

【请将所有答案填写在答题纸上, 在本试卷上作答无效】

一、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

1. 化简: $\sqrt{28} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 根据化简二次根式的法则计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

故答案为 $2\sqrt{7}$.

【点睛】 本题主要考查了化简二次根式, 熟练掌握化简二次根式的法则是解题的关键.

2. 等式 $\sqrt{\frac{a}{a-3}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-3}}$ 成立的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a > 3$

【解析】

【分析】 由二次根式有意义的条件, 可知二次根式的被开方数定为非负实数, 于是可以列出 $\frac{a}{a-3} \geq 0, a-3 \geq 0, a \geq 0$ 根据分式的分母不为零时, 分式有意义, 还可列出关于 a 的不等式 $a-3 \neq 0$. 接下来将所得三个不等式联立求解, 即可得到 a 的取值范围

【详解】 要想等式成立, 需要每个二次根式有意义且分母不为 0, 则有

$$\text{等式} \begin{cases} \frac{a}{a-3} \geq 0 \\ a-3 \geq 0 \\ a-3 \neq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

解得 $a > 3$

【点睛】 此题考查二次根式和分式有意义的条件, 解题关键在于使求出它们同时有意义的条件

3. 分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$

【解析】

【分析】 根据分母有理化的定义先分子、分母同乘以 $\sqrt{a-b}$ ，去掉分母中的根号，从而得出答案.

【详解】 解: $\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{a-b};$

故答案为: $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}.$

【点睛】 本题主要考查了分母有理化，解题的关键是熟练掌握分母有理化的方法，准确计算.

4. 方程 $3(x-7)^2 = 2(x-7)$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 7, x_2 = \frac{23}{3}.$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，直接用因式分解法求解即可，掌握解一元二次方程的解法是解题的关键.

【详解】 解: $3(x-7)^2 = 2(x-7),$

$$\therefore 3(x-7)^2 - 2(x-7) = 0,$$

$$\therefore (x-7)[3(x-7)-2] = 0,$$

$$\therefore (x-7)(3x-23) = 0,$$

解得: $x_1 = 7, x_2 = \frac{23}{3}.$

5. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 2x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 将原式变形成为 $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1$ ，再利用平方差公式分解即可.

【详解】 解: 原式 $= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \\
&= \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \\
&= \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \\
&= \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right) \\
&= 2\left(x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

故答案为 $= 2\left(x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

【点睛】 本题主要考查实数范围内分解因式，解题的关键是熟练掌握完全平方公式和平方差公式.

6. 不等式 $\sqrt{3}x - 1 > 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -2 - \sqrt{3}$ ## $x < -\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 按照解一元一次不等式步骤移项求解即可，最后需要进行分母有理化.

【详解】 解：移项得： $\sqrt{3}x - 2x > 1$ ，即 $(\sqrt{3} - 2)x > 1$ ，

系数化为 1 得： $x < \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -2 - \sqrt{3}$ ，

故答案为： $x < -2 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了解不等式以及分母有理化，熟练掌握分母有理化的方法是关键.

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0，则 a 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的定义和方程的解，因为方程为一元二次方程，所以二次项系数 $a-1 \neq 0$ ，然后根据方程的一个根为 0，将 $x=0$ 代入方程可求出 a 的值.

【详解】解：∵一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根为0，

$$\therefore a-1 \neq 0 \text{ 且 } a^2-1=0,$$

$$\therefore a=-1,$$

故答案为：-1.

8. 某厂3月份的产值为50万元，5月份的产值上升到72万元，期间每个月的增长率相同. 如果设相同的增长率是 x ，那么列出方程是_____.

【答案】 $50(1+x)^2=72$

【解析】

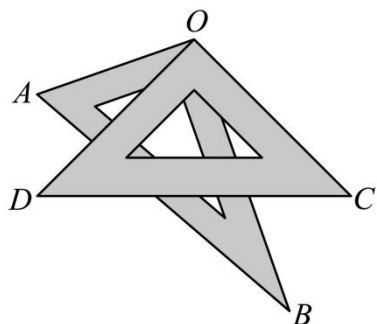
【分析】本题考查了一元二次方程的应用，设相同的增长率是 x ，根据题意列出方程即可，掌握一元二次方程的应用是解题的关键.

【详解】解：设相同的增长率是 x ，根据题意可得：

$$50(1+x)^2=72,$$

故答案为： $50(1+x)^2=72$.

9. 如图，将一副三角板叠放在一起，使直角顶点重合于点 O ，则 $\angle AOC + \angle DOB =$ _____.



【答案】 180° ##180 度

【解析】

【分析】本题主要考查了三角板中角度的计算，根据题意知 $\angle AOB = \angle DOC = 90^\circ$ ，结合 $\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC$ ， $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB$ ，即可求得 $\angle AOC + \angle DOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle DOB$.

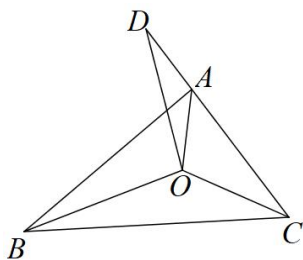
【详解】解：由题意得： $\angle AOB = \angle DOC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOC = \angle AOD + \angle DOC, \quad \angle AOB = \angle AOD + \angle DOB,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle DOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle DOB = \angle AOB + \angle DOC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

故答案为： 180° .

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=84^\circ$, 三条角平分线交于点 O , D 在 CA 的延长线上, 且 $DC=BC$, $AD=AO$, 则 $\angle BCA$ 的度数为_____.



【答案】 54°

【解析】

【分析】由角平分线的定义得 $\angle BAO = \angle CAO$, $\angle ABO = \angle CBO$, $\angle BCO = \angle DCO$, 边角边证明 $\triangle BCO \cong \triangle DCO$, 其性质求得 $\angle CBO = \angle D$; 等腰三角形的判定与性质, 三角形的内角和定理求得 $\angle BCA$ 的度数为 54° .

【详解】解: $\because AO$ 、 BO 、 CO 是 $\triangle ABC$ 三个内角的平分线,

$\therefore \angle BAO = \angle CAO$, $\angle ABO = \angle CBO$, $\angle BCO = \angle DCO$,

在 $\triangle BCO$ 和 $\triangle DCO$ 中
$$\begin{cases} OC = OC \\ \angle BCO = \angle DCO, \\ BC = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCO \cong \triangle DCO$ (SAS),

$\therefore \angle CBO = \angle D$,

又 $\because \angle BAC = 84^\circ$,

$\therefore \angle CAO = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 84^\circ = 42^\circ$,

又 $\because AD = AO$,

$\therefore \angle D = \angle AOD$,

又 $\because \angle CAO = \angle D + \angle AOD$,

$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle CAO = \frac{1}{2} \times 42^\circ = 21^\circ$,

$\therefore \angle CBO = 21^\circ$,

$\therefore \angle CBA = 42^\circ$,

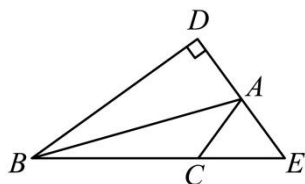
又 $\because \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$,

$\therefore \angle BCA = 180^\circ - 84^\circ - 42^\circ = 54^\circ$,

故答案为： 54° 。

【点睛】本题综合考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，角平分线的定义，三角形的内角和定理等相关知识点，重点掌握全等三角形的判定与性质。

11. 如图， $\triangle ACE$ 中， $AC = AE$ ， $BD \perp AE$ 交 EA 的延长线于点 D ，若 $\angle BAD = \angle CAE$ ， $AE = 2$ ， $AB = 7$ ，则 AD 的长为_____。

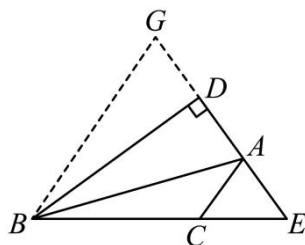


【答案】 2.5

【解析】

【分析】本题考查了垂直平分线的性质、平行的判定与性质、等角对等边以及等边对等角的知识，延长 AD 至点 G ，使得 $AD = DG$ ，连接 BG ，即有 BD 垂直平分 AG ，则有 $AB = BG$ ， $\angle BAD = \angle BGD$ ，再证明 $BG \parallel AC$ ，则有 $\angle GBE = \angle ACE$ ，根据 $AC = AE$ ，有 $\angle ACE = \angle AEC$ ，进而有 $\angle GBE = \angle AEC$ ，则 $BG = GE$ ，即可求解，构造辅助线 BG ，证明 $BG = GE$ 是解答本题的关键。

【详解】解：延长 AD 至点 G ，使得 $AD = DG$ ，连接 BG ，如图，



$\because BD \perp AG, AD = DG,$

$\therefore BD$ 垂直平分 $AG,$

$\therefore AB = BG,$

$\because AB = 7,$

$\therefore BG = 7,$

$\therefore \angle BAD = \angle BGD,$

$\because \angle BAD = \angle CAE,$

$\therefore \angle CAE = \angle BGD,$

$\therefore BG \parallel AC,$

$\therefore \angle GBE = \angle ACE,$

$\therefore AC = AE$,
 $\therefore \angle ACE = \angle AEC$,
 $\therefore \angle GBE = \angle AEC$,
 $\therefore$ 在 $\triangle GBE$ 中, 有 $BG = GE$,
 $\therefore BG = 7$,
 $\therefore GE = 7$,
 $\therefore AE = 2$, $AD = DG$, $GD + AD + AE = GE$,
 $\therefore AD = 2.5$,

故答案为: 2.5.

12. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根, 且其中一个根为另一个根的 2 倍, 则称这样的方程为“倍根方程”; 现有下列结论:

- (1) 若关于 x 的方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 是倍根方程, $a = \pm 3$;
- (2) 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 是倍根方程;
- (3) 若关于 x 的方程 $(x-2)(mx+n) = 0$, ($m \neq 0$) 是倍根方程, 则 $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$;
- (4) 若 $q = 2p$, 则关于 x 的方程 $px^2 - q = 0$ ($p \neq 0$) 是倍根方程.

其中正确的结论有_____. (写出所有正确说法的序号)

【答案】 (1) (3)

【解析】

【分析】 本题考查了新定义方程, 一元二次方程的解, 根与系数的关系, 掌握相关知识是解题的关键.

- (1) 把 $a = \pm 3$ 代入原方程, 再求出方程的解, 根据“倍根方程”的定义即可判断;
- (2) 求出方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 的解, 根据“倍根方程”的定义即可判断;
- (3) 由 $(x-2)(mx+n) = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{n}{m}$, 由方程 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是“倍根方程”, 得到 $m+n=0$, $4m+n=0$, 即可求解;
- (4) 把 $q = 2p$ 代入原方程中, 求解即可判断.

【详解】 解: (1) 当 $a = 3$ 时, $x^2 + 3x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

$\therefore x^2 + 3x + 2 = 0$ 是“倍根方程”,

当 $a = -3$ 时, $x^2 - 3x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$ 是“倍根方程”, 故 (1) 符合题意;

(2) 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$,

解得: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$,

$\therefore$ 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 不是“倍根方程”, 故 (2) 不符合题意;

(3) $(x - 2)(mx + n) = 0$,

$\therefore x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{n}{m}$,

$\therefore$ 方程 $(x - 2)(mx + n) = 0$ 是“倍根方程”,

$\therefore -\frac{n}{m} = 1$ 或 $-\frac{n}{m} = 4$,

$\therefore m + n = 0$, $4m + n = 0$,

$\therefore 4m^2 + 5mn + n^2 = (4m + n)(m + n) = 0$, 故 (3) 符合题意;

(4) $\because q = 2p$, $p \neq 0$,

$\therefore$ 方程 $px^2 - q = px^2 - 2p = 0$,

$\therefore x^2 = 2$,

$\therefore x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$,

$\therefore px^2 - q = 0$ 不是“倍根方程”, 故 (4) 不符合题意;

$\therefore$ 符合题意的有 (1) (3),

故答案为: (1) (3).

二、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

13. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{20a}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2a}}$

C. $\sqrt{a^2b^4}$

D. $\sqrt{a^2 + b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义进行判断即可.

【详解】解：A、 $20a=4 \times 5a$ ，被开方数含有能开的尽方的因数，不是最简二次根式，所以本选项不符合题意；
 B、被开方数含有分母，不是最简二次根式，所以本选项不符合题意；
 C、 $a^2b^4=(ab^2)^2$ ，被开方数含有能开的尽方的因数，不是最简二次根式，所以本选项不符合题意；
 D、 $\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式，所以本选项符合题意。

故选 D.

【点睛】本题考查了最简二次根式的定义，属于基础概念题，熟知最简二次根式的定义是关键.

14. 当 $0 < a < 1$ 时，化简 $\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} =$ ()

- A. a B. $-a$ C. $a - \frac{2}{a}$ D. $\frac{2}{a} - a$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，能够根据二次根式的被开方数中因式的特点正确化简二次根式是本题的关键.

先利用 a 的取值范围判断 $a - \frac{1}{a}$ 的正负性，根据二次根式的性质进行化简，最后根据绝对值的性质去绝对值，然后进行计算即可.

【详解】解： $\because 0 < a < 1$.

$$\therefore a - \frac{1}{a} < 0.$$

$$\therefore \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} = \left|a - \frac{1}{a}\right| - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - a - \frac{1}{a} = -a.$$

故选：B.

15. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 若 $a > b$ ，则 $a^2 > b^2$ B. 若 $a^2 > b^2$ ，则 $a > b$
 C. 如果 $a \neq b$ ，那么 $|a| \neq |b|$ D. 若 $a^2 \neq b^2$ ，则 $a \neq b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理，有理数的乘方，不等式的性质等知识，根据有理数的乘方和绝对值的意义对各选项逐一判断即可，掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解：A、如果 $a > b$ ，那么 a^2 不一定大于 b^2 ，如： $0 > -1$ ，则 $0^2 < (-1)^2$ ，故选项不符合题意；

B、如果 $a^2 > b^2$ ，那么 a 不一定大于 b ，如： $(-2)^2 > 1^2$ ，则 $-2 < 1$ ，故选项不符合题意；

C、如果 $a \neq b$ ，那么 $|a|$ 可能等于 $|b|$ ，如： $-2 \neq 2$ ，则 $|-2| = |2|$ ，故选项不符合题意；

D、如果 $a^2 \neq b^2$ ，则 $a \neq b$ ，正确，故选项符合题意；

故选：D.

16. 已知方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的两个根都是整数，则 k 的值有 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 无数个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系，可以把 -6 分解成几个因数的积的形式，然后利用根与系数的关系就可以确定 k 的值，掌握根与系数的关系是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的两个根都是整数，

$$\therefore -6 = 2 \times (-3) = 3 \times (-2) = -1 \times 6 = -6 \times 1,$$

$$\therefore -k = 2 + (-3) = -1, \text{ 则 } k = 1,$$

$$-k = 3 + (-2) = 1, \text{ 则 } k = -1,$$

$$-k = -1 + 6 = 5, \text{ 则 } k = -5,$$

$$-k = -6 + 1 = -5, \text{ 则 } k = 5,$$

$\therefore k$ 的值有 4 个，

故选：C.

17. 若二次三项式 $ax^2 - 3x - 4$ 能在实数范围内分解因式，则 a 的取值范围是 ()

A. $-\frac{9}{16} < a < 0$

B. $a > -\frac{9}{16}$

C. $a \geq -\frac{9}{16}$ 且 $a \neq 0$

D. $0 < a < \frac{9}{16}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，以及因式分解法解一元二次方程，因二次三项式 $ax^2 - 3x - 4$ 在实数范围内能分解因式，所以 $ax^2 - 3x - 4 = 0$ 有实数根，据此求解即可.

【详解】解：二次三项式 $ax^2 - 3x - 4$ 在实数范围内能分解因式，就是对应的二次方程 $ax^2 - 3x - 4 = 0$

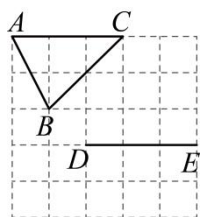
有实数根,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4a \times (-4) = 9 + 16a \geq 0 \text{ 且 } a \neq 0,$$

$$\text{解得 } a \geq -\frac{9}{16} \text{ 且 } a \neq 0.$$

故选: C.

18. 如图是 5×5 的正方形网格, 以点 D 、 E 的两个顶点作位置不同的格点三角形 (顶点在网格横线与竖线的交点上的三角形称为格点三角形), 使所作的格点三角形与 $\triangle ABC$ 全等, 这样的格点三角形最多可以画几个 ()



A. 2 个

B. 4 个

C. 6 个

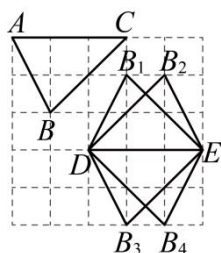
D. 8 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了网格作图, 全等三角形的判定, 勾股定理等知识, 取格点 B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , 分别连接 DB_1 , EB_1 , DB_2 , EB_2 , DB_3 , EB_3 , DB_4 , EB_4 , 由SSS可得 $\triangle ABC \cong \triangle DB_1E$, $\triangle ABC \cong \triangle DB_2E$, $\triangle ABC \cong \triangle DB_3E$, $\triangle ABC \cong \triangle DB_4E$, 即可得出答案, 掌握全等三角形的判定是解题的关键.

【详解】解: 如图, 取格点 B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , 分别连接 DB_1 , EB_1 , DB_2 , EB_2 , DB_3 , EB_3 , DB_4 , EB_4 ,



由图可知, $DE = AC$,

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$EB_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DB_1 = AB, \quad EB_1 = BC,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DB_1E$ 中,

$$\begin{cases} DE = AC \\ DB_1 = AB, \\ EB_1 = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DB_1E \text{ (SSS)},$$

同理: $\triangle ABC \cong \triangle DB_2E$, $\triangle ABC \cong \triangle DB_3E$, $\triangle ABC \cong \triangle DB_4E$,

$\therefore$ 共有 4 个与 $\triangle ABC$ 全等,

故选: B.

三、解答题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{\frac{4}{3}}.$

【答案】 $\frac{7\sqrt{3}}{3} - 2.$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 先分母有理化, 然后把二次根式化为最简二次根式后合并即可, 掌握二次根式的混合运算法则是解题的关键.

【详解】 解: $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{\frac{4}{3}}$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{4-2\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{3} - 2.$$

20. 计算: $2\sqrt{\frac{2}{3m}} \div \frac{1}{6}\sqrt{6m} \cdot \sqrt{8m^3}$

【答案】 $8\sqrt{2m}$

【解析】

【分析】 先进行分母有理化，然后进行二次根式的乘除运算即可.

【详解】 解: $= 2\sqrt{\frac{2}{3m}} \cdot \frac{6}{\sqrt{6m}} \cdot 2m\sqrt{2m}$
 $= 8\sqrt{2m}$

故答案为 $8\sqrt{2m}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的混合运算，熟练掌握运算顺序与运算法则是解题的关键.

21. 用配方法解方程: $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【解析】

【分析】 先将二次项系数化为 1，然后根据配方法，可即答案.

【详解】 解: $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

故答案为 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用. 选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数.

22. 解方程. $x - \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

【答案】 $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

【解析】

【分析】根据配方法即可求出答案.

【详解】整理得: $x^2 - 2x = 2$, $\therefore x^2 - 2x + 1 = 3$, $\therefore (x-1)^2 = 3$, $\therefore x-1 = \sqrt{3}$, $\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$, $\therefore x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程, 解题的关键是熟练运用一元二次方程的解法, 本题属于基础题型.

23. 解方程: $(4x-1)^2 - 10(4x-1) - 24 = 0$

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{13}{4}$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程.

【详解】解: $(4x-1)^2 - 10(4x-1) - 24 = 0$

因式分解得, $(4x-1+2)(4x-1-12) = 0$,

即 $(4x+1)(4x-13) = 0$,

解得: $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{13}{4}$.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的解法, 熟练掌握因式分解法解一元二次方程是解题的关键.

24. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+3}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-3}$, 求代数式 $x^2 + 2xy + y^2$ 的值.

【答案】 $\frac{8}{49}$

【解析】

【分析】先利用分母有理化化简 x 、 y 的值, 然后代入完全平方, 即可得到答案.

【详解】解: $\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}+3} = -\frac{\sqrt{2}-3}{7}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-3} = -\frac{\sqrt{2}+3}{7}$,

$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}-3}{7} - \frac{\sqrt{2}+3}{7}\right)^2$

$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{7}\right)^2$

$= \frac{8}{49}$;

【点睛】本题考查了二次根式的化简, 以及求代数式的值, 解题的关键是熟练利用分母有理化进行化简.

四、简答题 (本大题共 4 题, 满分 34 分)

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$.

(1) 试说明无论 k 取何值时, 这个方程一定有实数根;

(2) 若等腰 ABC 的一边长 $a = 1$, 另两边长 b 、 c 恰好是这个方程的两个根, 求 ABC 的周长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 5

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式, 解一元二次方程, 等腰三角形的性质.

(1) 根据一元二次方程根的判别式, 得到 Δ 是非负数即可.

(2) 分 $b = c$, $b = a$ 两种情况讨论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \Delta = (k+2)^2 - 8k = (k-2)^2 \geq 0$,

$\therefore$ 无论 k 取何值, 方程总有实根;

【小问 2 详解】

解: ①当 $b = c$ 时, 则 $\Delta = 0$, 即 $(k-2)^2 = 0$,

$\therefore k = 2$,

方程可化为 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$\therefore x_1 = x_2 = 2$,

而 $b = c = 2$,

$\therefore C_{\triangle ABC} = 5$;

②当 $b = a = 1$,

$\therefore x^2 - (k+2)x + 2k = 0$.

$\therefore (x-2)(x-k) = 0$,

$\therefore x = 2$ 或 $x = k$,

$\therefore$ 另两边 b 、 c 恰好是这个方程的两个根,

$\therefore k = 1$,

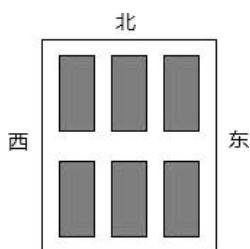
$\therefore c = 2$,

$\therefore a + b = c$,

∴ 不满足三角形三边的关系，舍去；

综上所述， $\triangle ABC$ 的周长为 5.

26. 如图是中北居民小区某一休闲场所的平面示意图. 图中阴影部分是草坪和健身器材安装区, 空白部分是用做散步的道路. 东西方向的一条主干道较宽, 其余道路的宽度相等, 主干道的宽度是其余道路的宽度的 2 倍. 这块休闲场所南北长 $18m$, 东西宽 $16m$. 已知这休闲场地中草坪和健身器材安装区的面积为 $168m^2$, 请问主干道的宽度为多少米?



【答案】主干道的宽度为 2 米.

【解析】

【分析】把图中的阴影部分进行平移后, 可得到一个长方形, 所以本题的等量关系为: 长 $\times$ 宽=168.

【详解】设主干道的宽度为 $2xm$, 则其余道路宽为 xm ,

依题意得: $(16-4x)(18-4x)=168$,

整理, 得 $x_1=1, x_2=\frac{15}{2}$.

当 $x_2=\frac{15}{2}$ 时, $16-4x<0$, 不合题意, 舍去.

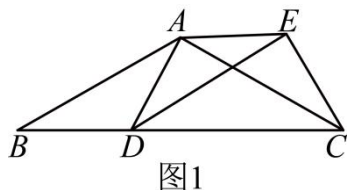
当 $x=1$ 米时, $2x=2$ 米.

答: 主干道的宽度为 2 米.

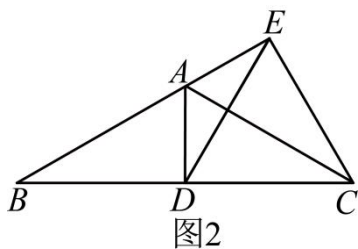
【点睛】考查一元二次方程的应用, 解题的关键在于把图中的阴影部分进行平移得到一个长方形, 准确找到其长与宽, 列出方程.

27. 如图 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是顶角为 120° 的等腰三角形, 其中 $\angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$, 点 D 在 BC 上.

(1) 求证: $BD = EC$;



(2) 求证: 如图 2, 当点 E 在 BA 的延长线上, $\triangle EDC$ 为等边三角形.



【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定与性质，等边三角形的判定；

(1) 证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) 即可得到 $BD = EC$ ；

(2) 由 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) 得到 $\angle B = \angle ACE = 30^\circ$ ，当点 E 在 BA 的延长线上时

$\angle DAC = 60^\circ = \angle EAC$ ，即可证明 $\triangle CAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，得到 $CD = CE$ ， $\angle ACE = \angle ACD = 30^\circ$ ，根据一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形判定即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是顶角为 120° 的等腰三角形，

$$\therefore AD = AE, AB = AC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = EC;$$

【小问 2 详解】

证明：当点 E 在 BA 的延长线上时 $\angle EAC = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle DAE - \angle EAC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle EAC,$$

$$\therefore AD = AE, AC = AC,$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD = CE, \angle ACE = \angle ACD,$$

$$\therefore AB = AC, \angle BAC = \angle DAE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle EDC$ 为等边三角形.

28. 已知等边三角形 ABC , 点 D 是边 AC 上任意一点, 延长 BC 至 E , 使 $CE = AD$.

(1) 如图 1, 点 D 是 AC 中点, 求证: $DB = DE$;

(2) 如图 2, 点 D 不是 AC 中点, 求证: $DB = DE$;

(3) 如图 3, 点 D 不是 AC 中点, 点 F 是 BD 的中点, 连接 AE , AF , 求证: $AE = 2AF$.

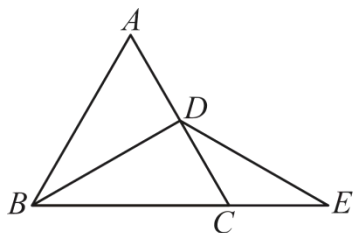


图1

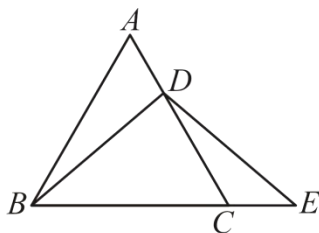


图2

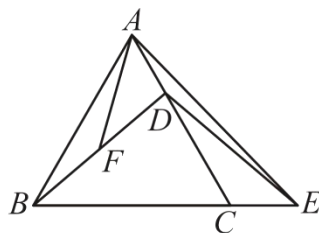


图3

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析; (3) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形的性质得到 BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$, 根据等腰三角形的性质、等腰三角形的判定定理证明;

(2) 过 D 作 $EF \parallel DG$ 交 AB , 交 BC 于 G , 证明 $\triangle BDC \cong \triangle EDG$, 根据全等三角形的性质证明结论;

(3) 延长 AF 至 H , 使 $FH = AF$, 连接 DH , 证明 $\triangle ABF \cong \triangle HDF$, 得到 $AB = HD$, $\angle ABF = \angle HDF$, 证明 $\triangle ADH \cong \triangle ECA$, 得到 $AE = AH$, 证明结论.

【详解】证明: (1) $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 的中点,

$\therefore BD$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$$

$\therefore CD = CE$,

$\therefore \angle CDE = \angle CED$,

$\therefore \angle CDE + \angle CED = \angle ACB$,

$$\therefore \angle CDE = \angle CED = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ$$

$\therefore \angle CBD = \angle CED = 30^\circ$,

$\therefore BD = DE$;

(2) 过 D 作 $EF \parallel DG$ 交 AB , 交 BC 于 G

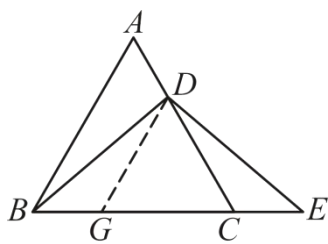


图2

$\therefore \angle DGC = \angle ABC = 60^\circ$, 又 $\angle DCG = 60^\circ$,

$\therefore \triangle DGC$ 为等边三角形,

$\therefore DG = GC = CD$,

$\therefore BC - GC = AC - AD$, 即 $AD = BG$,

$\therefore AD = CE$,

$\therefore BG = CE$,

$\therefore BC = GE$,

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle EDG$ 中,

$$\begin{cases} DC = DG \\ \angle BCD = \angle EGD = 60^\circ \\ BC = EG \end{cases},$$

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle EDG$ (SAS)

$\therefore BD = DE$;

(3) 延长 AF 至 H , 使 $FH = AF$, 连接 DH ,

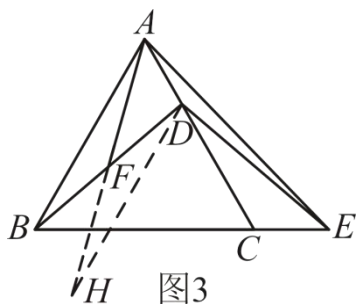


图3

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle HDF$ 中,

$$\begin{cases} AF = HF \\ \angle AFB = \angle HFD \\ BF = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle HDF$ (SAS)

$\therefore AB = HD$, $\angle ABF = \angle HDF$,

$\therefore AC = HD$, $AB \parallel DH$,

$$\therefore \angle ADH = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ,$$

在 $\triangle ADH$ 和 $\triangle ECA$ 中,

$$\begin{cases} AD = EC \\ \angle ADH = \angle ECA = 120^\circ \\ HD = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADH \cong \triangle ECA \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AE = AH,$$

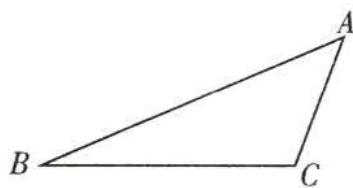
$$\therefore AH = 2AF,$$

$$\therefore AE = 2AF.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

五、附加题：(本大题共 10 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分)

29 如图，已知 $\triangle ABC$.



(1) 请你在 BC 边上分别取两点 D 、 E (BC 的中点 除外)，连接 AD 、 AE ，写出使此图中只存在两对面积相等的三角形的相应条件，并表示出面积相等的三角形；

(2) 请你根据使 (1) 成立的相应条件，证明 $AB + AC > AD + AE$.

【答案】 (1) 详见解析；(2) 详见解析.

【解析】

【分析】 (1) 根据图中只存在两对面积相等的三角形，可得出在 BC 上选取的点不能使三等分点，只能是 $BD = CE \neq DE$ ，这样的话就存在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 面积相等，两个三角形再加上一个公共的三角形也就是 $\triangle ADE$ 就可以得到 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 面积相等，即满足条件.

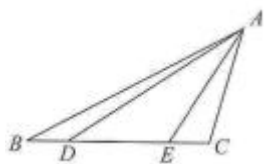
(2) 分别过点 D 、 B 作 CA 、 EA 的平行线，两线相交于 F 点， DF 与 AB 交于点 G .

可得到 $\angle ACE = \angle FDB$ ， $\angle AEC = \angle FBD$ ，易证 $\triangle AEC \cong \triangle FBD$ ，可得到 $AC = FD$ ， $AE = FB$ ；在 $\triangle AGD$ 中根据三角形三边关系可得 $AG + DG > AD$ ，

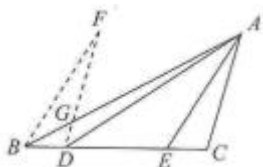
在 $\triangle BFG$ 中根据三边关系可得， $BG + FG > FB$ ，两个式子合并可得 $AB + FD > AD + FB$ ，即可得到 $AB + AC > AD + AE$.

【详解】 解：(1) 如图所示，当 $BD = CE \neq DE$ 时，由于高相等，因此 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ ， $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$

的面积相等.



(2)方法 1 如图所示, 分别过点 D 点 B 作 CA, EA 的平行线, 两线交于点 F, DF 与 AB 交于点 G, 则 $\angle ACE = \angle FDB$, $\angle AEC = \angle FBD$.



在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle FBD$ 中, $CE = BD$, $\angle ACE = \angle FDB$, $\angle AEC = \angle FBD$.

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle FBD$.

$\therefore AC = FD$, $AE = FB$.

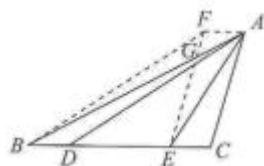
在 $\triangle AGD$ 中, $AG + DG > AD$,

在 $\triangle BFG$ 中, $BG + FG > FB$,

$\therefore AG + DG + BG + FG > AD + FB$, 即 $AB + FD > AD + FB$.

$\therefore AB + AC > AD + AE$.

方法 2 如图所示, 分别过点 A、点 E 作 CB, CA 的平行线, 两线交于点 F, EF 与 AB 交于点 G, 连接 BF, 则四边形 EFAC 是平行四边形 $FE = AC$, $AF = CE$.



$\because BD = CE$,

$\therefore BD = AF$.

$\therefore$ 四边形 FBDA 是平行四边形.

$\therefore FB = AD$.

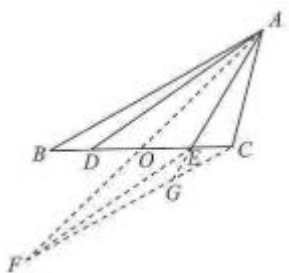
在 $\triangle AGE$ 中, $AG + EG > AE$,

在 $\triangle BFG$ 中, $BG + FG > FB$,

$\therefore AG + EG + BG + FG > AE + FB$.

$\therefore AB + AC > AD + AE$.

方法3 如图所示, 取 DE 的中点 O , 连接 AO 并延长到点 F , 使得 $FO = AO$, 连接 EF , CF , 延长 AE 交 CF 于点 G .



在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle FEO$ 中, $\because \angle AOD = \angle FOE$, $DO = EO$

$\therefore \triangle ADO \cong \triangle FEO$.

$\therefore AD = FE$.

又 $\because BD = CE$, $DO = EO$,

$\therefore BO = CO$.

同理可证 $\triangle ABO \cong \triangle FCO$.



在 $\triangle ACG$ 中, $AC + OG > AG$, 即 $AC + CG > AE + EG$.

在 $\triangle EFG$ 中, $EG + FG > EF$,

$\therefore AC + CG + EG + FG > AE + EG + EF$, 即 $AC + CF > AE + EF$.

$\therefore AB + AC > AD + AE$.

【点睛】 本题考查了 (1) 两个三角形等底同高面积相等的情况, 如果在一个较大的三角形一边上选取两条相等的线段, 再与另一个顶点组成的两个三角形面积一定相等; (2) 通过作已知直线的平行线构造全等三角形, 将要证明的线段间的关系进行等量代换, 可证出结论.