

张江集团学校一学期初二数学期中试卷

一、填空题

1. 如果 $\sqrt{(-2a^2-1)(a-b)}$ 在实数范围内有意义, 则 a 、 b 的大小关系为_____.

【答案】 $a \leq b$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件, 熟练掌握相关的知识点是解题的关键. 直接利用二次根式有意义的条件分析得出答案.

【详解】 解: $\sqrt{(-2a^2-1)(a-b)}$ 在实数范围内有意义,

$$\text{则 } (-2a^2-1)(a-b) \geq 0,$$

$$\because -2a^2-1 \text{ 总小于 } 0,$$

$$\therefore a-b \leq 0,$$

$$\therefore a \leq b,$$

故答案为: $a \leq b$.

2. 不等式 $(2\sqrt{2}-3)x > 2$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -4\sqrt{2}-6$.

【解析】

【分析】 首先判断出 $2\sqrt{2}-3 < 0$, 再根据解一元一次不等式的步骤得 $x < \frac{2}{2\sqrt{2}-3}$, 最后进行分母有理化即可得到结果.

【详解】 解: $\because 2\sqrt{2}-3 < 0$,

解不等式 $(2\sqrt{2}-3)x > 2$ 得,

$$x < \frac{2}{2\sqrt{2}-3},$$

$$\therefore x < -4\sqrt{2}-6,$$

故答案为: $x < -4\sqrt{2}-6$.

【点睛】 此题主要考查了二次根式的应用, 注意要掌握分母有理化的方法.

3. 若关于 x 的方程 $2x^2 + 2kx + k + 4 = 0$ 有两个相等的实根, 则 k 的值为_____.

【答案】 4 或 -2 或 -2 或 4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 根的判别式. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 由方程 $2x^2 + 2kx + k + 4 = 0$ 有两个相等的实根, 得 $\Delta = (2k)^2 - 4 \times 2 \times (k + 4) = 0$, 解 k 的方程即可.

【详解】 解: $\because$ 方程 $2x^2 + 2kx + k + 4 = 0$ 有两个相等的实根,

$$\therefore \Delta = (2k)^2 - 4 \times 2 \times (k + 4) = 0,$$

$$\text{整理得: } k^2 - 2k - 8 = 0,$$

$$\text{解得 } k = 4 \text{ 或 } -2.$$

故答案为: 4 或 -2.

4. 如果 $x = 1$ 是一元二次方程 $(m^2 - 5m + 6)x^2 + (2m + 1)x - 5 = 0$ 的一个根, 那么 m 的值为

_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 先将 $x = 1$ 代入原方程, 然后解一个关于 m 的一元二次方程求得 m 的值, 最后再根据一元二次方程的定义验证 m 即可.

【详解】 解: $\because x = 1$ 是 $(m^2 - 5m + 6)x^2 + (2m + 1)x - 5 = 0$ 的一个根,

$$\therefore \text{将 } x = 1 \text{ 代入得: } (m^2 - 5m + 6) + (2m + 1) - 5 = 0,$$

$$\text{即 } (m - 1)(m - 2) = 0$$

$$\text{解得: } m_1 = 1, m_2 = 2$$

$$\therefore (m^2 - 5m + 6)x^2 + (2m + 1)x - 5 = 0 \text{ 是一元二次方程}$$

$$\therefore m^2 - 5m + 6 \neq 0, \text{ 即 } m \neq 2 \text{ 且 } m \neq 3$$

$$\therefore m = 1.$$

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义和解, 理解一元二次方程解得意义和一元二次方程的定义是解答本题的关键, 一元二次方程二次项系数不为 0 是本题的易错点.

5. 若关于 x 的方程 $(k+1)x^2 + 6 = x$ 有实数根, 则最大的整数 k 的取值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式及一元一次方程的解, 对学生的思维缜密性有一定要求, 体现了分类讨论的数学思想. $k+1=0$ 时为一元一次方程, 有实根; $k+1 \neq 0$ 时为一元二次方程, 根据判别式的意义得到

$\Delta = (-1)^2 - 4(k+1) \times 6 \geq 0$, 然后解不等式即可.

【详解】 解: 当 $k+1=0$, 即 $k=-1$ 时, 原方程为 $6=x$, 方程有实根,

当 $k+1 \neq 0$, 即 $k \neq -1$ 时,

将 $(k+1)x^2 + 6 = x$ 变形为: $(k+1)x^2 - x + 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(k+1) \times 6 \geq 0$,

解得 $k \leq -\frac{23}{24}$.

综上所述, k 的取值范围为 $k \leq -\frac{23}{24}$,

$\therefore$ 最大的整数 k 的取值为 -1 ,

故答案为: -1 .

6. 函数 $f(x) = \frac{x}{2x - \sqrt{3-x}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \leq 3$ 且 $x \neq \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的自变量取值范围, 分式有意义的条件和二次根式有意义的条件, 解题的关键是掌握相关知识. 根据二次根式有意义的条件可得 $x \leq 3$, 根据分式有意义的条件可得 $2x - \sqrt{3-x} \neq 0$, 假设

$2x - \sqrt{3-x} = 0$, 两边同时平方并整理后可得: $4x^2 + x - 3 = 0$, 求出 x 的值, 即可求解.

【详解】 解: $\because \sqrt{3-x} \geq 0$,

$\therefore 3-x \geq 0$,

解得: $x \leq 3$,

$\because$ 函数为 $f(x) = \frac{x}{2x - \sqrt{3-x}}$,

$\therefore 2x - \sqrt{3-x} \neq 0$,

假设 $2x - \sqrt{3-x} = 0$ ，即 $2x = \sqrt{3-x}$ ，

两边同时平方并整理后可得： $4x^2 + x - 3 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 49,$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 4} = \frac{-1 \pm 7}{8},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = -1,$$

当 $x = -1$ 时， $2x = 2 \times (-1) = -2$ ，而 $\sqrt{3-x} = \sqrt{3-(-1)} = 2$ ，

$\therefore x = -1$ 是增根，舍去，

$$\therefore 2x - \sqrt{3-x} = 0 \text{ 的解为 } x = \frac{3}{4},$$

$$\text{则 } 2x - \sqrt{3-x} \neq 0 \text{ 时, } x \neq \frac{3}{4},$$

综上所述，函数 $f(x) = \frac{x}{2x - \sqrt{3-x}}$ 的定义域为 $x \leq 3$ 且 $x \neq \frac{3}{4}$ ，

故答案为： $x \leq 3$ 且 $x \neq \frac{3}{4}$ 。

7. 若 $f(x) = (n^2 + 2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数，则 n 的值为_____。

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的定义及解一元二次方程，熟练掌握反比例函数的解析式是解题的关键。根据反比例函数的定义可得 $n^2+n-1=-1$ 且 $n^2+2n \neq 0$ ，求解即可。

【详解】 解： $\because$ 函数 $f(x) = (n^2 + 2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数，

$$\therefore n^2+n-1=-1 \text{ 且 } n^2+2n \neq 0,$$

解得 $n = -1$ ，

故答案为： -1。

8. 若 $y = \frac{3-2m}{x}$ 图像的一支位于第三象限，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图像与性质，熟练掌握反比例函数的性质是本题的关键。由反比例函数

的图像的一支位于第三象限, 可得 $3-2m>0$, 即可求解.

【详解】解: $\because y = \frac{3-2m}{x}$ 图像的一支位于第三象限,

$$\therefore 3-2m>0,$$

$$\text{解得: } m < \frac{3}{2},$$

$$\text{故答案为: } m < \frac{3}{2}.$$

9. 在正比例函数 $y = -3mx$ 中, 函数 y 的值随 x 值的增大而增大, 则 $P(m, 5)$ 在第__象限.

【答案】二

【解析】

【详解】 $\because$ 正比例函数 $y = -3mx$ 中, 函数 y 的值随 x 值的增大而增大,

$$\therefore -3m > 0, \text{ 解得 } m < 0,$$

$\therefore$ 点 $P(m, 5)$ 在第二象限.

故答案为二

10. 在函数 $y = \frac{x}{k} (k < 0)$ 的图像上有点 $A(1, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(-2, y_3)$ 三个点, 那么他们纵坐标的大小关系为_____.

【答案】 $y_1 < y_3 < y_2$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图像与性质, 反比例函数图像上点的坐标特征, 解题的关键是掌握反比例函数的图像与性质. 根据 $k < 0$ 可知, 反比例函数的图像经过第二、四象限, 且在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大, 即可求解.

【详解】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 反比例函数的图像经过第二、四象限, 且在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$$\because A(1, y_1), B(-1, y_2), C(-2, y_3),$$

$\therefore B、C$ 在第二象限, A 在第四象限,

$$\therefore y_1 < 0, y_2 > 0, y_3 > 0,$$

$$\because -2 < -1,$$

$$\therefore y_3 < y_2,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2,$$

故答案为: $y_1 < y_3 < y_2$.

11. 已知直线 $y_1 = (m+2n)x$ 与双曲线 $y_2 = \frac{3n-m}{x}$ 交于点 $(\frac{1}{2}, 2)$, 则当 $x > \frac{1}{2}$ 时他们的纵坐标的大小关系为_____.

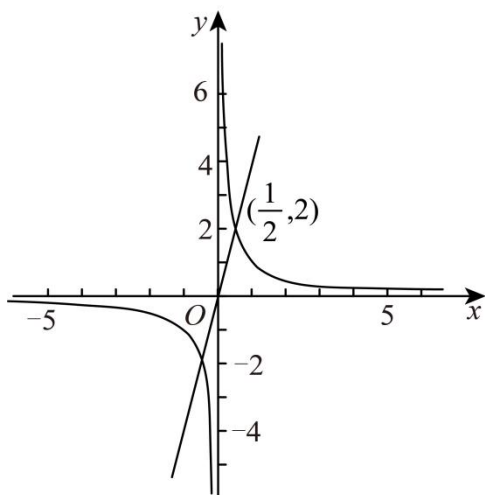
【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题, 根据直线 $y_1 = (m+2n)x$ 与双曲线 $y_2 = \frac{3n-m}{x}$ 的交点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 在第一象限可画出大致的函数图象, 利用数形结合的数学思想即可求解.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y_1 = (m+2n)x$ 与双曲线 $y_2 = \frac{3n-m}{x}$ 的交点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 在第一象限,

$\therefore$ 画出函数图象草图如下:



可知: 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y_1 > y_2$,

故答案为: $y_1 > y_2$

12. 若 $y-2$ 与 $2x+3$ 成正比例, 且比例系数是 $\frac{2}{3}$, 则 y 与 x 的函数关系式为_____.

【答案】 $y = \frac{4}{3}x + 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义, 掌握正比例函数的定义是解题的关键. 根据正比例函数的定义: 形如 $y = kx$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$) 叫正比例函数, 列出表达式, 化简即可得出答案.

【详解】解：∵ $y-2$ 与 $2x+3$ 成正比例，且比例系数是 $\frac{2}{3}$ ，

$$\therefore y-2 = \frac{2}{3}(2x+3),$$

整理可得： $y = \frac{4}{3}x + 4$ ，

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \frac{4}{3}x + 4,$$

故答案为： $y = \frac{4}{3}x + 4$.

13. 已知 $\sqrt{14}$ 的小数部分是 b ，那么 $b^4 + 12b^3 + 37b^2 + 6b - 20$ 的值为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了实数的整数和小数部分相关问题和利用完全平方公式的计算，熟练掌握完全平方公式的应用是解题的关键，首先根据题意得到 $\sqrt{14} = 3 + b$ 的值，从而得到 $b^2 + 6b = 5$ ，再将代数式利用完全平方公式化简后得到 $(b^2 + 6b)^2 + (b^2 + 6b) - 20$ ，代入即可得到答案.

【详解】解：∵ $9 < 14 < 16$

$$\therefore 3 < \sqrt{14} < 4$$

$$\therefore \sqrt{14} \text{ 的整数部分为 } 3,$$

$$\therefore \sqrt{14} = 3 + b,$$

$$\therefore \text{两边平方得: } 14 = 9 + 6b + b^2,$$

$$\therefore b^2 + 6b = 5,$$

$$\therefore b^4 + 12b^3 + 37b^2 + 6b - 20$$

$$= (b^4 + 2 \cdot 6b^3 + 36b^2) + (b^2 + 6b) - 20$$

$$= (b^2 + 6b)^2 + (b^2 + 6b) - 20$$

$$= 5^2 + 5 - 20$$

$$= 10,$$

故答案为： 10 .

14. 若 a 、 b 是两个不相等的素数，且 $a^2 - 13a + m = 0, b^2 - 13b + m = 0$ ，那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{125}{22} \div 5 \frac{15}{22}$

【解析】

【分析】由题意得 a 、 b 是方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两个根，则 $a + b = 13$, $ab = m$ ，由 a 、 b 是两个不相等的素数确定出 $a = 2, b = 11$ 或 $a = 11, b = 2$ ，继而代入求解即可。

【详解】解：由题意得 a 、 b 是方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两个根，

$$\therefore a + b = 13, ab = m,$$

$\therefore a$ 、 b 是两个不相等的素数，

$$\therefore a = 2, b = 11 \text{ 或 } a = 11, b = 2,$$

$$\therefore ab = 22$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{169 - 2 \times 22}{22} = \frac{125}{22},$$

故答案为： $\frac{125}{22}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解，根与系数的关系，素数的概念，分式的运算，熟练掌握知识点是解题的关键。

15. 设 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个有理根，已知 $2x_1 - x_2 + \sqrt{x_1 + 3x_2} = 1 + \sqrt{11}$ ，那么 $p + q$ 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解的定义，根与系数的关系，熟练掌握相关计算公式是解题的关键；

若一元二次方程 (a 、 b 、 c 为常数) 的两根为 x_1 、 x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，根据相关计算公式求解即可。

【详解】解： $\because x_1$ 、 x_2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个有理根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

$$\because 2x_1 - x_2 + \sqrt{x_1 + 3x_2} = 1 + \sqrt{11},$$

$$\therefore 2x_1 - x_2 = 1, \quad x_1 + 3x_2 = 11,$$

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$,

$\therefore p = -5$, $q = 6$,

$\therefore p + q = 1$,

故答案为: 1

16. 若方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - b = 0$ 至少有一个相等的实数根, 那么实数 b 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根, 以及根的判别式, 解题的关键是掌握相关知识. 设相等的实数根为 m , 则 $m^2 + bm + 1 = 0$ ①, $m^2 - m - b = 0$ ②, 两式相减得: $(b+1)(m+1) = 0$, 得到 $b = -1$ 或 $m = -1$, 再根据题意和根的判别式综合分析即可求解.

【详解】 解: $\because$ 方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - b = 0$ 至少有一个相等的实数根,

$\therefore$ 设相等的实数根为 m ,

则 $m^2 + bm + 1 = 0$ ①, $m^2 - m - b = 0$ ②,

①-② 得: $(b+1)m + (b+1) = 0$, 即 $(b+1)(m+1) = 0$,

解得: $b = -1$ 或 $m = -1$,

当 $b = -1$ 时, 方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 为 $x^2 - x + 1 = 0$,

此时 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, 方程无解;

当 $m = -1$ 时, 方程 $x^2 - x - b = 0$ 为 $(-1)^2 - (-1) - b = 0$,

解得: $b = 2$,

此时方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 为 $x^2 + 2x + 1 = 0$,

解得: $x_1 = x_2 = -1$, 符合题意,

$\therefore b = 2$,

故答案为: 2.

17. 关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根均为正整数, 且 $p + q = 2016$, 则这个方程的两根之和为_____.

【答案】 2020

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程根与系数的关系，根据根与系数的关系，可以写出两根和与两根积，再由两根是正整数及 $p+q=2016$ ，利用提公因式法因式分解可以确定方程的两个根，进而可得两根之和.

【详解】 解：设 x_1, x_2 是方程的两个根，则① $x_1+x_2=-p$ ，② $x_1x_2=q$ ，

由②-①得： $p+q=x_1x_2-x_1-x_2$ ，

$$\therefore p+q=2016,$$

$$\therefore x_1x_2-x_1-x_2=2016,$$

$$\therefore x_1x_2-x_1-x_2+1=2016+1,$$

$$\therefore x_1(x_2-1)-(x_2-1)=2017,$$

$$\text{即 } (x_1-1)(x_2-1)=2017,$$

$\therefore$ 两根均为正整数，

$$\therefore x_1-1=1, x_2-1=2017 \text{ 或 } x_1-1=2017, x_2-1=1,$$

$$\therefore \text{方程的两个根是： } x_1=2, x_2=2018 \text{ 或 } x_1=2018, x_2=2,$$

$$\therefore \text{两根之和为 } x_1+x_2=2020.$$

故答案为：2020.

18. 在直角坐标系中，已知点 $A(1,2)$ ， $B(2,5)$ ， $C(6,1)$ ，若反比例函数 $f(x)=\frac{k}{x}(k>0)$ 在第一象限内的图像与三角形 ABC 有交点，那么 k 的取值范围为_____.

【答案】 $2 \leq k \leq \frac{49}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，两函数交点坐标的求法，有一定难度. 注意自变量的取值范围.

根据反比例函数图象上点的坐标特征，反比例函数和三角形有交点的临界条件分别是交点为 A 、与线段 BC 有交点，由此求解即可.

【详解】 解：反比例函数和三角形有交点的第一个临界点是交点为 A .

$$\therefore \text{过点 } A(1,2) \text{ 的反比例函数解析式为 } y=\frac{2}{x},$$

$$\therefore k \geq 2;$$

随着 k 值的增大, 反比例函数的图象必须和线段 BC 有交点才能满足题意,

经过 $B(2,5)$, $C(6,1)$ 的直线解析式为 $y = -x + 7$,

$$\text{由} \begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{k}{x} \end{cases},$$

$$\text{得: } x^2 - 7x + k = 0.$$

根据 $\Delta \geq 0$,

$$\text{得: } k \leq \frac{49}{4}.$$

$$\text{综上所述: } 2 \leq k \leq \frac{49}{4}.$$

$$\text{故答案为: } 2 \leq k \leq \frac{49}{4}.$$

二、选择题

19. 圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中, 下面叙述正确的是 ()

A. π, r 是变量, S 是 πr 的函数

B. π, r 是变量, S 是 r 的函数

C. π 是常量, S 与 r^2 成正比例

D. π 是常量, S 与 r 成正比例

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查函数的基本概念, 熟练掌握常量与变量及函数是解题的关键; 因此此题可根据题意结合函数的基本概念进行排除选项即可.

【详解】 解: 由圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中, 可知: π 是常量, S 与 r^2 成正比例;

故选 C.

20. 以关于 x 的方程 $x^2 - px + q = 0$ ($p^2 > 4q$) 的两根的相反数为根的一元二次方程为 ()

$$\text{A. } x^2 + px + q = 0$$

$$\text{B. } x^2 - px + q = 0$$

$$\text{C. } x^2 + px - q = 0$$

$$\text{D. } x^2 - px - q = 0$$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解, 一元二次方程根与系数的关系, 熟练掌握相关计算公式是解题的关键;

以 x_1, x_2 为根的一元二次方程的形式为 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$, 根据这个公式代入即可求解;

【详解】解: $x^2 - px + q = 0 (p^2 > 4q)$,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

关于 x 的方程 $x^2 - px + q = 0 (p^2 > 4q)$ 的两根的相反数为根,

则应满足 $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = q$,

A、 $x^2 + px + q = 0$ 中, $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = q$, 符合题意;

B、 $x^2 - px + q = 0$ 中, $x_1 + x_2 = p, x_1x_2 = q$, 不符合题意;

C、 $x^2 + px - q = 0$ 中, $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = -q$, 不符合题意;

D、 $x^2 - px - q = 0$ 中, $x_1 + x_2 = p, x_1x_2 = -q$, 不符合题意;

故选: A

21. 下列选项中, 两个函数表示同一个函数的是 ()

A. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+2}, g(x) = x+2$

B. $f(x) = \sqrt{x}, g(t) = \sqrt{t}$

C. $f(x) = x^2, g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$

D. $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同一个函数的概念, 熟练掌握同一个函数的概念是解题的关键. 判断两个函数是否为同一个函数的方法: ①判断两个函数的 x 的取值范围是否相同; ②判断两个函数的对应法则是否相同, 由此可求解.

【详解】解: A. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+2}$ 中 x 取值为 $x \neq -2$, $g(x) = x+2$ 中 x 取值为全体实数,

$\therefore$ 本选项两个函数不是同一个函数;

B. $f(x) = \sqrt{x}$ 与 $g(t) = \sqrt{t}$ 中 x 取值为 $x \geq 0$, 对应法则也相同,

$\therefore$ 本选项两个函数是同一个函数;

C. $f(x) = x^2$ 中 x 取值为全体实数, $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$ 中 x 取值为 $x \neq 0$,

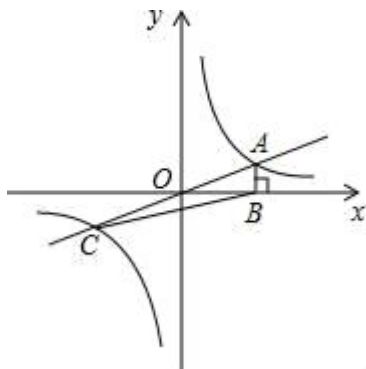
∴ 本选项两个函数不是同一个函数;

D. $f(x) = (\sqrt{x})^2$ 中 x 取值为 $x \geq 0$, $g(x) = x$ 中 x 取值为全体实数,

∴ 本选项两个函数不是同一个函数,

故选: B.

22. 如图, 正比例函数 $y=kx$ ($k>0$), 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象相交于 A, C 两点, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B , 连接 BC , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 ()



A. $S=1$

B. $S=2$

C. $S=k$

D. $S=k^2$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据正比例函数 $y=kx$ ($k>0$) 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象均关于原点对称, 可求出 A, C 两点坐标的关系, 设出两点坐标再根据三角形的面积公式即可解答.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y=kx$ ($k>0$) 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象均关于原点对称,

$\therefore$ 设 A 点坐标为 $(x, \frac{1}{x})$, 则 C 点坐标为 $(-x, -\frac{1}{x})$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot |-\frac{1}{x}| = \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

故选 A.

【点睛】 本题考查的是反比例函数与正比例函数图象的特点, 解答此题的关键是找出 A, C 两点坐标的关系, 设出两点坐标即可.

三、计算题

23. $\sqrt{12} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \sqrt{0.27} + \sqrt{\frac{1}{3}}$.

【答案】 $\frac{7}{10}\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 二次根式的加减运算，先化为最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

【详解】 解： $\sqrt{12} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \sqrt{0.27} + \sqrt{\frac{1}{3}}$
 $= 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{10}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $= \frac{7}{10}\sqrt{3}.$

【点睛】 本题考查了二次根式的加减，熟练掌握二次根式的运算是解题的关键.

24. 计算： $\sqrt{18} - \frac{1}{2} \div 2^{-2} \div \frac{1}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2}-1)$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算、二次根式的混合运算及负指数幂：熟练掌握实数的混合运算、二次根式的混合运算及负指数幂是解决问题的关键. 根据实数的混合运算、二次根式的混合运算及负指数幂运算法则运算即可.

【详解】 解： 原式 $= 3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \times (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)$
 $= 3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)$
 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} + 1$
 $= -1.$

25. 化简： $\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab}}$.

【答案】 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

【解析】

【分析】 此题主要考查了二次根式的混合运算，利用二次根式的性质，进而分解因式，进而化简即可.

【详解】解： $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(a-b)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$

26. 解方程： $4x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0.$

【答案】 $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握公式法解一元二次方程的方法是解题的关键；根据公式法解一元二次方程，即可求解.

【详解】解： $4x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

$a = 4, b = \sqrt{2}, c = -1,$

$\therefore b^2 - 4ac = 2 + 16 = 18 > 0,$

$\therefore x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{8} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{8},$

$\therefore x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

27. 解方程： $(x-1)^2 = 2(x-1) + 15.$

【答案】 $x_1 = 6, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查利用因式分解法求解一元二次方程，熟练掌握因式分解法是解题关键. 利用因式分解法解一元二次方程即可求解；

【详解】解： $(x-1)^2 = 2(x-1) + 15$

$x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 + 15,$

$x^2 - 4x - 12 = 0,$

$(x-6)(x+2) = 0,$

$x_1 = 6, x_2 = -2$

28. 解方程： $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab(a^2 - b^2) = 0.$

【答案】 $x_1 = a^2 - ab$, $x_2 = b^2 + ab$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，解题的关键是掌握因式分解法解一元二次方程，利用十字相乘法将方程因式分解，即可求解.

【详解】 解: $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab(a^2 - b^2) = 0$,

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + b(a+b)a(a-b) = 0,$$

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + (ab + b^2)(a^2 - ab) = 0,$$

$$[x - (ab + b^2)][x - (a^2 - ab)] = 0,$$

$$x_1 = a^2 - ab, \quad x_2 = b^2 + ab.$$

四、解答题

29. 当 $0 < x < 1$ 时，化简: $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right).$

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，解题的关键是掌握二次根式的运算法则，根据二次根式的运算法则、完全平方公式和平方差公式求解即可.

【详解】 解: $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{(1+x)(1-x)} + \sqrt{(1-x)^2}} \right) \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right) \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(1+x) - (1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{1+x + 2\sqrt{(1+x)(1-x)} + 1-x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{(1-x^2) - 1}{x^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

30. 已知 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 试求下列代数式的值:

(1) $a^2 + a^{-2}$;

(2) $\frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$.

【答案】(1) 47;

(2) 8.

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值, 完全平方公式, 熟练掌握分式的运算法则是解题的关键.

(1) 利用完全平方公式, 求得 $a + a^{-1}$ 的值, 再平方即可求解;

(2) 根据题意可得 $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$, 然后进行方式化简, 再将 $a + a^{-1} = 7$ 代入即可求解;

【小问 1 详解】

解: $\because a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$,

$\therefore \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9$, 即 $a + a^{-1} + 2 = 9$,

$$\therefore a + a^{-1} = 7,$$

$$\therefore (a + a^{-1})^2 = 49, \text{ 即 } a^2 + a^{-2} + 2 = 49,$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 47;$$

【小问2详解】

$$\text{解: 由于 } a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3,$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}},$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{-1} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}},$$

$$= a + a^{-1} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}},$$

$$= a + a^{-1} + 1$$

$$= 7 + 1$$

$$= 8.$$

31. 已知正比例函数 $f(x) = kx$ 与反比例函数 $g(x) = \frac{6}{x}$ 的图像交于点 $A(2, m)$.

(1) 试求 A 的坐标和正比例函数的解析式;

(2) 判定点 $B(-1, 6)$, $C(3, 2)$ 是否在反比例函数的图像上;

(3) 当 $-3 < x < -1$ 时, 求 $g(x)$ 的取值范围.

【答案】(1) $A(2, 3)$; $f(x) = \frac{3}{2}x$;

(2) 点 B 不在反比例函数的图像上, 点 C 在反比例函数的图像上;

(3) $-6 < g(x) < -2$.

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的图像与性质，反比例函数的图像与性质，解题的关键是掌握相关知识.

(1) 将点 $A(2, m)$ 代入反比例函数 $g(x) = \frac{6}{x}$ 中，可求出 A 的坐标，再将点 A 的坐标代入正比例函数 $f(x) = kx$ 中求出 k ，可求出正比例函数的解析式；

(2) 将点 $B(-1, 6)$ ， $C(3, 2)$ 代入 $g(x) = \frac{6}{x}$ 中，看等式是否成立，即可求解；

(3) 根据反比例函数的图像与性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 点 $A(2, m)$ 在反比例函数 $g(x) = \frac{6}{x}$ 的图像上，

$$\therefore m = \frac{6}{2} = 3,$$

$$\therefore A(2, 3),$$

将 $A(2, 3)$ 代入正比例函数 $f(x) = kx$ 中，得： $2k = 3$ ，

$$\text{解得： } k = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{正比例函数的解析式为 } f(x) = \frac{3}{2}x;$$

【小问 2 详解】

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时， } g(x) = \frac{6}{-1} = -6,$$

∴ 点 $B(-1, 6)$ 不在反比例函数的图像上，

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时， } g(x) = \frac{6}{3} = 2,$$

∴ 点 $C(3, 2)$ 在反比例函数的图像上；

【小问 3 详解】

∵ 反比例函数 $g(x) = \frac{6}{x}$ 中， $6 > 0$ ，

∴ 函数过第一、三象限，在每个象限内， $g(x)$ 随 x 的增大而减小，

$$\text{当 } x = -3 \text{ 时， } g(x) = \frac{6}{-3} = -2,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时， } g(x) = \frac{6}{-1} = -6,$$

∴ 当 $-3 < x < -1$ 时， $-6 < g(x) < -2$.

$$32. \text{ 已知关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0.$$

(1) 若方程有实根, 试求 m 的取值范围;

(2) 若方程有两个实根分别为 x_1 、 x_2 , 且满足 $(x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2$, 试求 m 的值.

【答案】 (1) $m \geq -1$

(2) $m = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系以及根的判别式, 解题的关键是掌握相关知识.

(1) 根据方程的系数结合根的判别式, 即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解之即可得出 m 的取值范围;

(2) 根据根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = -2(m+1)$, $x_1x_2 = m^2 - 1$, 结合 $(x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2$ 可得出关于 m 的一元二次方程, 解之即可得出 m 的值.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = 4(m+1)^2 - 4 \times 1(m^2 - 1) \geq 0,$$

解得: $m \geq -1$;

【小问 2 详解】

$\because$ 方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 有两个实根分别为 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -2(m+1), \quad x_1x_2 = m^2 - 1,$$

$$\because (x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 - x_1x_2,$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 16,$$

$$[-2(m+1)]^2 - 3(m^2 - 1) = 16,$$

$$m^2 + 8m + 9 = 0,$$

$$(m-1)(m+9) = 0,$$

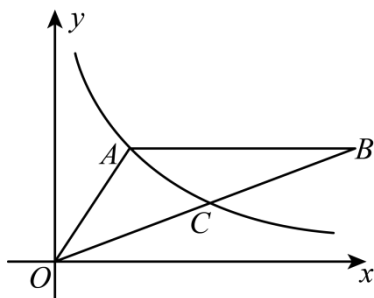
$$m-1=0 \text{ 或 } m+9=0,$$

$$m=1 \text{ 或 } m=-9,$$

$\because m \geq -1$ 时, 方程有实根,

$\therefore m=1$.

33. 如图, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 $A(2,3)$ 和点 C , $AB \parallel x$ 轴, 点 C 是 OB 的中点.



(1) 试求 k 的值;

(2) 试求三角形 OAB 的面积.

【答案】 (1) $k=6$;

(2) 9.

【解析】

【分析】 此题属于反比例函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法确定函数解析式, 坐标与图形性质, 以及反比例函数 k 的意义, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

(1) 将 A 坐标代入反比例解析式求出 k 的值即可;

(2) 设点 C 的坐标为 $\left(t, \frac{6}{t}\right)$, 由点 C 是 OB 的中点, 可得 $B\left(2t, \frac{12}{t}\right)$, 再由 $AB \parallel x$ 轴, $A(2,3)$, 得出 $\frac{12}{t}=3$,

解得 $t=4$, 可求得 $B(8,3)$, 再根据三角形面积公式求出三角形 AOB 面积.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(2,3)$ 代入解析式 $y = \frac{k}{x}$,

得: $k=6$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得反比例函数关系式为 $y = \frac{6}{x}$,

设点 C 的坐标为 $\left(t, \frac{6}{t}\right)$,

$\because$ 点 C 是 OB 的中点,

$\therefore B\left(2t, \frac{12}{t}\right)$,

$\because AB \parallel x$ 轴, $A(2,3)$,

$$\therefore \frac{12}{t} = 3,$$

$$\therefore t = 4,$$

$$\therefore B(8, 3),$$

$$\therefore \text{三角形 } OAB \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \times x_B = \frac{1}{2} \times (8-2) \times 3 = 9.$$

34. 已知关于 x 的二次方程 $(ab-2b)x^2 + 2(b-a)x + 2a-ab = 0$ 有两个相等的实数根, 试求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 解题的关键是根据判别式得到 a 、 b 之间的关系式. 根据题意可得 $\Delta = 4(b-a)^2 - 4(ab-2b)(2a-ab) = 0$, 整理后得到 $[(a+b)-ab]^2 = 0$, 得到 $a+b=ab$, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的二次方程 $(ab-2b)x^2 + 2(b-a)x + 2a-ab = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 4(b-a)^2 - 4(ab-2b)(2a-ab) = 0,$$

$$\text{即 } (a+b)^2 - 4ab + (ab-2b)(ab-2a) = 0,$$

$$(a+b)^2 - 4ab + [a^2b^2 - 2ab(a+b) + 4ab] = 0,$$

$$(a+b)^2 + a^2b^2 - 2ab(a+b) = 0,$$

$$[(a+b)-ab]^2 = 0,$$

$$\therefore a+b=ab,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

35. 阅读材料, 回答问题:

如果对于任意一个三角形, 只要它的三边长 a , b , c (不妨设 $a \leq b \leq c$) 都在某个函数 $f(x)$ 的定义域内, 并且 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 也能构成一个三角形, 我们就称这样的函数 $f(x)$ 为“保三角形函数”.

(1) 试证明: 任意一个比例系数大于零的正比例函数都是“保三角函数”;

(2) 试判断: $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否是“保三角函数”? 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例;

(3) 试判断: $g(x) = \sqrt{x}$ 是否是“保三角函数”? 如果是, 请说明理由, 如果不是, 请举出反例.

【答案】(1) 见解析 (2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”, 反例见解析

(3) $g(x) = \sqrt{x}$ 是“保三角函数”, 理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数, 三角形的三边关系, 新定义: “保三角形函数”, 解题的关键是理解“保三角形函数”的定义.

(1) 根据正比例函数和“保三角形函数”的定义证明即可;

(2) 根据“保三角形函数”的定义判断即可;

(3) 根据 $a+b>c$, 得到 $a+2\sqrt{ab}+b>c$, 进而得到 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$, 由 $b-a<c$, 可得 $\sqrt{b}-\sqrt{a}<\sqrt{c}$, 即可判断.

【小问 1 详解】

证明: 设 $f(x) = kx (k>0)$,

则 $f(a)+f(b) = ka+kb$, $f(b)-f(a) = kb-ka$, $f(c) = kc$,

$\because a+b>c, k>0$,

$\therefore k(a+b)>kc$,

$\therefore f(a)+f(b)>f(c)$,

又 $\because b-a<c, k>0$,

$\therefore k(b-a)<kc$,

$\therefore f(b)-f(a)<f(c)$,

$\therefore f(x) = kx (k>0)$ 是“保三角函数”;

【小问 2 详解】

解: $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”, 举出反例如下:

对于 $f(x) = \frac{1}{x}$, 设 $a=3, b=7, c=9$, a, b, c 能构成三角形,

$$\begin{aligned}\therefore f(a) &= \frac{1}{3}, \quad f(b) = \frac{1}{7}, \quad f(c) = \frac{1}{9}, \\ \therefore \frac{1}{7} + \frac{1}{9} &< \frac{1}{3}, \\ \therefore f(a), \quad f(b), \quad f(c) &\text{不能构成一个三角形},\end{aligned}$$

故 $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”；

【小问 3 详解】

对于 $g(x) = \sqrt{x}$,

$$\because a + b > c,$$

$$\therefore a + 2\sqrt{ab} + b > c,$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c},$$

$$\text{又} \because b - a < c,$$

$$\therefore \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{c},$$

$\therefore g(x) = \sqrt{x}$ 是“保三角函数”。