

2024 学年第一学期八年级期中质量监测

数学试卷

(满分 120 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各组二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{16}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{32x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 此题考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键.

各式化简后, 利用同类二次根式定义判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 不符合题意;

C、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{5}$, 不符合题意;

D、 $\sqrt{32x^3} = 4x\sqrt{2x}$, $\sqrt{2x}$, 符合题意,

故选: D.

2. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$

B. $x^2 = -2$

C. $(2x-3)(3x+4) = 6x^2 + x + 1$

D. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的定义, 要判断一个方程是否为一元二次方程, 先看它是否为整式方程, 若是, 再对它进行整理; 如果能整理为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的形式, 则这个方程就为一元二次方程.

【详解】 解: A、当 $a = 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 不是一元二次方程, 故不符合题意;

B、 $x^2 = -2$ 符合一元二次方程的定义，故符合题意

C、原方程整理得： $-2x - 13 = 0$ ，是一元一次方程，故不符合题意；

D、 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = 0$ 是分式方程，故不符合题意.

故选：B.

3. 对于所有实数 a, b ，下列等式从左到右一定成立的是 ()

A. $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$ B. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ C. $(-\sqrt{a})^2 = -|a|$ D. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用二次根式的性质化简，二次根式的乘法法则，逐一判断即可解答.

【详解】解：当 $a-b \geq 0$ 时， $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$ ，当 $a-b < 0$ 时， $\sqrt{(a-b)^2} = -a+b$ ，故 A 不一定成立；

当 a, b 都小于 0 时， $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ ，故 B 不一定成立；

$(-\sqrt{a})^2 = |a|$ ，故 C 不成立；

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ ，故 D 成立，

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式的性质，二次根式的化简，二次根式的乘法法则，熟知上述性质和计算法则是解题的关键.

4. 反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ ，下列说法不正确的是 ()

A. y 随 x 的增大而增大

B. 图像经过点 $(2, -3)$

C. 图像关于直线 $y = x$ 对称

D. 图像位于第二、四象限

【答案】A

【解析】

【分析】考查反比例函数的性质，当 $k < 0$ 时，在每个象限内 y 随 x 的增大而增大的性质、反比例函数的图象是轴对称图象， $y = x$ 和 $y = -x$ 是它的对称轴，同时也是中心对称图形；熟练掌握反比例函数图象上点的坐标特征和反比例函数图象和性质是解答此题的基础；多方面、多角度考查反比例函数的图象和性质. 通过反比例图象上的点的坐标特征，可对 B 选项做出判断；通过反比例函数图象和性质、增减性、对称性可对其它选项做出判断，得出答案.

【详解】解：由反比例函数的性质， $k < 0$ ，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，不在同一象限，不具有此性质，故 A 是不正确的，符合题意；

由点 $(2, -3)$ 的坐标满足反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ ，故 B 是正确的，不符合题意；

由反比例函数图象的对称性，可知反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象关于 $y = x$ 对称是正确的，故 C 是正确的，不符合题意；

由 $k = -6 < 0$ ，双曲线位于二、四象限，故 D 是正确的，不符合题意；

故选：A.

5. 下列命题中，判断错误的是（ ）

- A. 所有定理都有逆命题
- B. 对顶角相等的逆命题是真命题
- C. 两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行
- D. 假命题的逆命题不一定是假命题

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查命题与定理，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题. 根据命题，定理的定义，逆命题的定义一一判断即可.

【详解】解：A、所有定理都有逆命题，正确，本选项不符合题意；

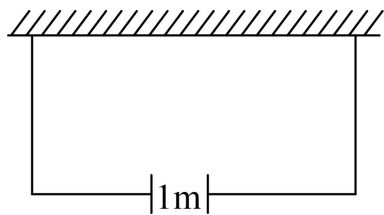
B、对顶角相等的逆命题是相等的角是对顶角，是假命题，原说法错误，本选项符合题意；

C、两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行，正确，本选项不符合题意；

D、假命题的逆命题不一定是假命题，例如相等的角是对顶角是假命题，而此命题的逆命题是对顶角相等，是真命题，因此原说法正确，不符合题意.

故选：B.

6. 如图，要建一个面积为 75 平方米的仓库，仓库的一边靠墙，并在与墙平行的一边开一道 1 米宽的门，现有 32 米长的木板，求仓库的长与宽. 设仓库垂直于墙面的一边长度为 x 米，则可列方程为（ ）



A. $(31 - 2x)x = 75$

B. $(32 - 2x)x = 75$

C. $(33 - 2x)x = 75$

D. $(32 - 2x)(x + 1) = 75$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，关键是看懂题意，找出题目中的等量关系．设仓库的垂直于墙的一边长为 x ，而与墙平行的一边开一道 1m 宽的门，现有能围成 32m 长的木板，那么平行于墙的一边长为 $(32-2x+1)$ ，而仓库的面积为 75 平方米，由此即可列出方程，解方程就可以解决问题．

【详解】解：设仓库的垂直于墙的一边长为 x 米，

依题意得 $(32+1-2x)x=75$ ，

即 $(33-2x)x=75$ ，

故选：C．

二、填空题（本题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 化简： $\sqrt{(3-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $\pi-3$

【解析】

【分析】根据二次根式性质，把问题转化为绝对值，化简解答即可．

本题考查了二次根式的化简，熟练掌握绝对值的化简是解题的关键．

【详解】解： $\sqrt{(3-\pi)^2} =$

$=|3-\pi|$ ，

$\because 3 < \pi$ ，

$\therefore \sqrt{(3-\pi)^2} =$

$=\pi-3$ ．

故答案为： $\pi-3$ ．

8. 函数 $y=\sqrt{3x^2+1}$ 的定义域是_____．

【答案】 x 取一切实数

【解析】

【分析】本题考查二次根式成立的条件，函数的定义域，掌握二次根式的被开方数是非负数是本题的解题关键．根据二次根式有意义的条件，即根号下需要大于等于 0 ，即可解答．

【详解】解： $\because x^2 \geq 0$ ，

$\therefore 3x^2 + 1 > 0$ 恒成立,

$\therefore x$ 取一切实数,

故答案为: x 取一切实数.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$, 则 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】 本题考查了函数求值, 分式求值, 把 $x = -2$ 代入函数关系式即可求解, 熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: 当 $x = -2$ 时,

$$f(-2) = \frac{2 \times (-2) + 3}{-2 + 4} = \frac{-4 + 3}{2} = -\frac{1}{2},$$

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

10. 方程 $x^2 = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法, 常用的方法有直接开平方法, 配方法, 因式分解法, 求根公式法, 熟练掌握各种方法是解答本题的关键.

移项后再因式分解求得两根即可.

【详解】 解: $x^2 - x = 0$,

$$\therefore x(x-1) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0,$$

解得: $x = 0, x = 1$,

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

11. 在实数范围内分解因式: $3x^2 - 6x + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，解一元二次方程，熟练掌握分解因式的方法是解题的关键。先令

$$3x^2 - 6x + 2 = 0, \text{ 求出 } x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}, \text{ 然后写出结果即可.}$$

【详解】 解：令 $3x^2 - 6x + 2 = 0$,

$$\text{解得: } x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{在实数范围内分解因式: } 3x^2 - 6x + 2 = 3\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\text{故答案为: } 3\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right).$$

12. 已知 $y = (m+3)x^{m^2-8}$ 是正比例函数，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据正比例函数的定义可得.

【详解】 由正比例函数的定义可得: $m+3 \neq 0$, $m^2-8=1$,

则 $m=3$.

故填 3.

【点睛】 解题关键是掌握正比例函数的定义条件，正比例函数 $y=kx$ 的定义条件是: k 为常数且 $k \neq 0$ ，自变量次数为 1.

13. 反比例函数 $y = \frac{1-m}{x}$ 图像经过 $A(1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ ，且 $y_1 > y_2$ ，那么 m 的取值范围是__.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 直接利用反比例函数的增减性得出 $1-m > 0$ ，进而求出答案.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1-m}{x}$ 图像经过 $A(1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ ，且 $y_1 > y_2$,

$\therefore$ 每个象限内， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore 1-m > 0$,

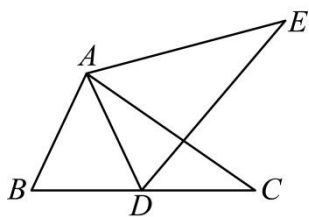
解得: $m < 1$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $m < 1$.

故答案为: $m < 1$.

【点睛】 本题考查反比例函数的增减性. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的增减性: 当 $k < 0$ 时, 函数的图像在第二、四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大; 当 $k > 0$ 时, 函数的图像在第一、三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小. 正确得出关于 m 的不等式是解题关键.

14. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 48° 后得到 $\triangle ADE$, 点 D 在 BC 边上, 那么 $\angle EDC = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 48°

【解析】

【分析】 此题考查了旋转的性质和等腰三角形的性质, 先由旋转性质得出对应角相等, 再通过等腰三角形求出角度即可.

【详解】 由旋转可知: $AB = AD$, $\angle ABD = \angle ADE$, $\angle BAD = 48^\circ$,

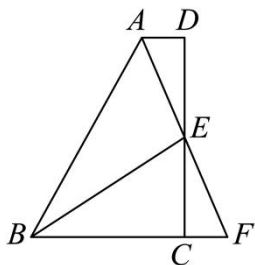
$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ) = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB + \angle EDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 48^\circ,$$

故答案为: 48° .

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 为 CD 的中点, 连接 AE, BE , $BE \perp AE$, 延长 AE 交 BC 的延长线于点 F . 若 $AB = 6, BC = 4$, 则 $AD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段的垂直平分线的性质和全等三角形的判定, 熟练掌握线段的垂直平分线的性

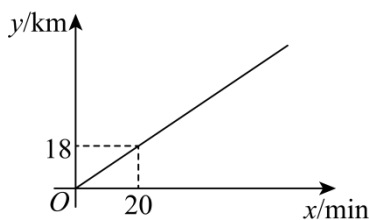
质和全等三角形的判定方法是解题的关键.

根据 $AD \parallel BC$ 可知 $\angle ADC = \angle ECF$, 再根据 E 是 CD 的中点可求出 $DE = EC$, 利用 ASA 可得 $\triangle ADE \cong \triangle FCE$, 可得 $FC = AD$, $AE = EF$, 结合已知可得 BE 是线段 AF 的垂直平分线, 根据线段垂直平分线的性质判断出 $AB = BF$ 即可证得 $AB = BC + AD$, 进而即可求解.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle FCE$,
 $\because E$ 是 CD 的中点,
 $\therefore DE = CE$,
 $\therefore \angle DEA = \angle FEC$,
 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$ (ASA),
 $\therefore FC = AD$, $AE = EF$,
又 $\because BE \perp AE$,
 $\therefore BE$ 是线段 AF 的垂直平分线,
 $\therefore AB = BF = BC + CF$,
 $\therefore AD = CF$,
 $\therefore AB = BC + AD$,
 $\because AB = 6, BC = 4$,
 $\therefore AD = AB - BC = 2$,

故答案为: 2.

16. 甲车从 A 地出发匀速行驶, 它行驶的路程 y (单位: km) 与行驶的时间 x (单位: min) 之间的函数关系如图所示. 甲车出发 20 min 后, 乙车从 A 地出发沿同一路线匀速行驶. 若乙车经过 30 min ~ 40 min 追上甲车, 则乙车的速度 v (单位: km/min) 的取值范围是_____.



【答案】 $\frac{27}{20} \leq v \leq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用, 根据图象求出甲车的速度是本题的关键. 根据图象, 求出甲车的速度,

设甲车出发 t min 后乙车追上甲车，根据两车与 A 地距离相等列等式，用 t 将 v 表示出来，根据 t 的取值范围，求出 v 的最小值即可。

【详解】解：根据图象，得甲车的速度为 $18 \div 20 = \frac{9}{10}$ (km/min)，

设甲车出发 t min 后乙车追上甲车，根据题意， $50 \leq t \leq 60$ 。

$$\text{则 } \frac{9}{10}t = v(t-20), \text{ 得 } v = \frac{0.9t}{t-20} = \frac{9t}{10(t-20)} = \frac{9}{10 - \frac{200}{t}},$$

$\therefore v$ 随 t 的增大而减小。

$$\text{当 } t = 60 \text{ 时, } v \text{ 取最小值, } v = \frac{9}{10 - \frac{200}{60}} = \frac{27}{20};$$

$$\text{当 } t = 50 \text{ 时, } v \text{ 取最大值, } v = \frac{9}{10 - \frac{200}{50}} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{27}{20} \leq v \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{27}{20} \leq v \leq \frac{3}{2}.$$

17. 定义：若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根，我们就称这两个方程互为“同伴方程”。例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$ ，所以这两个方程为“同伴方程”。若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $4a + 2b + c = 0$ 和 $4a - 2b + c = 0$ ，且该方程与 $(x+3)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，则 $n =$ _____。

【答案】 -2 或 2 或 -2

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程，涉及新定义，解题的关键是由 $4a - 2b + c = 0$ 和 $4a + 2b + c = 0$ ，可得关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 2$ ，由 $(x+3)(x-n) = 0$ ，可得 $(x+3)(x-n) = 0$ 的根为 $x = -3$ 或 $x = n$ ，根据 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与 $(x+3)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，即得 $n = -2$ 或 $n = 2$ 。

【详解】解： $\because$ 同时满足 $4a - 2b + c = 0$ 和 $4a + 2b + c = 0$ ，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 2$ ，

$$\therefore (x+3)(x-n) = 0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x-n=0,$$

$\therefore (x+3)(x-n)=0$ 的根为 $x=-3$ 或 $x=n$,

$\therefore ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 与 $(x+3)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”,

$\therefore n=-2$ 或 $n=2$,

故答案为: -2 或 2 .

18. 在直角坐标平面内, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象在同一个象限内经过 A 、 B 两点, 且 $A(3,4)$. 过点 B

作 y 轴的垂线, 垂足为点 C , 连接 AC 、 AB 、 BC , 若 $S_{\triangle ABC}=4$, 则点 B 的坐标是_____.

【答案】 $\left(5, \frac{12}{5}\right)$ 或 $(1,12)$

【解析】

【分析】此题主要考查了反比例函数的图象, 熟练掌握待定系数法求反比例函数的表达式, 利用点的坐标表示出相关线段的长度, 根据三角形的面积列出方程是解决问题的关键. 首先求出反比例函数的表达式为

$y=\frac{12}{x}$, 设点 B 的坐标为 $\left(m, \frac{12}{m}\right)$, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 则 $BC=m$, $AD=\left|4-\frac{12}{m}\right|$ 由 $S_{\triangle ABC}=4$

得, $\frac{1}{2}m \cdot \left|4-\frac{12}{m}\right|=4$, 由此解出 m 即可得点 B 的坐标.

【详解】解: $\because$ 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过 $A(3,4)$,

$\therefore k=3 \times 4=12$,

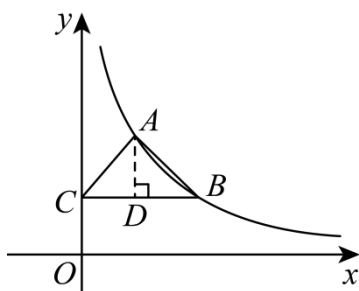
$\therefore$ 该函数的表达式为: $y=\frac{12}{x}$,

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上,

设点 B 的坐标为 $\left(m, \frac{12}{m}\right)$,

$\because BC \perp y$ 轴于点 C , 则 $BC=m$,

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 如图所示:



$\because$ 点 $A(3,4)$,

$$\therefore AD = \left| 4 - \frac{12}{m} \right|,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AD = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} m \cdot \left| 4 - \frac{12}{m} \right| = 4,$$

$$\therefore m \left(4 - \frac{12}{m} \right) = \pm 8,$$

$$\text{由 } m \left(4 - \frac{12}{m} \right) = 8, \text{ 解得: } m = 5,$$

$$\text{由 } m \left(4 - \frac{12}{m} \right) = -8, \text{ 解得: } m = 1,$$

当 $m = 5$ 时, 点 B 的坐标为 $\left(5, \frac{12}{5} \right)$,

当 $m = 1$ 时, 点 B 的坐标为 $(1, 12)$.

综上所述: 点 B 的坐标为 $\left(5, \frac{12}{5} \right)$ 或 $(1, 12)$,

故答案为: $\left(5, \frac{12}{5} \right)$ 或 $(1, 12)$.

三、解答题 (本题共 8 题, 19-23 题每题 6 分, 24、25 题每题 8 分, 26 题 14 分, 满分 60 分)

19. 计算: $\sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \frac{3}{\sqrt{3} + 1}.$

【答案】 $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数混合运算, 熟练掌握二次根式性质, 零指数幂运算法则, 分母有理化法则, 是解题的关键. 根据二次根式性质, 零指数幂运算法则, 分母有理化法则, 进行计算即可.

【详解】解： $\sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} - (\sqrt{3}-1)^0 + \frac{3}{\sqrt{3}+1}$

$$= 5\sqrt{3} - \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 1 + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

$$= 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}.$$

20. 计算： $6 \times \sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9x^4}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式乘除混合运算，解题的关键是熟练掌握二次根式乘除混合运算法则，根据二次根式乘除混合运算法则进行计算即可.

【详解】解： $6 \times \sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9x^4}$

$$= 6 \div 3 \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{x} \div 4x^3 \cdot 9x^4}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4x^3} \cdot 9x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

21. 解方程： $(3x+2)(2x-5) = (x-1)(5-2x)$

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法，熟练使用提公因式法是解题的关键.

将原方程右边化为0，再运用提公因式法即可求解.

【详解】解： $(3x+2)(2x-5)=(x-1)(5-2x)$

$$(3x+2)(2x-5)-(x-1)(5-2x)=0$$

$$(3x+2)(2x-5)+(x-1)(2x-5)=0$$

$$(3x+2+x-1)(2x-5)=0$$

$$(4x+1)(2x-5)=0$$

$$\therefore 4x+1=0 \text{ 或 } 2x-5=0$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{5}{2}$$

22. 解方程: $(x+3)(x-5)=1$

【答案】 $x_1 = \sqrt{17}+1, x_2 = -\sqrt{17}+1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握直接开平方法，因式分解法，配方法和公式法是解题的关键.

本题先化为一般式，再利用配方法求解.

【详解】解： $(x+3)(x-5)=1$

$$x^2-2x-15=1$$

$$x^2-2x-16=0$$

$$(x-1)^2=17$$

$$x-1=\pm\sqrt{17},$$

$$\text{解得: } x_1 = \sqrt{17}+1, x_2 = -\sqrt{17}+1.$$

23. 已知关于 x 的一元二次方程: $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0$

(1) 证明: 不论 m 取何值时, 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 若 $m \neq 0$, 设方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 (其中 $x_1 > x_2$), 若 y 是关于 m 的函数, 且 $y = 2024 - \frac{x_2}{x_1}$,

求 y 关于 m 的函数解析式.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = \frac{2}{m} + 2023$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式及一元二次方程的解法, 解题的关键是掌握当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

(1) 先计算判别式得到 $\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4(m^2 - 2m)$, 再根据非负数的意义及已知条件得到 $\Delta > 0$, 然后根据判别式的意义得到方程有两个不相等的实数根;

(2) 先解出方程的两个根, $x_1 = m, x_2 = m - 2$, 判定根的大小, 代入原式即可.

【小问 1 详解】

证明: $\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4(m^2 - 2m)$

$$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 8m$$

$$= 4 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

解: $\because x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0,$

$$\therefore (x-m)(x-m+2) = 0,$$

$$\therefore x-m = 0 \text{ 或 } x-m+2 = 0,$$

$\therefore$ 方程的两个根分别为 m 和 $m-2$,

$$\because m > m-2,$$

又 $\because x_1 > x_2,$

$$\therefore x_1 = m, x_2 = m-2,$$

$$\therefore y = 2024 - \frac{x_2}{x_1} = 2024 - \frac{m-2}{m} = 2024 - 1 + \frac{2}{m} = \frac{2}{m} + 2023.$$

24. 上海市公安交警部门提醒市民, 骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定. 某头盔经销商统计了某品牌头盔 9 月份到 11 月份的销量, 该品牌头盔 9 月份销售 500 个, 11 月份销售 720 个, 9 月份到 11 月份销

售量的月增长率相同.

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率;

(2) 若此种头盔的进价为 40 元/个, 商家经过调查统计, 当售价为 50 元/个时, 月销售量为 500 个, 若在此基础上售价每上涨 2 元/个, 则月销售量将减少 10 个, 为使月销售利润达到 9000 元, 且尽可能让顾客得到实惠, 则该品牌头盔每个售价应定为多少钱?

【答案】 (1) 该品牌头盔销售量的月增长率为 20%

(2) 该品牌头盔每个售价应定为 60 元

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用, 解题的关键是根据等量关系列出方程.

(1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x , 根据该品牌头盔 10 月份销售 50 个, 12 月份销售 72 个列出方程求解即可;

(2) 设该品牌头盔每个售价为 y 元, 根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 销售量列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x ,

依题意, 得: $500(1+x)^2 = 720$

解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (不合题意, 舍去)

答: 设该品牌头盔销售量的月增长率为 20%.

【小问 2 详解】

解: 设该品牌头盔每个售价为 y 元, 依题意, 得:

$$(y-40)\left(500-10\times\frac{y-50}{2}\right)=9000,$$

整理, 得 $y^2 - 120y + 3500 = 0$

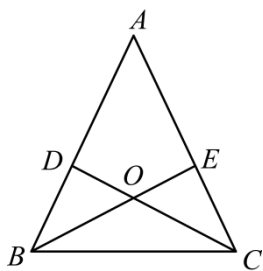
解得 $y_1 = 60$, $y_2 = 130$

因为尽可能让顾客得到实惠, 所以 $y = 130$ 不合题意, 舍去.

所以 $y = 60$.

答: 该品牌头盔每个售价应定为 60 元.

25. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 过点 C 和点 B 分别作 AB 与 AC 边上的高, 垂足分别为点 D 、点 E , 两条高交于点 O . 求证: $OD = OE$.



【答案】见详解

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，推出 $\angle ABE = \angle ACD$ ， $AD = AE$ ，得出 $BD = CE$ ，再证明 $\triangle OBD \cong \triangle OCE$ 即可解决问题；

【详解】证明：根据题意可得 $\angle AEB = \angle ADC = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \angle A = \angle A, \angle AEB = \angle ADC, AB = AC$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (AAS),$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD, AD = AE,$$

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore AB - AD = AC - AE, \text{ 即 } BD = CE,$$

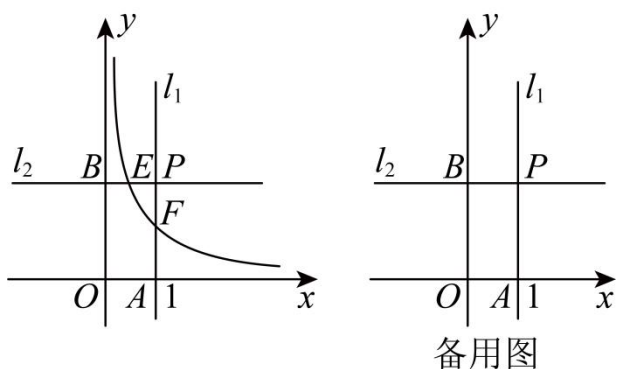
在 $\triangle OBD$ 和 $\triangle OCE$ 中，

$$\because \angle BOD = \angle COE, \angle ABE = \angle ACD, BD = CE,$$

$$\therefore \triangle OBD \cong \triangle OCE (AAS),$$

$$\therefore OD = OE.$$

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 过点 $A(1,0)$ 且与 y 轴平行，直线 l_2 过点 $B(0,2)$ 且与 x 轴平行，直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 P ，点 E 为直线 l_2 上一点，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象过点 E 且与直线 l_1 相交于点 F .



- (1) 若点 E 是 BP 中点，求反比例函数的表达式；
- (2) 连接 OE 、 OF 、 EF ，若 $\triangle OEF$ 的面积为 $\triangle PEF$ 的面积 2 倍，求点 E 的坐标；
- (3) 当 E 在 P 点左边时， G 是 y 轴上一点，直接写出所有使得 $\triangle EFG$ 是等腰直角三角形的点 G 的坐标，并写出求其中一个点 G 的坐标的过程.

【答案】(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $E(3, 2)$ 或 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

(3) $G\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $G(0, 1)$ 或 $G\left(0, \frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 首先根据题意确定点 P 的坐标，根据点 E 是 BP 中点，求出点 E 的坐标，直接代入解析式求解即可；

(2) 当 E 在 P 右边时，作 $EM \perp x$ 轴于 M ，设 $E(m, 2)$ ，则 $F(1, 2m)$ ，然后分别表示出 $\triangle OEF$ 和 $\triangle PEF$ 的面积，根据题意建立方程求解即可；当 E 在 P 左边时，作 $EM \perp x$ 轴于 M ，设 $E(m, 2)$ ，则 $F(1, 2m)$ ，分别表示出 $\triangle OEF$ 和 $\triangle PEF$ 的面积，根据题意建立方程求解即可；

(3) 分三种情况讨论：当 $\angle EFG = 90^\circ$ ， $EF = FG$ 时，当 $\angle EGF = 90^\circ$ ， $EG = FG$ 时，当 $\angle FEG = 90^\circ$ ， $EG = EF$ 时，分别画出图形进行求解即可.

【小问 1 详解】

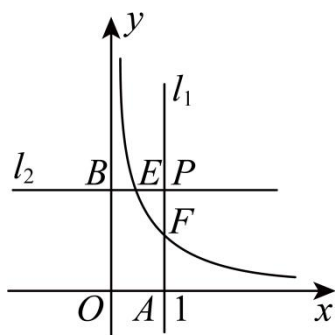
解：由题意 $P(1, 2)$ ，

$\because$ 点 E 是 BP 中点，

$\therefore E\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ，

$\therefore$ 把 $E\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得到 $k = 1$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{1}{x}$.



【小问 2 详解】

图1

解: ①如图 2 中, 当 E 在 P 右边时, 作 $EM \perp x$ 轴于 M .

设 $E(m, 2)$, 则 $F(1, 2m)$,

$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\triangle AOF} + S_{\text{梯形}AMEF} - S_{\triangle OME}, \quad S_{\triangle AOF} = S_{\triangle EOM},$$

$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\text{梯形}AMEF},$$

$$\therefore S_{\triangle EOF} = 2S_{\triangle PEF},$$

$$\therefore \frac{2+2m}{2} \cdot (m-1) = 2 \times \frac{1}{2} \times (m-1)(2m-2),$$

解得: $m = 1$ 或 $m = 3$,

$\therefore E$ 在 P 右边,

$$\therefore m = 3,$$

$\therefore$ 此时 $E(3, 2)$;

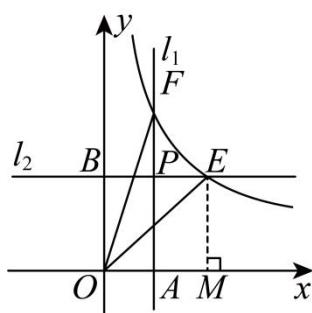


图2

②如图 3 中, 当 E 在 P 左边时, 作 $EM \perp x$ 轴于 M .

设 $E(m, 2)$, 则 $F(1, 2m)$,

同理可得 $\frac{2+2m}{2} \times (1-m) = 2 \times \frac{1}{2} (1-m) \times (2-2m)$,

解得: $m=1$ 或 $m=\frac{1}{3}$,

$\therefore E$ 在 P 左边,

$\therefore m=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 此时 $E\left(\frac{1}{3}, 2\right)$;

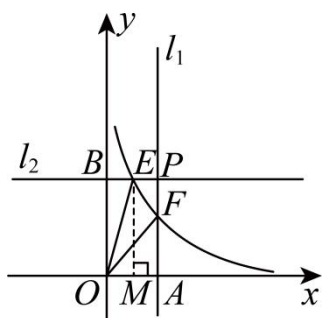


图3

综上所述, 当 $E(3, 2)$ 或 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 时, $\triangle OEF$ 的面积为 $\triangle PEF$ 面积的 2 倍.

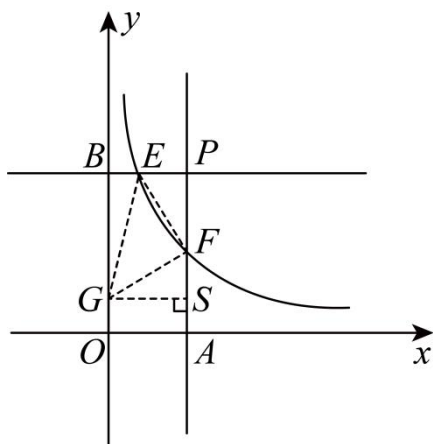
【小问 3 详解】

解: 设 $E(m, 2)$, 则 $F(1, 2m)$,

$\therefore$ 当 E 在 P 点左边,

$\therefore 0 < m < 1$;

①如图, 当 $\angle EFG = 90^\circ$, $EF = FG$ 时, 作 $GS \perp AP$ 于 S 点, 如图所示:



$\therefore \angle GSF = \angle FPE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle SGF + \angle SFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle SFG + \angle PFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle SGF = \angle PFE,$$

$$\therefore \triangle SGF \cong \triangle PFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore PF = GS, \quad PE = SF,$$

$$\text{即: } 2 - 2m = 1,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1}{2},$$

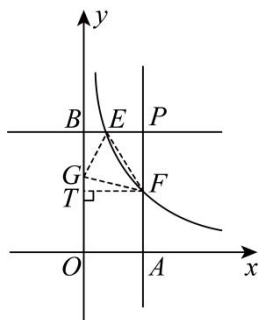
$$\therefore PE = SF = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AS = PA - PF - SF = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OG = AS = \frac{1}{2},$$

$$\therefore G\left(0, \frac{1}{2}\right);$$

②如图, 当 $\angle EGF = 90^\circ$, $EG = FG$ 时, 作 $FT \perp y$ 轴于 T 点,



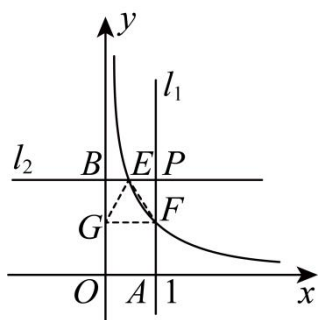
则同①可证得 $\triangle FTG \cong \triangle GBE$,

$$\therefore BG = FT = 1,$$

$$\therefore OG = OB - BG = 2 - 1 = 1,$$

$$\therefore G(0, 1);$$

③如图, 当 $\angle FEG = 90^\circ$, $EG = EF$ 时,



$$\therefore \angle FEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG + \angle PEF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BEG + \angle BGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle BEG,$$

$$\text{又} \because EG = EF, \angle GBE = \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EFP \cong \triangle GEB (\text{ASA}),$$

$$\therefore EB = PF, BG = PE,$$

$$\therefore m = 2 - 2m,$$

$$\text{解得 } m = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BG = PE = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad OG = 2 - BG = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{此时 } G\left(0, \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{综上, } G\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 或 } G(0, 1) \text{ 或 } G\left(0, \frac{5}{3}\right).$$

【点睛】 本题考查反比例函数与几何综合运用，三角形全等的判定和性质，三角形面积的计算，等腰三角形的性质，理解反比例函数的基本性质，以及反比例函数图象上点坐标的特征是解题关键.