

2024 学年第一学期期中质量调研卷八年级数学学科

(时间: 100 分钟 分值: 基础 100 分+附加 50 分)

一、填空题 (每题 2 分, 共 28 分)

1. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > 5$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数自变量的范围, 二次根式有意义的条件, 根据分母不等于 0, 且二次根式有意义的条件列式计算即可得解.

【详解】 解: 根据题意可得: $x - 5 > 0$,

解得: $x > 5$,

故答案为: $x > 5$.

2. 若 $\sqrt{20}$ 与最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 是同类二次根式, 则 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查的是同类二次根式的概念, 掌握二次根式化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式是解题的关键. 根据同类二次根式的概念列出方程, 解方程得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 且最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 与 $2\sqrt{5}$ 是同类二次根式,

$\therefore 3-m=5$,

$\therefore m=-2$

故答案为: -2 .

3. 方程 $x^2 = x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了利用因式分解法解一元二次方程, 根据题方程意向后分解因式化为积的形式, 利用两数相乘为 0, 两因式中至少有一个为 0 来解即可.

【详解】 解: 将原方程移项得: $x^2 - x = 0$,

提取公因式得: $x(x-1) = 0$,

$$\therefore x=0, x-1=0,$$

$$\text{解得: } x_1=1, x_2=0,$$

$$\text{故答案为: } x_1=1, x_2=0.$$

$$4. \text{ 如果 } f(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ 那么 } f(\sqrt{5}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } \sqrt{5}+2$$

【解析】

【分析】将 $x = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{1}{x-2}$ 中进行计算即可得到 $f(\sqrt{5})$ 的值.

$$\text{【详解】解: 将 } x = \sqrt{5} \text{ 代入 } \frac{1}{x-2}, \text{ 得 } f(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2.$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{5}+2.$$

【点睛】本题考查了二次根式的计算, 计算过程中进行分母有理化是解题的关键.

$$5. \text{ 解不等式: } x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x \text{ 的解集是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

【解析】

【分析】本题考查解不等式, 二次根式的运算.

根据解不等式的步骤求解, 最后将分母进行有理化, 即可解答.

$$\text{【详解】 } x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x,$$

$$\text{移项, 得: } x - \sqrt{2}x < \sqrt{3},$$

$$\text{合并同类项, 得: } (1 - \sqrt{2})x < \sqrt{3},$$

$$\text{系数化为 } 1, \text{ 得: } x > \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}},$$

$$\text{即 } x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

$$\text{故答案为: } x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$6. \text{ 点 } (3, a), (4, b) \text{ 在反比例函数 } y = \frac{k-2}{x} \text{ 的图象上, 若 } a > b, \text{ 则 } k \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } k > 2$$

【解析】

【分析】由 $3 < 4$ 且 $a > b$ 可知，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小可推出 $k - 2 > 0$ 即可求解.

【详解】 $\because 3 < 4$ ，且 $a > b$ ，

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore k - 2 > 0$ ，

$\therefore k > 2$.

故答案为 $k > 2$.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，牢记“当 $k > 0$ ，双曲线两支分别位于一、三象限，此时在每个象限内， y 随 x 的增大而减小”是解题关键.

7. 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $-1 \leq x < 0$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式商的性质，掌握二次根式商的性质是解题的关键.

利用二次根式的性质，商的算术平方根等于算术平方根的商，其中要满足的条件是分子的被开方数必须大于等于 0，分母的被开方数大于 0，列出关于 x 的一元一次不等式组求解即可.

【详解】解： $\because \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|}$ ，

要使 $\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 有意义，

则 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ ，

解得： $-1 \leq x < 0$ ，

故答案为： $-1 \leq x < 0$.

8. $x = a$ 是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的一个根，那么 $2a^2 - 12a =$ _____.

【答案】 -10

【解析】

【分析】把 $x=a$ 代入方程 $x^2-6x+5=0$ 来求 a^2-6a 的值，即可求出 $2a^2-12a$ 的值.

【详解】解： $\because x=a$ 是方程 $x^2-6x+5=0$ 的一个根，

$\therefore a^2-6a+5=0$ ，

解得 $a^2 - 6a = -5$,

$$\therefore 2a^2 - 12a = -10$$

故答案为: -10.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解的定义. 利用方程解的定义找到相等关系, 再把所求的代数式化简后整理出所找到的相等关系的形式, 再把此相等关系整体代入所求代数式, 即可求出代数式的值.

9. 某药厂下调药品的价格. 某种药品经过连续两次降价后, 由每盒 200 元下调至 128 元, 已知每次降价的百分率相同. 设降价的百分率为 x , 则可列方程为_____.

【答案】 $200(1-x)^2 = 128$

【解析】

【分析】 设降价的百分率为 x , 则第一次下调后的价格为 $200(1-x)$, 第二次下调的价格为 $200(1-x)^2$, 根据题意列方程即可.

【详解】 解: 设降价的百分率为 x ,

根据题意得: $200(1-x)^2 = 128$,

故答案为: $200(1-x)^2 = 128$.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程—增长率问题, 若设变化前的量为 a , 变化后的量为 b , 变化率为 x , 则经过两次变化后的数量关系为 $a(1 \pm x)^2 = b$.

10. 在实数范围内因式分解: $x^2 - 2x - 6 =$ _____.

【答案】 $(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$

【解析】

【分析】 可以利用完全平方公式与平方差公式, 将 $x^2 - 2x - 6$ 进行因式分解即可.

【详解】 解: $x^2 - 2x - 6 = x^2 - 2x + 1 - 7$

$$= (x-1)^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= (x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7}),$$

$$\therefore x^2 - 2x - 6 = (x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7}).$$

【点睛】 此题考查了在实数范围内因式分解, 熟练掌握利用公式法进行因式分解是解答此题的关键.

11. 如果三角形三边长分别为 $\frac{1}{2}$, k , $\frac{7}{2}$, 则化简 $\sqrt{k^2 - 12k + 36} - |2k - 5|$ 得_____

【答案】 $11 - 3k$

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形三边的关系，化简绝对值，化简二次根式.

首先根据三角形三边的关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边求出 k 的取值范围，然后根据

$\sqrt{k^2 - 12k + 36} - |2k - 5| = \sqrt{(k - 6)^2} - |2k - 5|$ 求解即可.

【详解】 解： $\because$ 一个三角形的三边长分别为 $\frac{1}{2}$ 、 k 、 $\frac{7}{2}$,

$$\therefore \frac{7}{2} - \frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} + \frac{7}{2},$$

$$\therefore 3 < k < 4,$$

$$\therefore \sqrt{k^2 - 12k + 36} - |2k - 5| = \sqrt{(k - 6)^2} - |2k - 5|$$

$$= 6 - k - (2k - 5) = -3k + 11 = 11 - 3k.$$

故答案为： $11 - 3k$

12. 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根， k 取最大整数是_____.

【答案】 -1.

【解析】

【分析】 方程有两个不相等的实数根，必须满足 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，由此可以得到关于 k 的不等式，然后解不等式即可求出实数 k 的取值范围从而确定结果.

【详解】 解： $\because \Delta = 2^2 - 4 \cdot k \times 1 = 4 - 4k$,

又 $\because$ 原方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore 4 - 4k > 0$$

解得 $k < 1$ ，又 $\because k \neq 0$,

$\therefore$ 实数 k 取最大整数是 -1;

故填： -1.

【点睛】 此题主要考查了一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系，以及一元二次方程的解法，(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

13. 等腰三角形的一边长为 1，另两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的两根，那么其周长是_____.

【答案】7

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，等腰三角形的性质，三角形三边关系，掌握一边分别为腰长和底边两种情况，进行分类讨论是解题的关键.

分别讨论当1为底时，腰长为方程的两个相等的实数根，根据判别式的意义得出 $\Delta = (-6)^2 - 4k = 0$ ，解方程；当腰长为1，则 $x = 1$ 为方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的一个根，求出 k ，转化一元二次方程，求出解，并根据三角形三边关系判断，即可得出三角形周长.

【详解】当底边为1时，则腰长为方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的两个相等的根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4k = 0, \text{ 解得 } k = 9,$$

方程转化为 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，解得： $x_1 = x_2 = 3$

$\therefore 1, 3, 3$ 符合三角形三边关系，

当腰长为1时，则 $x = 1$ 为方程的一个根，

$$\therefore 1 - 6 + k = 0, \text{ 解得 } k = 5,$$

方程转化为 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，解得 $x_1 = 1, x_2 = 5$ ，

$$\therefore 1 + 1 < 5,$$

$\therefore 1, 1, 5$ 不符合三角形三边关系，不能构成三角形，舍去，

$$\therefore \text{三角形的周长为 } 1 + 3 + 3 = 7,$$

故答案为：7

14. 点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上一点，连接 OA ，并将线段 OA 绕点 A 旋转 90° ，此时点 O 的对应点 B 恰也落在这个反比例函数图象上，已知点 A 的横坐标为4，那么 k 的值为_____.

【答案】 $8 + 8\sqrt{5}$ 或 $-8 + 8\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数与几何综合，旋转的性质，全等三角形的判定和性质；当旋转方式为顺时针旋转时，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D ，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，得出 $A\left(4, \frac{k}{4}\right)$ ，则 $OD = 4, AD = \frac{k}{4}$ ，

通过证明 $\triangle OAD \cong \triangle ABE$ ，得出 $B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right)$ ，把 $B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 得

$\left(4 - \frac{k}{4}\right)\left(4 + \frac{k}{4}\right) = k$, 求解即可; 当旋转方式为逆时针旋转时, 过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D , 过点 B 作

$BE \perp AD$ 交 DA 于点 E , 得出 $A\left(4, \frac{k}{4}\right)$, 则 $AD = 4, OD = \frac{k}{4}$, 通过证明 $\triangle OAD \cong \triangle ABE$, 得出

$B\left(4 + \frac{k}{4}, \frac{k}{4} - 4\right)$, 把 $B\left(4 + \frac{k}{4}, \frac{k}{4} - 4\right)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 得 $\left(4 + \frac{k}{4}\right)\left(\frac{k}{4} - 4\right) = k$, 求解即可.

【详解】解: 如图所示, 当将线段 OA 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AB 时, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ,

$\therefore$ 点 A 横坐标为 4, 且点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上一点,

$$\therefore A\left(4, \frac{k}{4}\right),$$

$$\therefore OD = 4, AD = \frac{k}{4},$$

$\therefore$ 将线段 OA 绕点 A 旋转 90° , 此时点 O 的对应点 B 恰也落在这个反比例函数图象上,

$$\therefore \angle OAB = 90^\circ, OA = AB,$$

$$\therefore \angle OAD + \angle BAE = 90^\circ,$$

$\because AD \perp x$ 轴,

$$\therefore \angle OAD + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BAE,$$

$$\because \angle AOD = \angle BAE, \angle AEB = \angle ODA = 90^\circ, OA = AB,$$

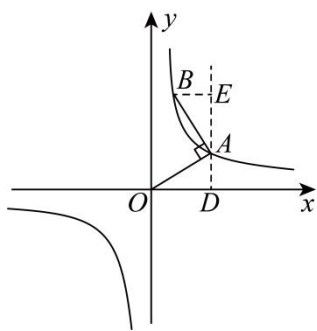
$$\therefore \triangle OAD \cong \triangle ABE,$$

$$\therefore BE = AD = \frac{k}{4}, AE = OD = 4,$$

$$\therefore B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right),$$

$$\text{把 } B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (k > 0) \text{ 得: } \left(4 - \frac{k}{4}\right)\left(4 + \frac{k}{4}\right) = k,$$

整理得: $k = -8 + 8\sqrt{5}$ 或 $k = -8 - 8\sqrt{5}$ (舍去),



如图所示, 当将线段 OA 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 AB 时, 过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp DA$ 交 DA 延长线于点 E ,

$\therefore$ 点 A 横坐标为 4, 且点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上一点,

$$\therefore A\left(4, \frac{k}{4}\right),$$

$$\therefore AD = 4, \quad OD = \frac{k}{4},$$

$\therefore$ 将线段 OA 绕点 A 逆时针旋转 90° , 此时点 O 的对应点 B 恰也落在这个反比例函数图象上,

$$\therefore \angle OAB = 90^\circ, OA = AB,$$

$$\therefore \angle OAD + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle OAD + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BAE,$$

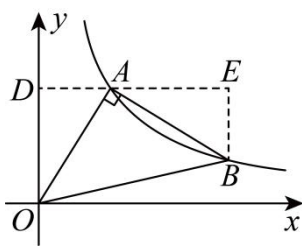
$$\therefore \triangle OAD \cong \triangle ABE,$$

$$\therefore BE = AD = 4, \quad AE = OD = \frac{k}{4},$$

$$\therefore B\left(4 + \frac{k}{4}, \frac{k}{4} - 4\right),$$

$$\text{把 } B\left(4 + \frac{k}{4}, \frac{k}{4} - 4\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (k > 0) \text{ 得: } \left(\frac{k}{4} - 4\right)\left(4 + \frac{k}{4}\right) = k,$$

$$\text{整理得: } k = 8 + 8\sqrt{5} \text{ 或 } k = 8 - 8\sqrt{5} \text{ (舍去),}$$



综上所述, $k = -8 + 8\sqrt{5}$ 或 $k = 8 + 8\sqrt{5}$.

故答案为: $8 + 8\sqrt{5}$ 或 $-8 + 8\sqrt{5}$.

二、选择题 (每题 3 分, 共 12 分)

15. 下列计算正确的是 ()

- A. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5$ B. $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2$ C. $5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ D. $\sqrt{4\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的加法运算法则, 二次根式的除法运算法则, 二次根式的乘法运算法则, 分母有理化的步骤即可解答.

【详解】解: $\because 2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 不能合并,

$\therefore 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5$ 错误,

$\therefore$ 故 A 项不符合题意;

$\because \sqrt{8} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$,

$\therefore \sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2$ 正确,

故 B 项符合题意;

$\because 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 25\sqrt{3 \times 2} = 25\sqrt{6}$,

$\therefore 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ 错误,

故 C 项不符合题意;

$\because \sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \sqrt{4\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$ 错误,

故D项不符合题意;

故选B.

【点睛】本题考查了二次根式的加法运算法则,二次根式的除法运算法则,二次根式的乘法运算法则,分母有理化的步骤,掌握对应法则是解题的关键.

16. 下列方程:① $x^2-5=0$;② $ax^2+bx+c=0$;③ $(x-2)(x+3)=x^2+1$;④ $x^2-4x+4=0$;⑤ $x^2+\frac{1}{x}=4\frac{1}{2}$ 中,一元二次方程的个数是()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义逐项分析即可.

【详解】因为只含一个未知数并且未知数的最高次数是2次的整式方程,叫做一元二次方程,所以

①是一元二次方程;

②当 $a=0$ 时,不是一元二次方程;

③化简后没有二次项,不是一元二次方程;

④是一元二次方程;

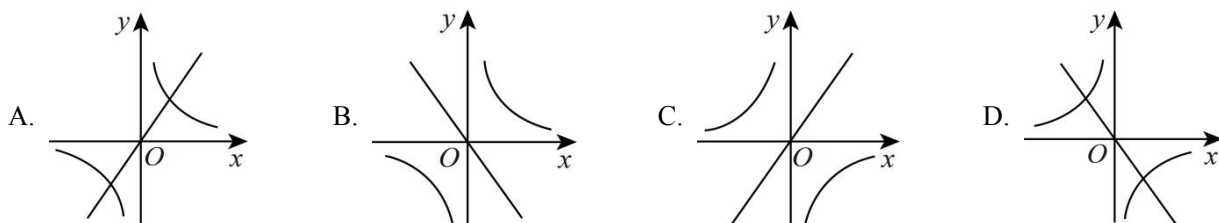
⑤ $\frac{1}{x}$ 不是整式,所以 $x^2+\frac{1}{x}=4\frac{1}{2}$ 不是一元二次方程.

故一元二次方程有2个.

故选: B.

【点睛】此题考查了一元二次方程的定义,解题的关键是理解定义.

17. 已知函数 $y=kx$ 中, y 随 x 的增大而减小,那么它和函数 $y=\frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的大致图像可能是()



【答案】D

【解析】

【分析】根据正比例函数的增减性判断出 $k<0$,再由函数的性质即可判定图形所过象限.

【详解】解: $\because y=kx$ 中, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore k < 0$,

$\therefore y = kx$ 的图像经过二四象限, $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过二四象限,

故选 D.

【点睛】 本题考查了函数的图像和性质,属于简单题,熟悉函数增减性与系数的关系是解题关键.

18. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根, 且其中一个根是另一根的一半, 则称这样的方程为“半根方程”. 以下关于半根方程的说法, 正确的是 ()

A. 方程 $x^2 - 4 = 0$ 是半根方程

B. 方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 是半根方程

C. 若 $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$, 则方程 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是半根方程

D. 若点 $A(m, n)$ 在函数 $y = 2x$ 的图象上, 则关于 x 的方程 $mx^2 - n = 0$ 是半根方程

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 熟练掌握半根方程的定义是解题的关键. 根据题意解得方程的解后即可利用半根方程的定义进行逐项判断, 即可求解.

【详解】 解: A. 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解为 $x_1 = 2$ 、 $x_2 = -2$, 此方程不是半根方程, 此结论错误;

B. 方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为 $x_1 = -1$ 、 $x_2 = 2$, 此方程不是半根方程, 此结论错误;

C. $\because 4m^2 + 5mn + n^2 = (4m+n)(m+n) = 0$,

$\therefore -\frac{n}{m} = 1$ 或 $-\frac{n}{m} = 4$,

$\therefore$ 方程 $(x-2)(mx+n) = 0$ 的解为 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{n}{m}$

$\therefore x_1 = \frac{1}{2}x_2$ 或 $x_2 = \frac{1}{2}x_1$,

则方程 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是半根方程, 此结论正确.

D. $\because$ 点 $A(m, n)$ 在函数 $y = 2x$ 的图象上,

$\therefore n = 2m$,

关于 x 的方程 $mx^2 - 2m = 0$ 解得: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$,

$\therefore$ 此方程不是半根方程, 此结论错误.

故选: C

三、简答题 (每题 6 分, 共 30 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18}$.

【答案】 $\frac{7}{2} - 4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算、分母有理化, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

先化简, 将分母有理化, 然后合并同类二次根式得到答案.

【详解】 解: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18}$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{14}}{2} \div \frac{\sqrt{14}}{3} - 3\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - 3\sqrt{2}$$
$$= 2 - \sqrt{2} + \frac{3}{2} - 3\sqrt{2}$$
$$= \frac{7}{2} - 4\sqrt{2}.$$

20. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \left(3\sqrt{\frac{b}{a}}\right) (b > 0);$

【答案】 $-a^2b\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的乘法, 根据二次根式的乘法运算法则进行计算即可

【详解】 解: $\because b > 0$

$\therefore a > 0,$

$$\therefore \frac{2}{b}\sqrt{ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \left(3\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$
$$= \frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{3} \sqrt{ab^5 \cdot a^3b \cdot \frac{a}{b}}$$
$$= -\frac{1}{b} \sqrt{a^5b^5}$$

$$= -\frac{1}{b} \cdot a^2 b^2 \sqrt{ab}$$

$$= -a^2 b \sqrt{ab}$$

21. 解方程: $2y(y-2) = y^2 - 3$

【答案】 $y_1 = 1, y_2 = 3$.

【解析】

【分析】 先将原方程整理为一元二次方程的一般形式，再运用因式分解法求解即可.

【详解】 解: $2y(y-2) = y^2 - 3$

整理得, $y^2 - 4y + 3 = 0$

因式分解得, $(y-1)(y-3) = 0$

$\therefore y-1=0, y-3=0$

解得, $y_1 = 1, y_2 = 3$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法, 要根据方程的特点灵活选用合适的方法.

22. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 利用配方法求解即可.

【详解】 解: 移项得: $2x^2 - 4x = -1$,

将二次项系数化为 1 得: $x^2 - 2x = -\frac{1}{2}$,

配方得: $x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$, 即 $(x-1)^2 = \frac{1}{2}$,

开方得: $x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得: $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】 本题考查了用配方法解一元二次方程: 1、把原方程化为一般形式; 2、方程两边同除以二次项系

数，使二次项系数为 1，并把常数项移到方程右边；3、方程两边同时加上一项系数一半的平方；4、把左边配成一个完全平方式，右边化为一个常数；5、进一步通过直接开平方法求出方程的解。

23. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, 求 $a^2b + ab^2$ 的值.

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 先对 a 、 b 分母有理化，然后 $a+b=2\sqrt{3}$ ， $ab=1$ ，将 a^2b+ab^2 因式分解，最后将 $a+b=2\sqrt{3}$ ， $ab=1$ 整体代入计算即可.

$$\text{【详解】解：} \because a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{3}+\sqrt{2},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\therefore a+b=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}, \quad ab=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1,$$

$$\therefore a^2b+ab^2=ab(a+b)=1 \times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了分母有理化以及因式分解的应用，代数式求值，正确的对 a 、 b 分母有理化是解答本题的关键.

四、解答题（第 24，25，26 题每题 7 分，第 28 题 9 分，共 30 分）

24. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x+m=1$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 如果 m 为非负整数，且该方程的根都是整数，求 m 的值.

【答案】 (1) $m < 2$

(2) $m = 1$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得出 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m-1) > 0$ ，求出 m 取值范围即可；

(2) 由 $m < 2$ 且 m 为非负整数，得到 $m = 1$ 或 0 ，代入后求出方程的解，即可得出答案.

【小问 1 详解】

$\because$ 方程 $x^2-2x+m=1$ 有两个不相等的实数根.

即 $x^2-2x+m-1=0$ 有两个不相等的实数根.

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m-1) > 0.$$

解得 $m < 2$;

【小问 2 详解】

$\therefore m < 2$ 且 m 为非负整数,

$\therefore m = 1$ 或 0 .

当 $m = 1$ 时, 原方程为 $x^2 - 2x = 0$.

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, 它的根都是整数, 符合题意;

当 $m = 0$ 时, 原方程为 $x^2 - 2x - 1 = 0$.

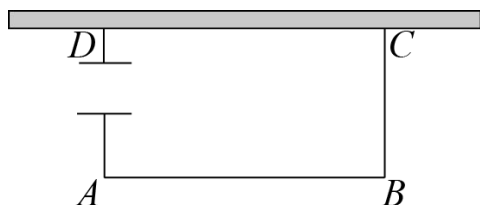
解得 $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$,

$\therefore$ 它的根都是不整数, 不符合题意;

综上所述, $m = 1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式和解一元二次方程, 能根据题意求出 m 的值和 m 的范围是解此题的关键.

25. 如图, 要建一个面积为 140 平方米的仓库, 仓库的一边靠墙, 这堵墙的长为 18 米, 在与墙垂直的一边要开一扇 2 米宽的门. 已知围建仓库的现有木板材料可使新建板墙的总长为 32 米, 那么这个仓库的宽和长分别为多少米?



【答案】这个仓库的长和宽分别为 14 米、10 米

【解析】

【分析】首先设这个仓库的长为 x 米, 则宽表示为 $\frac{1}{2}(32+2-x)$, 再根据面积为 140 平方米的仓库可得 $x \times \frac{1}{2}$

$(32+2-x) = 140$, 再解一元二次方程即可.

【详解】解: 设这个仓库的长为 x 米, 由题意得: $x \times \frac{1}{2}(32+2-x) = 140$,

解得: $x_1 = 20$, $x_2 = 14$,

$\therefore$ 这堵墙的长为 18 米,

$\therefore x = 20$ 不合题意舍去,

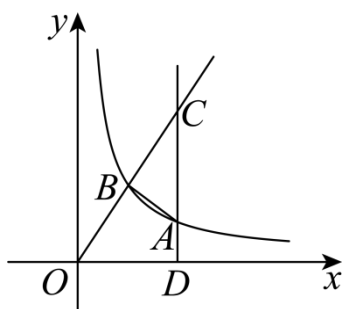
$$\therefore x=14,$$

$$\text{宽为: } \frac{1}{2} \times (32+2-14) = 10 \text{ (米)}.$$

答: 这个仓库的长和宽分别为 14 米、10 米.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用, 关键是正确理解题意, 正确表示出长方形的长和宽.

26. 如图, 已知正比例函数 $y=kx$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 的图象经过点 $B(a,3)$, 点 D 为 x 轴正半轴上一点, 过点 D 作 $CD \perp x$ 轴, 交反比例函数的图象于点 A , 交正比例函数的图象于点 C , $CD=6$.



- (1) 求 a 、 k 的值
- (2) 连接 AB , 求 $\triangle ABC$ 的面积
- (3) P 为射线 OC 上一点, 若 $\triangle PAC$ 的面积为 9, 求点 P 的坐标

【答案】(1) $a=2, k=1.5$

$$(2) \frac{9}{2}$$

$$(3) (0,0) \text{ 或 } (8,12)$$

【解析】

【分析】本题考查正比例函数和反比例函数的图形性质, 解题的关键是利用函数的解析式求出点坐标.

- (1) 先根据反比例函数的图象求出 a , 在根据点 B 的坐标求出 k 的值即可;
- (2) 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足为 E , 先根据正比例函数的图象求出点 C 的坐标, 再根据点 C 和点 A 的横坐标相等和点 A 在反比例函数的图象上求出点 A 的坐标, 即可求出 AC 和 BE 的长度, 即可求出三角形的面积;
- (3) 过点 P 作 $PF \perp AC$, 垂足为 F , 根据三角形的面积求出 PF 的值, 根据两种情况展开讨论, 结合正比例函数的图象就可求出点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $B(a,3)$ 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 的图象上,

$$\therefore 3 = \frac{6}{a},$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore B(2, 3),$$

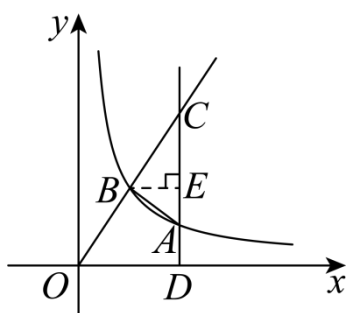
$\therefore$ 点 B 在正比例函数 $y = kx$ 的图象上,

$$\therefore 3 = 2k,$$

$$\therefore k = 1.5;$$

【小问 2 详解】

解: 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足为 E ,



设点 $C(m, 6)$, $A(m, n)$,

$\therefore$ 正比例函数为 $y = \frac{3}{2}x$,

$$\therefore 6 = \frac{3}{2}m,$$

$$\therefore m = 4,$$

$$\therefore A(4, n),$$

$$\therefore n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore A\left(4, \frac{3}{2}\right), E(4, 3),$$

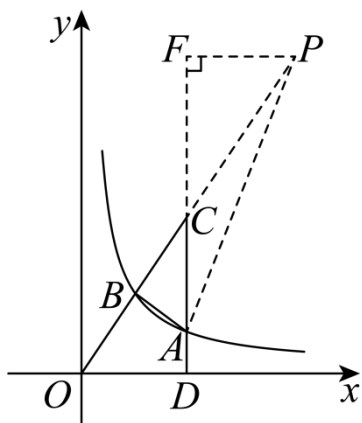
$$\therefore AC = CD - AD = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, BE = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 2 = \frac{9}{2};$$

【小问 3 详解】

解: 如下图所示, 过点 P 作 $PF \perp AC$, 垂足为 F , 设 $P(m, n)$,

$$\therefore S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot PF = 9,$$



$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \cdot PF = 9,$$

$$\therefore PF = 4,$$

当 P 在 C 点上方时,

$$\therefore P \text{ 的横坐标为 } m = OD + PF = 4 + 4 = 8,$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12,$$

$$\therefore P(8, 12),$$

当 P 在 C 点下方时,

$$\therefore P \text{ 的横坐标为 } m = OD - PF = 4 - 4 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0,$$

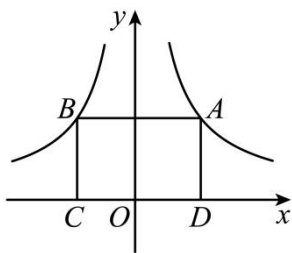
$$\therefore P(0, 0),$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(8, 12)$.

27. (1) 用 “>”、“=”、“<” 填空: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ _____ $2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}$; $3 + 3$ _____ $2\sqrt{3 \times 3}$; $6 + 3$ _____ $2\sqrt{6 \times 3}$;

(2) 由 (1) 中各式猜想: 对于任意正实数 a 、 b , $a + b$ _____ $2\sqrt{ab}$ (填 “<”、“>”、“≤” 或 “≥”);

(3) 问题解决: 如图, 已知点 A 在反比例函数 $y = \frac{9}{x} (x > 0)$ 的图像上, 点 B 在反比例函数 $y = -\frac{7}{x} (x < 0)$ 的图像上, 且 $AB \parallel x$ 轴, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C . 那么矩形 $ABCD$ 的周长是否存在最小值? 若存在, 求出其最小值, 并写出此时点 A 的坐标; 若不存在, 说明理由.



【答案】(1) $>$, $=$, $>$; (2) $\geq$; (3) 矩形 $ABCD$ 的周长存在最小值; 最小值为 16, 此时 $A(\frac{9}{4}, 4)$

【解析】

【分析】本题属于反比例函数综合题, 主要考查了反比例函数的图象与性质, 二次根式的运算, 完全平方公式等知识点, 熟练掌握矩形的性质是解答本题的关键.

(1) 分别计算出左右两边, 即可比较大小;

(2) 利用完全平方公式可得 $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, 即可得出答案;

(3) 设 $A(m, \frac{9}{m})$, $B(-\frac{7m}{9}, \frac{9}{m})$, 根据矩形的性质表示出矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB+AD)=\frac{32m}{9}+\frac{18}{m}$, 再利用 (2) 中的结论可得答案.

【详解】解: $\because \frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$, $2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{1}{2}+\frac{1}{8} > 2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}},$$

$$\because 3+3=6, \quad 2\sqrt{3 \times 3}=6,$$

$$\therefore 3+3 = 2\sqrt{3 \times 3},$$

$$\because 6+3=9, \quad 2\sqrt{6 \times 3}=6\sqrt{2},$$

$$\therefore 6+3 > 2\sqrt{6 \times 3},$$

故答案为: $>$, $=$, $>$;

$$(2) \because a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$\therefore a+b \geq 2\sqrt{ab},$$

故答案为: $\geq$;

(3) 矩形 $ABCD$ 的周长存在最小值; 理由如下:

$$\text{设 } A(m, \frac{9}{m}), \quad B(-\frac{7m}{9}, \frac{9}{m}),$$

$$\because AB \parallel x \text{ 轴}, \quad AD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore AB = m + \frac{7m}{9} = \frac{16m}{9}, \quad AD = \frac{9}{m},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的周长为 } 2(AB + AD) = \frac{32m}{9} + \frac{18}{m},$$

$$\because m > 0,$$

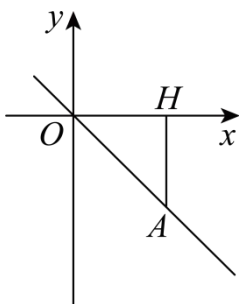
$$\therefore \frac{32m}{9} + \frac{18}{m} \geq 2\sqrt{\frac{32m}{9} \times \frac{18}{m}} = 16,$$

$$\therefore \text{当 } \frac{32m}{9} = \frac{18}{m} \text{ 时, 即 } m = \frac{9}{4} \text{ 时,}$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的周长最小值为 } 16, \text{ 此时 } A(\frac{9}{4}, 4).$$

拓展部分：满分 50 分（第 28 题 20 分，第 29 题 30 分）

28. 如图，已知正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 A，点 A 在第四象限，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴，垂足为 H，点 A 的横坐标为 4，且三角形 AOH 的面积为 8.



(1) 求正比例函数的解析式；

(2) 已知 $OA = 4\sqrt{2}$ ，在直线 OA 上（除 O 点外）是否存在点 M，使得三角形 AHM 为等腰三角形？若存在，直接写出 OM 的长；若不存在，请说明理由.

【答案】 (1) 正比例函数的解析式为 $y = -x$

(2) 存在， $4\sqrt{2} + 4$ 或 $4\sqrt{2} - 4$ 或 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数图象的性质、待定系数法求正比例函数的解析式，等腰三角形的判定和性质，三角形面积的计算，解题的关键是数形结合，画出图形，注意进行分类讨论.

(1) 先利用三角形面积公式得到 A 点坐标，然后利用待定系数法求正比例函数解析式；

(2) 分三种情况进行讨论，当 $AM = AH = 4$ 时，当 $MH = AH = 4$ 时，当 $AM = MH$ 时，分别画出图形，求出结果即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 A 的横坐标为 4， $S_{\triangle AOH} = 8$ ， $AH \perp x$ 轴

$$\therefore \frac{1}{2}OH \times AH = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times AH = 8,$$

$$\therefore AH = 4,$$

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 -4 ,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4, -4)$,

$\because$ 正比例函数 $y = kx$ 的图象经过点 A,

$$\therefore -4 = 4k,$$

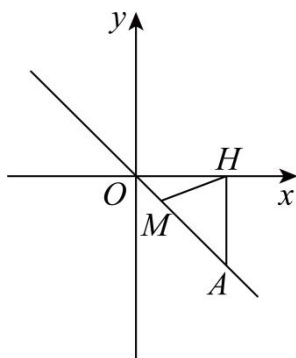
解得 $k = -1$,

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y = -x$;

【小问 2 详解】

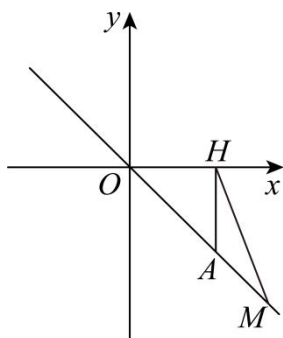
解：在直线 OA 上（除 O 点外）存在点 M ，使得 $\triangle AHM$ 为等腰三角形，理由如下：

当 $AM = AH = 4$ ，点 M 在点 A 的上方时，如图，



则 $OM = OA - AM = 4\sqrt{2} - 4$;

点 M 在点 A 的下方时， $OM = OA - AM = 4\sqrt{2} + 4$;

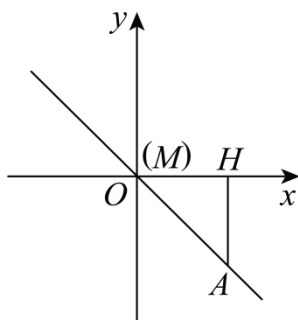


当 $MH = AH = 4$ 时，

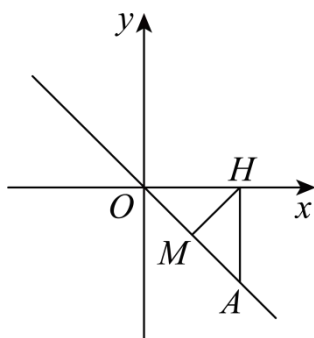
$\because OH = 4$,

∴ 点 M 与点 O 重合,

∴ 此时点 M 不符合题意;



当 $AM = MH$ 时,



∵ $AH = OH = 4$, $\angle AHO = 90^\circ$,

∴ $\angle OAH = \angle AOH = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$,

∴ $\angle AHM = \angle MAH = 45^\circ$,

∴ $\angle AMH = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,

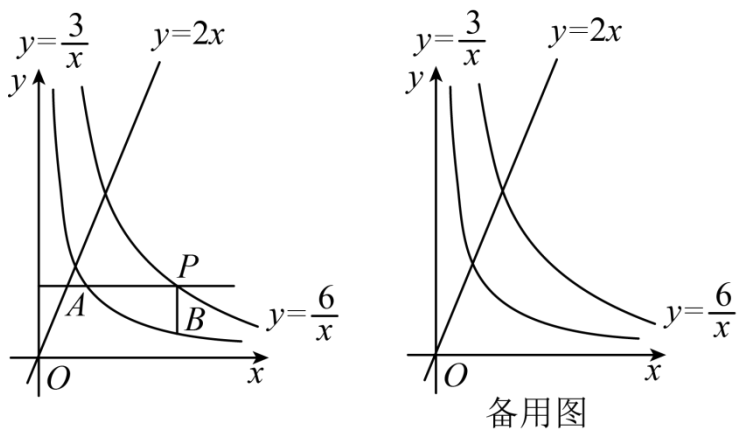
∴ $MH \perp OA$,

∴ $OH = AH$,

则 $AM = OM = \frac{1}{2} \times AO = 2\sqrt{2}$;

综上所述可知, OM 的长为 $4\sqrt{2} + 4$ 或 $4\sqrt{2} - 4$ 或 $2\sqrt{2}$.

29. 已知点 $P(m, n)$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 图形上的动点, $PA \parallel x$ 轴, $PB \parallel y$ 轴, 分别交反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图像于点 A 、 B , 点 C 是直线 $y = 2x$ 上的一点.



- (1) 请用含 m 的代数式表示 P 、 A 、 B 三点坐标.
- (2) 在点 P 的运动过程中, 联结 AB , 三角形 PAB 的面积是否变化, 若不变, 请求出三角形 PAB 的面积; 若改变, 请说明理由.
- (3) 在点 P 运动过程中, 是否存在以 AP 为直角边的三角形 APC 和三角形 PAB 全等, 如果存在, 请求出关于 m 的方程 (不必求解).

【答案】 (1) 点 $P(m, \frac{6}{m})$, 点 $A(\frac{m}{2}, \frac{6}{m})$, 点 $B(m, \frac{3}{m})$

(2) 三角形 PAB 的面积不变, $\frac{3}{4}$

(3) 存在以 AP 为直角边的三角形 APC 和三角形 PAB 全等; $m = 3$ 或 $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数和正比例函数综合问题, 涉及了全等三角形的性质, 掌握分类讨论的数学思想是解答本题的关键.

(1) 根据题意可得点 $P(m, \frac{6}{m})$, 由 $PA \parallel x$ 轴, $PB \parallel y$ 轴, A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上即可求解;

(2) 由题意得 $\angle APB = 90^\circ$, 分别表示出 PA , PB 即可求解;

(3) 由题意分类讨论: ① $\angle CAP = 90^\circ$, $AC = PB$; ② $\angle CPA = 90^\circ$, $CP = PB$ 两种情况, 求出点 C 的坐标, 代入即可得到关于 m 的方程.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $P(m, n)$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 图形上的动点,

$$\therefore n = \frac{6}{m},$$

$$\therefore \text{点 } P(m, \frac{6}{m}),$$

$\because PA \parallel x$ 轴, $PB \parallel y$ 轴,

$$\therefore y_A = \frac{6}{m}, \quad x_B = m,$$

$\because A、B$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore x_A = 3 \div \frac{6}{m} = \frac{m}{2}, \quad y_B = \frac{3}{m},$$

即: 点 $A(\frac{m}{2}, \frac{6}{m})$, 点 $B(m, \frac{3}{m})$;

【小问 2 详解】

解: 三角形 PAB 的面积不变; 理由如下:

$\because PA \parallel x$ 轴, $PB \parallel y$ 轴,

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore P(m, \frac{6}{m}), \quad A(\frac{m}{2}, \frac{6}{m}), \quad B(m, \frac{3}{m}),$$

$$\therefore PA = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}, \quad PB = \frac{6}{m} - \frac{3}{m} = \frac{3}{m},$$

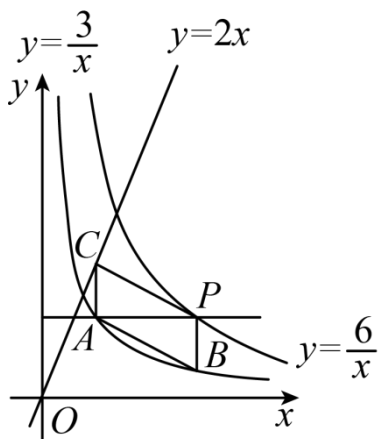
$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times PA \times PB = \frac{3}{4};$$

【小问 3 详解】

解: 存在以 AP 为直角边的三角形 APC 和三角形 PAB 全等; 理由如下:

若以 AP 为直角边的 $\triangle APC$ 和 $\triangle PAB$ 全等,

① $\angle CAP = 90^\circ$, $AC = PB$, 如图 1 所示:



$$\text{此时 } x_C = x_A = \frac{m}{2}, y_C = y_A + PB = \frac{9}{m},$$

即: 点 $C(\frac{m}{2}, \frac{9}{m})$,

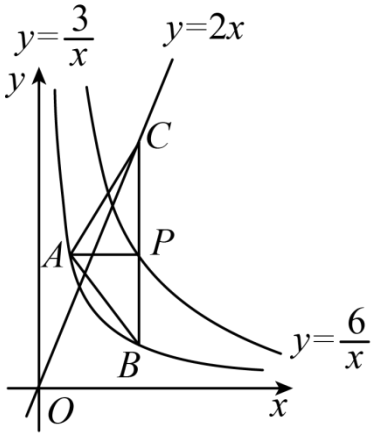
$\because$ 点 C 是直线 $y = 2x$ 上的一点,

$$\therefore \frac{9}{m} = 2 \times \frac{m}{2},$$

整理得: $m^2 = 9$,

$\therefore m = 3$ 或 -3 (舍去);

② $\angle CPA = 90^\circ$, $CP = PB$, 如图 2 所示:



此时 $x_C = x_P = m, y_C = y_A + PB = \frac{9}{m}$,

即: 点 $C(m, \frac{9}{m})$,

$\because$ 点 C 是直线 $y = 2x$ 上的一点,

$$\therefore \frac{9}{m} = 2 \times m,$$

整理得: $m^2 = \frac{9}{2}$,

$$\therefore m = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (舍去),}$$

综上所述: 存在以 AP 为直角边的三角形 APC 和三角形 PAB 全等; $m = 3$ 或 $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.