

市北初级中学 2024 学年第一学期八年级数学期中练习卷

(完卷时间: 90 分钟, 满分: 120 分)

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 若式子 $\sqrt{3x-4}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq \frac{4}{3}$ B. $x > \frac{4}{3}$ C. $x \geq \frac{3}{4}$ D. $x > \frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】二次根式有意义的条件: 二次根号下的数为非负数, 二次根式才有意义.

【详解】解: 由题意得 $3x-4 \geq 0$,

解得: $x \geq \frac{4}{3}$,

故选 A.

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件, 本题属于基础应用题, 只需学生熟练掌握二次根式有意义的条件, 即可完成.

2. 下列二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

- A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{8a}$

【答案】C

【解析】

【详解】解: 选项 A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$, 显然不是,

选项 B. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 不是,

选项 C. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, C 正确,

选项 D. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 不是,

故选: C.

3. 方程 $2x(x-3) = 5(x-3)$ 的根是 ()

- A. $x = \frac{5}{2}$ B. $x = 3$ C. $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 3$ D. $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 3$

【答案】C

【解析】

【分析】通过因式分解法求解方程即可；

【详解】 $2x(x-3)=5(x-3)$,

$$2x(x-3)-5(x-3)=0,$$

$$(x-3)(2x-5)=0,$$

$$x-3=0 \text{ 或 } 2x-5=0,$$

$$x_1=\frac{5}{2}, \quad x_2=3.$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了利用因式分解法解一元二次方程，准确计算是解题的关键.

4. 方程组 $\begin{cases} ax-y=1 \\ x+by=8 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ，那么方程 $x^2+ax+b=0$ ()

A. 有两个不相等实数根

B. 有两个相等实数根

C. 没有实数根

D. 有两个根为 2 和 3

【答案】C

【解析】

【分析】先求得 a, b 的值，然后再根据一元二次方程的根的判别式的符号判断根的情况.

【详解】把 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 代入方程组 $\begin{cases} ax-y=1 \\ x+by=8 \end{cases}$ 得 $a=2, b=2$,

所以方程 $x^2+ax+b=0$ 变为 $x^2+2x+2=0$ ，其中 $a=1, b=2, c=2$,

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 1\times 2=-4<0,$$

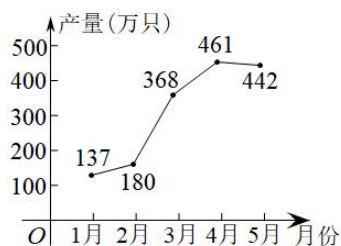
$\therefore$ 方程没有实数根

故选 C.

【点睛】本题考查了根的判别式，二元一次方程组的解，解题的关键是根据一元二次方程的根的判别式的符号判断根的情况.

5. 某厂家 2020 年 1~5 月份的口罩产量统计如图所示. 设 2 月份到 4 月份，该厂家口罩产量的平均月增长率为 x ，根据题意可得方程 ()

2020年1~5月份某厂家的口罩产量统计图



A. $368(1-x)^2 = 180$

B. $180(1+x)^2 = 461$

C. $461(1-x)^2 = 180$

D. $368(1+x)^2 = 442$

【答案】B

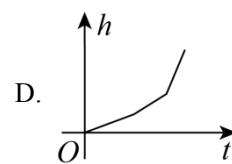
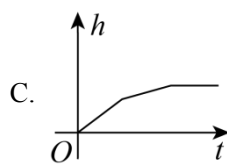
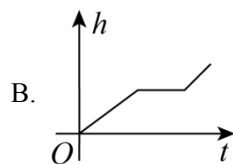
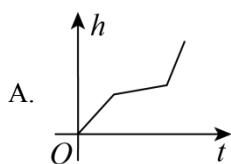
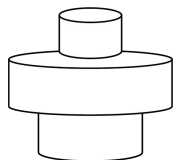
【解析】

【分析】本题为增长率问题，一般用增长后的量=增长前的量 $\times(1+\text{增长率})^2$ ，如果设这个增长率为 x ，根据“2月份的180万只，4月份的产量将达到461万只”，即可得出方程.

【详解】解：从2月份到4月份，该厂家口罩产量的平均月增长率为 x ，根据题意可得方程： $180(1+x)^2=461$ ，故选：B.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，本题为增长率问题，一般形式为 $a(1+x)^2=b$ ， a 为起始时间的有关数量， b 为终止时间的有关数量.

6. 均匀地向一个如图所示的容器中注水，最后把容器注满，在注水过程中水面高度 h 随时间 t 变化的函数图象大致是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】由于三个容器的高度相同，粗细不同，那么水面高度 h 随时间 t 变化而分三个阶段.

【详解】解：最下面的容器较粗，第二个容器最粗，那么第二个阶段的函数图象水面高度 h 随时间 t 的增大而增长缓慢，用时较长，最上面容器最小，那么用时最短.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了函数图象，解决本题的关键是根据容器的高度相同，每部分的粗细不同得到用时

的不同.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 计算: $\sqrt{(\pi-4)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4-\pi$ ## $-\pi+4$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的性质化简得出答案.

【详解】 解: $\sqrt{(\pi-4)^2} = |\pi-4| = 4-\pi$.

故答案为: $4-\pi$.

【点睛】 本题主要考查了二次根式的性质与化简, 二次根式的性质是解题关键.

8. 已知 $ab > 0$, 那么 $\sqrt{50a^2b^3}$ 可化简为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5ab\sqrt{2b}$ ## $5ba\sqrt{2b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式, 根据 $\sqrt{50a^2b^3}$ 有意义, 可知 $b \geq 0$, 再由 $ab > 0$, 可得 $a > 0$, $b > 0$, 据此根据化简二次根式即可得到答案.

【详解】 解: $\because ab > 0$,

$$\therefore \sqrt{50a^2b^3} = 5ab\sqrt{2b},$$

故答案为: $5ab\sqrt{2b}$.

9. $\sqrt{5}-2$ 的一个有理化因式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5}+2$.

【解析】

【分析】 一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子. 据此即可求解.

【详解】 解: $\because (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 5-4=1$,

$$\therefore \sqrt{5}-2 \text{ 的一个有理化因式是 } \sqrt{5}+2,$$

故答案为 $\sqrt{5}+2$.

【点睛】 本题考查二次根式的有理化. 根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化. 二次根式有理化主要利用了平方差公式, 所以一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子.

10. 已知 $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数值, 直接把 $x = -\frac{1}{2}$ 代入到 $x^2 + 1$ 中, 计算求出结果即可得到答案.

【详解】 解: $\because f(x) = x^2 + 1$,

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

故答案为: $\frac{5}{4}$.

11. 把一元二次方程: $(x+1)^2 - x = 3(x^2 - 2)$ 化成一般形式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2x^2 - x - 7 = 0$

【解析】

【分析】 先利用完全平方公式展开, 再把所有的项移到等式的左边, 合并同类项即可.

【详解】 解: $(x+1)^2 - x = 3(x^2 - 2)$

去括号, 得: $x^2 + 2x + 1 - x = 3x^2 - 6$

移项, 得: $x^2 + 2x + 1 - x - 3x^2 + 6 = 0$

合并同类项, 得: $-2x^2 + x + 7 = 0$

两边同时乘以-1 得: $2x^2 - x - 7 = 0$

故答案为 $2x^2 - x - 7 = 0$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的一般式, 掌握相关知识是解题的关键.

12. 在实数范围内因式分解: $3x^2 + 2x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解, 解一元二次方程: $3x^2 + 2x - 2 = 0$, 公式法解一元二次方程, 进而求得

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$, 即可将代数式写成因式分解的形式, 即可求解.

【详解】解：设 $3x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\because a=3, b=2, c=-2, \Delta=b^2-4ac=4-4\times 3\times (-2)=28$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \text{实数范围内因式分解: } 3x^2 + 2x - 2 = \left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$\text{故答案为: } \left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right).$$

13. 反比例函数图像经过点 $(2, -3)$ ，则它的函数表达式是_____.

【答案】 $y = \frac{-6}{x}$

【解析】

【详解】设反比例函数的解析式是 $y = \frac{k}{x}$.

$$\text{则 } -3 = \frac{k}{2}, \text{ 得 } k = -6,$$

$$\text{则这个函数的表达式是 } y = \frac{-6}{x}.$$

$$\text{故答案为 } y = \frac{-6}{x}.$$

14. 函数 $y = (k-1)x$ 是 y 关于 x 的正比例函数，且 y 随 x 的增大而减小，则 k 满足的条件为_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数的增减性问题，对于正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ ，若 $k < 0$ ，则 y 随 x 的增大而减小，若 $k > 0$ ，则 y 随 x 的增大而增大，据此根据题意可得 $k-1 < 0$ ，即 $k < 1$.

【详解】解： $\because$ 函数 $y = (k-1)x$ 是 y 关于 x 的正比例函数，且 y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore k-1 < 0,$$

$$\therefore k < 1,$$

故答案为： $k < 1$.

15. 若直线 $y = k_1x$ 与双曲线 $y = \frac{k_2}{x}$ 相交于点 P 、 Q ，若点 P 的坐标为 $(-5, 3)$ ，则点 Q 的坐标为_____.

【答案】 $(5, -3)$

【解析】

【分析】 先根据 P 的坐标求出 k_1 、 k_2 的值，再联立直线和双曲线的方程即可求得 Q 点坐标.

【详解】 由题意得，
$$\begin{cases} 3 = -5k_1 \\ 3 = \frac{k_2}{-5} \end{cases}$$

解得，
$$\begin{cases} k_1 = -\frac{3}{5} \\ k_2 = -15 \end{cases}$$

则直线为 $y = -\frac{3}{5}x$ ，双曲线为 $y = -\frac{15}{x}$

联立
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x \\ y = -\frac{15}{x} \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

则点 Q 坐标为 $(5, -3)$.

【点睛】 本题考查了利用代入法求函数解析式，以及函数图象相交时联立函数解析式，建立方程组求解交点坐标.另外，根据本题两函数图象的特征，也可利用对称性求得点 Q 的坐标.

16. 已知 $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 0$ ，则 $\sqrt{x} + \sqrt{y} =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，算术平方根的非负性，把 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 看做一个整体，则可根据解一元二次方程的方法得到 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3 = 0$ 或 $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$ ，即 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = -3$ 或 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ，再由算术平方根的非负性可得 $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{y} \geq 0$ ，则 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

【详解】 解： $\because (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 0$,

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} + 3 = 0$ 或 $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$,

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = -3 \text{ 或 } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,$$

$$\therefore \sqrt{x} \geq 0, \sqrt{y} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,$$

故答案为: 1.

17. 某风景区集体门票的收费标准是 25 人以内 (含 25 人), 每人 10 元, 超过 25 人的, 超过的部分每人 5 元. 当人数超过 25 人时, 请写出此时应收门票费用 y (元) 与人数 x (人) 之间的函数关系式_____.

【答案】 $y = 5x + 125 (x > 25)$

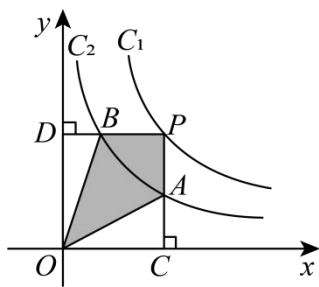
【解析】

【分析】 本题考查了列函数关系, 根据 25 人以内 (含 25 人), 每人 10 元, 超过 25 人的, 超过的部分每人 5 元, 列出函数关系, 即可求解.

【详解】 解: 依题意, $y = 25 \times 10 + 5(x - 25) = 5x + 125$

故答案为: $y = 5x + 125 (x > 25)$.

18. 如图, 已知两个反比例函数 $C_1: y = \frac{1}{x}$ 和 $C_2: y = \frac{1}{3x}$ 在第一象限内的图象, 设点 P 在 C_1 上, $PC \perp x$ 轴于点 C, 交 C_2 于点 A, $PD \perp y$ 轴于点 D, 交 C_2 于点 B, 则四边形 PAOB 的面积为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据反比例函数比例系数 k 的几何意义得到 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $S_{\text{矩形 } PCOD} = 1$, 然后利用矩形面积分别减去两个三角形的面积即可得到四边形 PAOB 的面积.

【详解】 $\because PC \perp x$ 轴, $PD \perp y$ 轴, $\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $S_{\text{矩形 } PCOD} = 1$, $\therefore$ 四边形 PAOB 的面积 $= 1 - 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

故答案为 $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了反比例函数比例系数 k 的几何意义. 掌握反比例函数比例系数 k 的几何意义是解答本题的关键. 反比例函数比例系数 k 的几何意义: 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象中任取一点, 过这一个点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

三、简答题 (本题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

19. 计算 $\left(\sqrt{0.5} - 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{75}\right)$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{13\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减计算, 先化简二次根式, 再根据二次根式的加减计算法则求解即可.

【详解】 解: $\left(\sqrt{0.5} - 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{75}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} + 5\sqrt{3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} + 5\sqrt{3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

20. 计算: $\sqrt{54xy} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{5x}} (x > 0)$

【答案】 $\frac{3y\sqrt{30y}}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘法计算, 二次根式有意义的条件, 二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0, 据此可求出 $y > 0$, 再根据二次根式乘法计算法则求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{54xy}$ 有意义,

$$\therefore xy \geq 0,$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore y > 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \sqrt{54xy} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{5x}} (x > 0) \\
 &= \sqrt{54xy \cdot \frac{y^2}{5x}} \\
 &= \sqrt{\frac{54y^3}{5}} \\
 &= \frac{3y\sqrt{30y}}{5}.
 \end{aligned}$$

21. 计算 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分母有理化，二次根式的减法计算，先分别把减号前后两个式子分母有理化，再根据二次根式的减法计算法则求解即可.

【详解】 解： $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} - \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} \\
 &= \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

22. 解方程： $2x^2 + 4x - 7 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{-2-3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 用公式法求解即可.

【详解】解： $\because a=2, b=4, c=-7,$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 56 = 72 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{4} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{2}.$$

所以原方程的解为 $x_1 = \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{-2-3\sqrt{2}}{2}.$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法---公式法，先求出 Δ 的值，然后根据 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ 求解即可.

23. 解方程： $(x+2)^2 - 10(x+2) + 21 = 0$

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 5$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，把 $x+2$ 看做一个整体，把原方程左边利用十字相乘法分解因式，进而解方程即可.

【详解】 解： $\because (x+2)^2 - 10(x+2) + 21 = 0,$

$$\therefore [(x+2)-3][(x+2)-7] = 0,$$

$$\therefore x+2-3=0 \text{ 或 } x+2-7=0,$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 5.$

24. 解不等式： $\frac{1}{2}(3-\sqrt{8}x) < 1 + \sqrt{18}x$

【答案】 $x > \frac{\sqrt{2}}{16}$

【解析】

【分析】 先化简，再利用解不等式的方法与步骤解出答案即可.

【详解】 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{8}x) < 1 + \sqrt{18}x$

$$\frac{3}{2} - \sqrt{2}x < 1 + 3\sqrt{2}x$$

$$-\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x < 1 - \frac{3}{2}$$

$$-4\sqrt{2}x < -\frac{1}{2}$$

$$x > \frac{\sqrt{2}}{16}$$

【点睛】此题考查二次根式的应用，解题关键在于掌握运算法则.

四、解答题 (本大题共 6 题, 25~28 题每题 6 分, 29 题 8 分, 30 题 10 分, 满分 42 分)

25. 已知: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ 求代数式 $x^2 - xy + y^2$ 值

【答案】 $5\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】观察，显然，要求的代数式可以变成 x, y 的差与积的形式，从而简便计算.

【详解】解: $\because x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$,

$$\therefore xy = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}, \quad x - y = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{原式} = (x - y)^2 + xy = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

【点睛】此类题注意变成字母的和、差或积的形式，然后整体代值计算.

26. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2(2 - k)x + 3 - 6k = 0$.

(1) 若 $x = 1$ 是此方程的一根，求 k 的值及方程的另一根；

(2) 试说明无论 k 取什么实数值，此方程总有实数根.

【答案】 (1) $k = 1$ ，方程的另一根为 -3 ；(2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 把已知的根代入方程中，得关于 k 的方程，解方程即可求得 k 的值，再由根与系数的关系即可求得另一个根；

(2) 求出关于 x 的方程的判别式，根据判别式的符号即可判断.

【详解】(1) 把 $x = 1$ 代入方程有: $1 + 2(2 - k) + 3 - 6k = 0$,

解得 $k = 1$.

故方程为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

设方程的另一个根是 x_2 ，则: $1 \cdot x_2 = -3$,

解得 $x_2 = -3$.

故 $k = 1$ ，方程的另一根为 -3 ；

(2) $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2(2-k)x + 3 - 6k = 0$ 中, $a=1$, $b=2(2-k)$, $c=3-6k$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(2-k)^2 - 4(3-6k) = 4(k+1)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 无论 k 取什么实数值, 此方程总有实数根.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解, 根与系数的关系, 一元二次方程根的判别式等知识, 掌握这些知识是解答本题的前提.

27. 已知 $y = (k-2)x^{k^2-3}$, 且 y 是关于 x 的正比例函数.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 若 $x \leq 2$, 求函数 y 的最小值.

【答案】 (1) $y = -4x$

(2) -8

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义, 求正比例函数值, 正比例函数的增减性:

(1) 一般地, 形如 $y = kx$ (k 是常数, 且 $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数, 据此可得 $\begin{cases} k^2 - 3 = 1 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases}$, 解之即

可得到答案;

(2) 根据 (1) 所求, 先求出当 $x = 2$ 时, $y = -4 \times 2 = -8$, 再根据解析式可得 y 随 x 增大而减小, 则当 $x \leq 2$, 函数 y 的最小值为 -8 .

【小问 1 详解】

解: $\because y = (k-2)x^{k^2-3}$, 且 y 是关于 x 的正比例函数,

$$\therefore \begin{cases} k^2 - 3 = 1 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore k = -2,$$

$$\therefore y = (-2-2)x^{(-2)^2-3} = -4x;$$

【小问 2 详解】

解: 在 $y = -4x$ 中, 当 $x = 2$ 时, $y = -4 \times 2 = -8$,

$\therefore$ 在 $y = -4x$ 中, $-4 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 增大而减小,

$\therefore$ 当 $x \leq 2$, 函数 y 的最小值为 -8 .

28. 现有一块长80cm、宽60cm的矩形钢片，将它的四个角各剪去一个边长为 x cm的小正方形，做成一个底面积为 1500cm^2 的无盖的长方体盒子，求小正方形的边长.

【答案】小正方形的边长为15cm

【解析】

【分析】设小正方形的边长为 x cm，则长方体盒子底面的长、宽均可用含 x 的代数式表示，再根据面积，即可建立等量关系，列出方程.

【详解】解：设小正方形的边长为 x cm，则可得这个长方体盒子的底面的长是 $(80-2x)$ cm，宽是 $(60-2x)$ cm，

$$\therefore (80-2x)(60-2x)=1500,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 70x + 825 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 55, \quad x_2 = 15$$

$$\text{又 } 60-2x > 0,$$

$$\therefore x = 15.$$

$\therefore$ 小正方形的边长为15cm.

【点睛】本题考查一元二次方程的实际应用，要从已知条件中找出关键的与所求问题有关的信息，通过图形求出面积，解题的关键是熟记各种图形的面积公式，列出符合题意的方程，整理即可.

29. 已知等腰三角形的两条边 a, b 是方程 $x^2 - kx + 12 = 0$ 的两根，另一边 c 是方程 $x^2 - 16 = 0$ 的一个根，求 k 的值.

【答案】 $k = 7$ 或 $k = 4\sqrt{3}$

【解析】

【详解】试题分析：先解方程 $x^2 - 16 = 0$ ，得到 $c = 4$ ，再分两种情况进行讨论：① $c = 4$ 是底边，那么 $a = b$ ，由方程 $x^2 - kx + 12 = 0$ 的判别式 $\Delta = 0$ 列出方程；② $c = 4$ 是腰，那么将 $x = 4$ 代入 $x^2 - kx + 12 = 0$ 求出 k 的值.

解： $\because c$ 是方程 $x^2 - 16 = 0$ 的一个根，

$$\therefore c = 4.$$

分两种情况：

① $c = 4$ 是底边，

$$\text{方程 } x^2 - kx + 12 = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = k^2 - 4 \times 12 = 0,$$

$$\text{解得 } k_1 = 4\sqrt{3}, \quad k_2 = -4\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

$4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 4 满足三角形三边关系定理, 符合题意;

② $c=4$ 是腰,

将 $x=4$ 代入 $x^2-kx+12=0$,

得 $4^2-4k+12=0$,

解得 $k=7$,

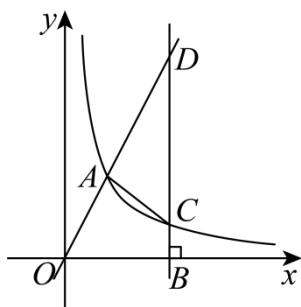
$\therefore x^2-7x+12=0$,

$\therefore x_1=3, x_2=4$,

4, 4, 3 满足三角形三边关系定理, 符合题意.

故 k 的值为 $4\sqrt{3}$ 或 7.

30. 如图, 正比例函数 $y=kx$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$ 的图像交于点 $A(a, 4)$. 点 B 为 x 轴正半轴上一点, 过 B 作 x 轴的垂线交反比例函数的图像于点 C , 交正比例函数的图像于点 D .



(1) 求 a 的值及正比例函数 $y=kx$ 的表达式;

(2) 若 $BD=10$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】 (1) $a=2$; $y=2x$; (2) $\frac{63}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 已知反比例函数解析式, 点 A 在反比例函数图象上, 故 a 可求; 求出点 A 的坐标后, 点 A 同时在正比例函数图象上, 将点 A 坐标代入正比例函数解析式中, 故正比例函数的解析式可求.

(2) 根据题意以及第一问的求解结果, 我们可设 B 点坐标为 $(b, 0)$, 则 D 点坐标为 $(b, 2b)$, 根据 $BD=10$, 可求 b 值, 然后确认三角形的底和高, 最后根据三角形面积公式即可求解.

【详解】 (1) 已知反比例函数解析式为 $y=\frac{8}{x}$, 点 $A(a, 4)$ 在反比例函数图象上, 将点 A 坐标代入, 解得 $a=2$, 故 A 点坐标为 $(2, 4)$, 又 $\because A$ 点也在正比例函数图象上, 设正比例函数解析为 $y=kx$, 将点 $A(2, 4)$ 代入正比例函数解析式中, 解得 $k=2$, 则正比例函数解析式为 $y=2x$.

故 $a=2$; $y=2x$.

(2) 根据第一问的求解结果, 以及 BD 垂直 x 轴, 我们可以设 B 点坐标为(b, 0), 则 C 点坐标为(b, $\frac{8}{b}$), D 点坐标为(b, 2b), 根据 BD=10, 则 2b=10, 解得 b=5, 故点 B 的坐标为(5, 0), D 点坐标为(5, 10), C 点坐标为(5, $\frac{8}{5}$), 则在 $\triangle ACD$ 中, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \left(10 - \frac{8}{5}\right) \times (5 - 2) = \frac{63}{5}$.

故 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{63}{5}$.

【点睛】(1) 本题主要考查求解正比例函数及反比例函数解析式, 掌握求解正比例函数和反比例函数解析式的方法是解答本题的关键.

(2) 本题根据第一问求解的结果以及 BD 垂直 x 轴, 利用待定系数法, 设 B、C、D 三点坐标, 求出 B、C、D 三点坐标, 是解答本题的关键, 同时掌握三角形面积公式, 即可求解.