

SSSES2024 学年第一学期期中质量监测

(202411)

(初二数学 (含拓展题)) (闭卷) 满分: 100 分+20 分 时间: 90 分钟

考生注意: 1. 本试卷含四个大题, 共 26 题;

2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;

3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列根式, 不能与 $\sqrt{48}$ 合并的是 ()

- A. $\sqrt{0.12}$ B. $\sqrt{18}$ C. $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ D. $-\sqrt{75}$

【答案】B

【解析】

【分析】把各个二次根式化为最简二次根式, 选出与 $\sqrt{48}$ 不是同类二次根式的选项即可;

【详解】解: $\because \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $\sqrt{0.12} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{75} = -5\sqrt{3}$

$\therefore$ 不能与 $\sqrt{48}$ 合并的是 $\sqrt{18}$

故选 B.

【点睛】本题考查同类二次根式的概念及二次根式的化简, 掌握二次根式化简的方法是解题关键.

2. 下列各式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{x^3}$ B. $\sqrt{4x}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\sqrt{\frac{x}{2}}$

【答案】C

【解析】

【详解】A 选项: $\sqrt{x^3} = |x|\sqrt{x}$, 故不是最简二次根式;

B 选项: $\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$, 故不是最简二次根式;

C 选项: $\sqrt{x^2+1}$ 是最简二次根式;

D 选项: $\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}$, 故不是最简二次根式;

故选 C.

3. 下列方程中, 一定是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + x + 1 = 0$

B. $(\frac{1}{x})^2 + \frac{2}{x} + 1 = 0$

C. $4x^2 = 8$

D. $x(x-1) = x^2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义进行判断即可;

【详解】 解: A、当 $a = 0$ 时, 该方程是一元一次方程; 不符合题意;

B、 $(\frac{1}{x})^2 + \frac{2}{x} + 1 = 0$ 是分式方程; 不符合题意;

C、 $4x^2 = 8$ 是关于 x 的一元二次方程; 符合题意;

D、 $x(x-1) = x^2$ 可化为: $-x = 0$, 该方程是关于 x 的一元一次方程; 不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查了识别一元二次方程, 理解一元二次方程的定义是解答本题的关键.

4. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 = 4$ 的根为 $x = 2$

B. $x = \sqrt{2}$ 是 $x^2 = 2$ 的根

C. 方程 $y^2 + \frac{1}{4} = 0$ 的根为 $y = \pm \frac{1}{2}$

D. $x^2 = -a$ 没有实数根

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据方程的根与方程的逻辑关系, 逐项判断即可;

【详解】 解: A、 $x^2 = 4$ 的根为 $x = \pm 2$; 选项错误, 不符合题意;

B、 $x = \sqrt{2}$ 是 $x^2 = 2$ 的根; 选项正确, 符合题意;

C、方程 $y^2 + \frac{1}{4} = 0$ 无实数根; 选项错误, 不符合题意;

D、当 $a \leq 0$ 时, $x^2 = -a$ 有实数根; 选项错误, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根; 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

5. 在命题: “三角形的一个外角大于三角形的每一个内角”、“底边及一个内角相等的两个等腰三角形全等”、

“两条平行线被第三条直线所截, 一对同旁内角的平分线互相垂直中, 真命题的个数有 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而得出答案.

【详解】解：三角形的一个外角大于任何与之不相邻的一个内角，故原命题错误，为假命题；

底边及一个底角相等的两个等腰三角形全等，故原命题错误，为假命题；

两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相垂直，正确，为真命题，

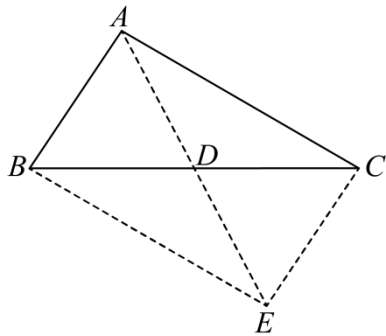
故选：B.

【点睛】本题考查了命题与定理的知识，能够熟练掌握有关的命题及定理是解答本题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $AC = 6$ ， AD 是 BC 边上的中线，则 AD 的取值范围是 ()A. $0 < AD < 10$ B. $1 < AD < 5$ C. $2 < AD < 10$ D. $0 < AD < 5$

【答案】B

【解析】

【分析】延长 AD 至点 E ，使得 $DE = AD$ ，可证 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ ，可得 $AB = CE$ ， $AD = DE$ ，在 $\triangle ACE$ 中，根据三角形三边关系即可求得 AE 的取值范围，即可解题.【详解】解：延长 AD 至点 E ，使得 $DE = AD$ ， $\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AD = DE \\ \angle ADB = \angle CDE, \\ BD = CD \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD (\text{SAS})$, $\therefore AB = CE$ ， $AD = DE$ $\therefore$ 在 $\triangle ACE$ 中， $AC - CE < AE < AC + CE$ ， $\therefore 2 < AE < 10$ ， $\therefore 1 < AD < 5$.

故选：B.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定，考查了全等三角形对应边相等的性质，本题中求证 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ 是解题的关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 当 x _____ 时， $\sqrt{3-2x}$ 在实数范围内有意义.

【答案】 $\leq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列不等式求解即可；

【详解】解：由题意得： $3-2x \geq 0$

解得： $x \leq \frac{3}{2}$

故答案为： $x \leq \frac{3}{2}$

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件；熟练运用二次根式有意义的条件列不等式是解题的关键.

8. 化简： $\sqrt{8a^2b}$ ($a > 0$) = _____.

【答案】 $2a\sqrt{2b}$

【解析】

【分析】二次根式的化简公式： $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ ，再把原式化为 $\sqrt{4a^2 \cdot 2b}$ ，再结合公式进行化简即可.

【详解】解： $\because a > 0$,

$\therefore \sqrt{8a^2b} = \sqrt{4a^2 \cdot 2b} = 2a\sqrt{2b}$,

故答案为： $2a\sqrt{2b}$

【点睛】本题考查的是二次根式的化简，掌握“ $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ ”是解难题的关键.

9. $2-\sqrt{5}$ 的倒数 _____.

【答案】 $-2-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据题意列出 $2-\sqrt{5}$ 的倒数，然后分母有理化即可.

【详解】 $2-\sqrt{5}$ 的倒数为 $\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -2-\sqrt{5}$

所以答案为 $-2-\sqrt{5}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式中的分母有理化，熟练掌握分母有理化的步骤和方法是关键.

10. 化简: $a\sqrt{-\frac{1}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件得到 $a < 0$ ，然后根据二次根式的性质化简.

【详解】 $\because -\frac{1}{a} > 0$,

$\therefore a < 0$,

$\therefore$ 原式 $= a\sqrt{-\frac{a}{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{-a}}{-a} = -\sqrt{-a}$,

故填: $-\sqrt{-a}$.

【点睛】 本题考查二次根式的化简，掌握二次根式的性质是关键.

11. 方程 $3x^2=4x$ 的根是_____.

【答案】 $0, \frac{4}{3}$

【解析】

【详解】 试题解析: $\because 3x^2 = 4x$.

$\therefore 3x^2 - 4x = 0$.

$x(3x - 4) = 0$.

$x = 0, 3x - 4 = 0$.

$x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$.

故答案为 $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$.

点睛：一元二次方程的解法有：直接开方法，配方法，公式法，因式分解法.

本题用的是因式分解法.

12. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有一个根为 -1 ，则 a, b, c 的关系是_____.

【答案】 $a - b + c = 0$

【解析】

【分析】 将 $x = -1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0$ 中, 即可得出 a 、 b 、 c 的关系.

【详解】 解: 把 $x = -1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0$ 中, 得: $a - b + c = 0$,

$$\therefore b = a + c.$$

故答案为 $b = a + c$.

【点睛】 本题考查的是一元二次方程解的定义: 能使方程成立的未知数的值, 就是方程的解, 比较简单.

13. 某商场对空调进行两次降价, 假设两次降价的百分率相同, 降价后的价格为降价前的 64%, 则每次降价百分率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 设降价的百分率为 x , 根据降价后的价格为降价前的 64%, 列方程即可解答.

【详解】 解: 设降价的百分率为 x ,

根据题意, 可得 $(1 - x)^2 = 64\%$,

解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = 1.8$ (舍去),

$\therefore$ 每次降价百分率为 20%,

故答案为: 20%.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 准确读懂题意, 得到等量关系是解题的关键.

14. 一个三角形的两边长分别为 3 和 5, 其第三边是方程 $x^2 - 13x + 40 = 0$ 的根, 则此三角形的周长为_____.

【答案】 13

【解析】

【分析】 因式分解法解方程可求得三角形的第三边, 再根据三角形三边关系进行取舍即可求得答案.

【详解】 解: 解方程 $x^2 - 13x + 40 = 0$ 可得 $x = 5$ 或 $x = 8$,

当第三边为 5 时, 则三角形的三边长为 3、5、5, 满足三角形三边关系, 其周长为 13;

当第三边为 8 时, 则三角形的三边长为 3、5、8, 不满足三角形三边关系, 舍去.

则此三角形的周长为 13.

故答案为: 13.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程的解法及三角形三边关系, 求得方程的两根是解题的关键, 注意分类讨论.

15. 把定理“有两个角互余的三角形是直角三角形”，写成“如果……那么……”的形式：_____.

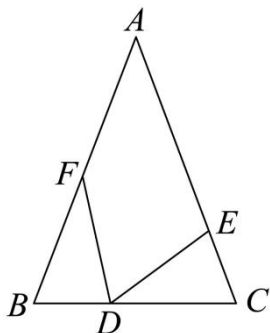
【答案】如果一个三角形有两个角互余，那么这个三角形是直角三角形

【解析】

【详解】解：定理“有两个角互余的三角形是直角三角形”，写成“如果…那么…”的形式：如果一个三角形有两个角互余，那么这个三角形是直角三角形，

故答案为：如果一个三角形有两个角互余，那么这个三角形是直角三角形.

16. 如图在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BF=CD$ ， $BD=CE$ ， $\angle FDE=70^\circ$ ，那么 $\angle A=$ _____.



【答案】 40°

【解析】

【分析】先证明 $\triangle BDF \cong \triangle CED$ ，得到 $\angle BFD = \angle CDE$ ，根据三角形的内角和与平角的定义推出 $\angle FDE$ 与 $\angle B$ 相等，再利用三角内角和定理整理即可得出结论.

【详解】解： $\because AB=AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CED$ 中，
$$\begin{cases} BF = CD \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CED$ (SAS),

$\therefore \angle BFD = \angle CDE$,

$\therefore \angle FDE = 180^\circ - \angle CDE - \angle BDF = 180^\circ - \angle BFD - \angle BDF = \angle B$,

$\because \angle FDE = 70^\circ$,

$\therefore \angle B = 70^\circ$,

$\because \angle B + \angle C + \angle A = 180^\circ$,

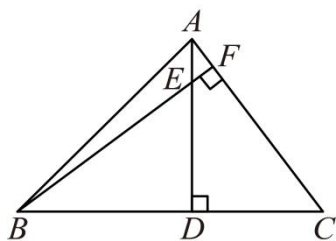
$\therefore \angle A = 40^\circ$.

故答案为： 40° .

【点睛】本题考查了三角形全等的性质与判定. 解题的关键是通过三角形全等利用角的等量代换得到

$$\angle FDE = \angle B.$$

17. 如图：已知在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为 D 在边 BC 上， $BF \perp AC$ 分别交线段 DA 、线段 CA 于点 E 、 F ，若 $BD = 8$ ， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $AE = 2$ ，那么 DC 的长是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】利用已知条件可以得到 $AD = 8$ ， $DE = 6$ ，根据 $\angle AEF + \angle EAF = 90^\circ$ ， $\angle ACD + \angle EAF = 90^\circ$ 得到： $\angle AEF = \angle ACD$ ，再根据对顶角相等得到 $\angle BED = \angle AEF$ ，进一步得到： $\angle BED = \angle ACD$ ，再利用 $BD = AD$ ， $\angle BDE = \angle ADC$ 证明 $\triangle BED \cong \triangle ACD$ 即可求出 CD .

【详解】解： $\because AD \perp BC$ ， $BD = 8$ ， $\angle BAD = 45^\circ$

$$\therefore AD = 8$$

$$\because AE = 2$$

$$\therefore ED = 6,$$

$$\because BF \perp AC$$

$$\therefore \angle AEF + \angle EAF = 90^\circ$$

$$\because \angle ACD + \angle EAF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACD$$

$$\text{又} \because \angle BED = \angle AEF$$

$$\therefore \angle BED = \angle ACD$$

$$\because BD = AD, \angle BDE = \angle ADC$$

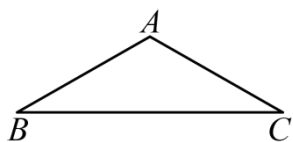
$$\therefore \triangle BED \cong \triangle ACD$$

$$\therefore ED = CD = 6$$

故答案为： 6

【点睛】 本题考查全等三角形的判定定理和性质，勾股定理．掌握全等三角形的判定和性质是解本题的关键．

18. 如图：已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转 20° 得到 $\triangle AB'C'$ ， AB' 所在的直线与直线 BC 交于点 E ，那么 $\angle BEB'$ 的度数是_____.

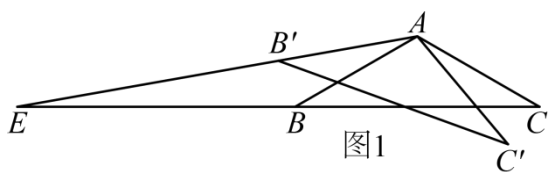


【答案】 10° 或 50°

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针或逆时针旋转 20° 得到 $\triangle AB'C'$ ，由等腰三角形的性质求出 $\angle ABC = 30^\circ$ ，由旋转的性质及三角形外角和定理——三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角和，可得出答案，掌握知识点的应用及分类思想讨论是解题的关键.

【详解】 解：如图1，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 20° 得到 $\triangle AB'C'$ ，



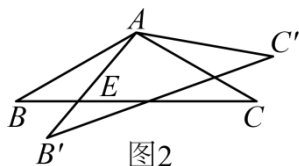
$$\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\because \angle BAE = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BEB' = \angle ABC - \angle BAE = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ;$$

如图2，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 20° 得到 $\triangle AB'C'$ ，



$$\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\because \angle BAE = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BEB' = \angle ABC + \angle BAE = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ;$$

综上所述： $\angle BEB'$ 的度数是 10° 或 50° ，

故答案为： 10° 或 50° .

三、简答题：（本大题共 5 题，每题 6 分，满分 30 分）

$$19. \frac{3}{2}\sqrt{4x} + 2\sqrt{\frac{x}{9}} - x\sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

【答案】 $\frac{8}{3}\sqrt{x} + \sqrt{2x}$

【解析】

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \frac{3}{2}\sqrt{4x} + 2\sqrt{\frac{x}{9}} - x\sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{2x} \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{x} + \sqrt{2x} \end{aligned}$$

20. 解不等式: $\sqrt{3}x - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 2x$.

【答案】 $x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先化简二次根式，然后根据解不等式的方法和步骤解不等式即可；

【详解】 解: $\sqrt{3}x - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 2x$

$$\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} + 2x$$

$$\sqrt{3}x - 2x < \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 2)x < -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(2 - \sqrt{3})x > \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x > \frac{\sqrt{3}}{6} \times (2 + \sqrt{3})$$

$$x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简、二次根式的混合运算、解一元一次不等式；熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

21. 解方程: $(x+1)(x+2) = 2x+4$.

【答案】 $x = -2$ 或 1

【解析】

【分析】先变形得到 $(x+1)(x+2)-2(x+2)=0$ ，然后利用因式分解法解方程.

【详解】原方程可变为： $(x+1)(x+2)=2(x+2)$.

即 $(x+2)(x-1)=0$,

解得： $x=-2$ 或 1 .

【点睛】本题考查了解一元二次方程-因式分解法：先把方程的右边化为 0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式的值就都有可能为 0，这就能得到两个一元一次方程的解，这样也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）.

22. 用配方法解方程： $2x^2+4x-1998=0$.

【答案】 $x_1 = -1+10\sqrt{10}$, $x_2 = -1-10\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据配方法解一元二次方程的步骤求解即可；

【详解】解： $2x^2+4x-1998=0$

$$x^2+2x-999=0$$

$$x^2+2x=999$$

$$x^2+2x+1=999+1$$

$$(x+1)^2=1000$$

$$x+1=\pm 10\sqrt{10}$$

$$x=-1\pm 10\sqrt{10}$$

$$\therefore x_1 = -1+10\sqrt{10} \text{ , } x_2 = -1-10\sqrt{10}$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法；熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

23. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2-(m-5)x=-\frac{1}{2}$ 有两个相等的实数根，求 m 的值及此时方程的根.

【答案】 $m=3$ 时， $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ 或 $m=9$ 时， $x_1=x_2=\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】将方程变形为 $(m-1)x^2-(m-5)x+\frac{1}{2}=0$ ，根据根与系数的关系得 $\Delta=[-(m-5)]^2-4(m-1)\times\frac{1}{2}=0$ ，

解得 $m=3$ 或 $m=9$ ，当 $m=3$ 时代入方程得 $2x^2+2x+\frac{1}{2}=0$ ，解得 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ ，当 $m=9$ 时代入原方程得 $8x^2$

$$-4x + \frac{1}{2} = 0, \text{ 解得 } x_1 = x_2 = \frac{1}{4}.$$

【详解】解： $(m-1)x^2 - (m-5)x = -\frac{1}{2}$

$$(m-1)x^2 - (m-5)x + \frac{1}{2} = 0,$$

根据题意得 $\Delta = [-(m-5)]^2 - 4(m-1) \times \frac{1}{2} = 0,$

解得 $m = 3$ 或 $m = 9,$

当 $m = 3$ 时, $(3-1)x^2 - (3-5)x + \frac{1}{2} = 0$

$$2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

解得 $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2};$

当 $m = 9$ 时, $(9-1)x^2 - (9-5)x + \frac{1}{2} = 0$

$$8x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$$

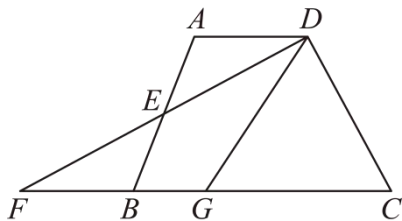
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0,$$

解得 $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}.$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，解一元二次方程，解题的关键是掌握一元二次方程的根与系数的关系.

四、简答题：(本大题共 3 题，第 24、25 每题 6 分，26 题 10 分，满分 22 分)

24. 如图， $AD \parallel BC$ ，点 E 是 AB 的中点，连接 DE 并延长交 CB 的延长线于点 F ，点 G 在边 BC 上，且 $\angle GDF = \angle ADF$.



(1) 求证： $AD = BF$ ；

(2) 当点 G 是 FC 的中点时，判断 $\triangle FDC$ 的形状.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\triangle FDC$ 是直角三角形, 理由见解析.

【解析】

【分析】(1) 由两直线平行内错角相等得到 $\angle ADE = \angle BFE$, 继而证明 $\triangle ADE \cong \triangle BFE$ (AAS), 最后根据全等三角形的对应边相等即可;

(2) 由 $\triangle ADE \cong \triangle BFE$ 得 $DE = FE$, 再结合等腰三角形的三线合一性质得到 $DE = FE$, 根据中位线性质定理得 $GE \parallel CD$, 再由平行线的性质解得 $CD \perp DF$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle BFE,$$

$\because E$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AE = BE,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle BFE \\ \angle AED = \angle BEF, \\ AE = BE \end{cases}$$

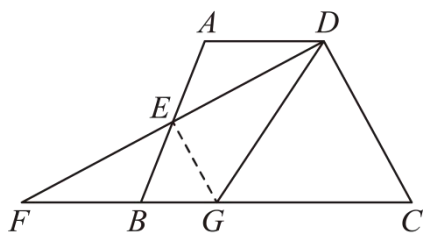
$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BFE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = BF;$$

【小问 2 详解】

解: $\triangle FDC$ 是直角三角形, 理由如下:

如图, 连接 EG ,



$$\therefore \angle GDF = \angle ADE, \quad \angle ADE = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle GDF = \angle BFE,$$

$$\therefore GF = GD,$$

由 (1) 得 $\triangle ADE \cong \triangle BFE$,

$$\therefore DE = FE, \text{ 即 } GE \text{ 为 } DF \text{ 上的中线},$$

$$\therefore GE \perp DF,$$

$$\because \text{点 } G \text{ 是 } FC \text{ 的中点, } DE = FE,$$

$$\therefore EG \text{ 是 } \triangle FDC \text{ 中位线,}$$

$$\therefore GE \parallel CD,$$

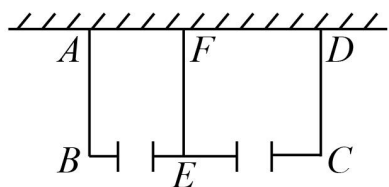
$$\therefore CD \perp DF,$$

$$\therefore \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FDC \text{ 是直角三角形.}$$

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的性质，等腰三角形的判定与性质，中位线性质定理，直角三角形的判定，熟练掌握判定与性质是解题的关键.

25. 如图，某农场有一道长 16 米的围墙，计划用 40 米长的围栏靠墙围成一个面积为 120 平方米的长方形养鸡场，为了方便饲养又用围栏隔出一个储物间，在墙的对面对开了两个 1 米宽的门，求围成长方形养鸡场宽 AB 的长度.



【答案】10 米

【解析】

【分析】设长方形养鸡场 AB 边的长度为 x 米，则 BC 边的长度为 $(42 - 3x)$ 米，根据长方形面积公式列方程得 $x(42 - 3x) = 120$ ，解方程得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 10$ ，根据围墙的长为 16 米得到关于 x 的不等式，确定 x 的取值范围，进而确定 x 的值，问题得解.

【详解】解：设长方形养鸡场 AB 边的长度为 x 米，则 BC 边的长度为 $(42 - 3x)$ 米，

$$\text{由题意得：} x(42 - 3x) = 120,$$

$$\text{整理，得：} x_1 = 4, x_2 = 10.$$

$$\therefore 42 - 3x \leq 16,$$

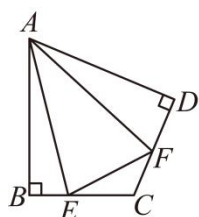
$$\therefore x \geq \frac{26}{3},$$

$$\therefore x = 10.$$

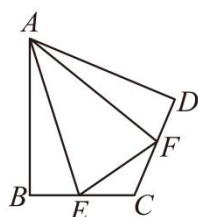
答：围成长方形养鸡场 AB 边的长度为 10 米.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出方程是解题的关键，注意要根据墙长对 x 的值进行取舍.

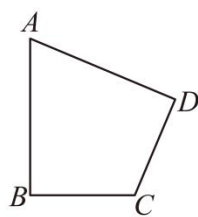
26. 已知, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$.



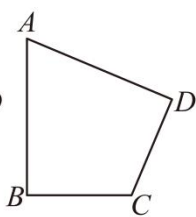
图①



图②



备用图



备用图

(1) 为探究上述问题, 小王同学先画出了其中一种特殊情况, 即如图 1, 当 $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$ 时. 小王同学探究此问题的方法是: 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG . 请在图 1 中添加上述辅助线, 并补全下面的思路.

小明的解题思路: 先证明 $\triangle ABE \cong$ _____; 再证明了 $\triangle AEF \cong$ _____, 即可得出 BE, EF, FD 之间的数量关系为 _____.

(2) 如图②, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, (1) 中的结论是否仍然成立? 请写出证明过程;

(3) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 所在直线上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 请直接写出线段 EF, BE, FD 之间的数量关系: _____.

【答案】 (1) $\triangle ADG$; $\triangle AGF$; $EF = BE + FD$

(2) 成立, 过程见解析

(3) $EF = BE + FD$ 或 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质, 解题的关键是利用截长补短法, 构造全等三角形.

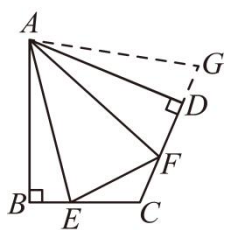
(1) 依据题意, 补图, 补充思路即可;

(2) 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG , 证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$ 即可;

(3) 分三种情况讨论, 分别采用截长补短, 证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$ (SAS) 即可, 再进行线段和差计算.

【小问 1 详解】

解: 补全图形, 如图:



图①

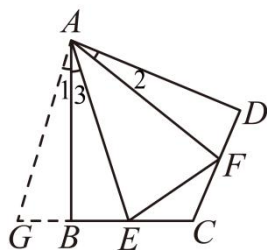
小明的解题思路：先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，再证明了 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，即可得出 BE, EF, FD 之间的数量关系为 $EF = BE + FD$ ，

故答案为： $\triangle ADG$ ， $\triangle AGF$ ， $EF = BE + FD$ ；

【小问 2 详解】

解：(1) 中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

理由是：如图 2，延长 EB 到 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG 。



图②

$$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ, \angle ABG + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ABG = \angle D,$$

$\because$ 在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABG = \angle D, \\ BG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}).$$

$$\therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2} \angle BAD = \angle EAF.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

又 $AE = AE$,

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF.$$

$$\therefore EG = EF.$$

$$\therefore EG = BE + BG.$$

$$\therefore EF = BE + FD;$$

【小问3 详解】

解：① E, F 分别在边 BC, CD 上，则有 $EF = BE + FD$ 成立，第 (2) 问已证明；

② 点 E 在边 BC 延长线上，点 F 在边 CD 延长线上，此时 $EF = BE - FD$ ；

证明：在 BE 上截取 BG ，使 $BG = DF$ ，连接 AG 。

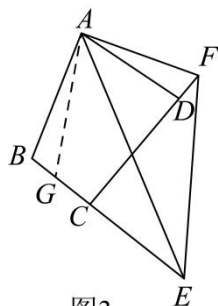


图3

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF.$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABG = \angle ADF, \\ BG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF.$$

$$\therefore \angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

$$\therefore AE = AE,$$

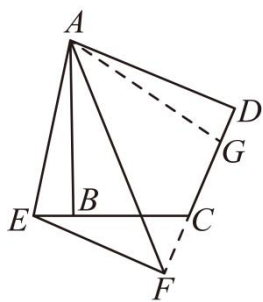
$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore EG = EF$$

$$\therefore EG = BE - BG$$

$$\therefore EF = BE - FD;$$

③ 当点 E 在 CB 延长线，点 F 在 DC 延长线，如图，在 DC 上截取 $DG = BE$ ，连接 AG ，



同上可证明: $\triangle AGF \cong \triangle AEF$,

$$\therefore EF = FG,$$

$$\therefore EF = FG = DF - DG = DF - BE,$$

即 $EF = FD - BE$,

综上所述: 线段 EF , BE , FD 之间的数量关系为 $EF = BE + FD$ 或 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$,

故答案为: $EF = BE + FD$ 或 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$.