

南模初中 2024 学年第一学期八年级期中考试数学试题

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 在下列各式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ C. $\sqrt{a^2 + 4a^4}$ D. $\sqrt{4a^2 - b^2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的条件是解题的关键; 因此此题可根据“被开方数不含有开得尽方的数及分母”进行排除选项即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

C、 $\sqrt{a^2 + 4a^4} = |a|\sqrt{1 + 4a^2}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

D、 $\sqrt{4a^2 - b^2}$ 是最简二次根式, 故符合题意;

故选 D.

2. 根式 $\sqrt{\frac{1}{27}}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}$ 中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的有 () 个

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义, 根据二次根式的性质把各个二次根式化简, 根据同类二次根式的定义: 几个二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 那么这几个二次根式叫做同类二次根式判断即可, 掌握二次根式的性质是解题的关键.

【详解】 解: $\because \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式为 $\sqrt{18}$, 共 1 个,

故选: A.

3. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是 ()

A. $x^2 - x + 1 = 0$

B. $x^2 - mx - 1 = 0$

C. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - x - m = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时方程有解，逐个判断即可.

【详解】解： $\because A$ 、 $x^2 - x + 1 = 0$ ， $\Delta = -3 < 0$ ，故此方程无实数解，不符合题意；

B 、 $\because x^2 - mx - 1 = 0$ ， $\Delta = m^2 + 4 > 0$ ，故此方程有实数解，符合题意；

C 、 $\because \sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$ ， $\Delta = 4 - 4\sqrt{2} < 0$ ，故此方程无实数解，不符合题意；

D 、 $\because x^2 - x - m = 0$ ， $\Delta = 1 + 4m$ （由于 m 的值不确定，故 $1 + 4m$ 可以 ≥ 0 ，可以 < 0 ），故此方程不一定有实数解，不符合题意.

故选：B.

【点睛】此题考查了一元二次方程解得情况，解题的关键是熟练掌握一元二次方程判别式和解得关系. 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，一元二次方程没有实数根.

4. 下列说法中，正确的是（ ）

A. 每个命题不一定都有逆命题

B. 每个定理都有逆定理

C. 真命题的逆命题仍是真命题

D. 假命题的逆命题未必是假命题

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是命题与定理的区别，（1）判断正确的命题叫定理；（2）任何一个命题都有逆命题，但不一定是真命题；不是任何一个定理都有逆定理.

根据逆命题的概念、真假命题的概念判断即可.

【详解】解：A、每个命题都有逆命题，故本选项说法错误，不符合题意；

B、每个定理都有逆命题，不一定有逆定理，故本选项说法错误，不符合题意；

C、真命题的逆命题不一定是真命题，故本选项说法错误，不符合题意；

D、假命题的逆命题不一定是假命题，本选项说法正确，符合题意；

故选：D.

5. 下列命题中是真命题的是 ()

- A. 有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形全等
- B. 两条平行直线被第三条直线所截, 则一组同旁内角的平分线互相垂直
- C. 三角形的一个外角等于两个内角的和
- D. 等边三角形既是中心对称图形, 又是轴对称图形

【答案】B

【解析】

【分析】利用全等三角形的判定方法对 A 进行判断; 根据平行线的性质和角平分线的定义对 B 进行判断; 根据三角形外角性质对 C 进行判断; 根据等边三角形的性质和中心对称的定义对 D 进行判断.

【详解】解: A、有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等, 所以 A 选项为假命题;

B、两条平行直线被第三条直线所截, 则一组同旁内角的平分线互相垂直两直线平行, 所以 B 选项为真命题;

C、三角形的一个外角等于不相邻的两个内角的和, 所以 C 选项为假命题;

D、等边三角形不是中心对称图形, 是轴对称图形, 所以 D 选项为假命题.

故选 B.

【点睛】本题考查了命题与定理: 命题写成“如果…, 那么…”的形式, 这时, “如果”后面接的部分是题设, “那么”后面接的部分是结论. 命题的“真”“假”是就命题的内容而言. 任何一个命题非真即假. 要说明一个命题的正确性, 一般需要推理、论证, 而判断一个命题是假命题, 只需举出一个反例即可.

6. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是二次根式的化简, 二次根式的乘法与除法运算, 熟练掌握二次根式的性质, 二次根式的乘法与除法运算是解题的关键.

根据二次根式的性质和二次根式的乘法与除法运算法则进行判断即可.

【详解】解: $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, 运算正确, 故 A 不符合题意;

$$\because a^2 > 0, \frac{b}{a^2} \geq 0,$$

$$\therefore b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}, \text{ 运算正确, 故 B 不符合题意,}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ 运算正确, 故 C 不符合题意;}$$

当 $a < 0, b < 0$ 时, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 不成立, 故 D 符合题意;

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. $\sqrt{x} + 1$ 的一个有理化因式是 _____.

【答案】 $\sqrt{x} - 1$

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义进行求解即可. 两个含有根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有根式, 那么这两个代数式相互叫做有理化因式.

【详解】 解: $\because (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1,$

$$\therefore \sqrt{x} + 1 \text{ 的一个有理化因式为 } \sqrt{x} - 1.$$

故答案为: $\sqrt{x} - 1$ (答案不唯一).

【点睛】 此题考查了有理化因式的概念和二次根式的运算, 熟练掌握有理化因式的概念和平方差公式是解答此题的关键.

8. 化简: $\sqrt{4ab^3}$ (其中 $a > 0$) = _____.

【答案】 $2b\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的知识; 解题的关键是熟练掌握二次根式的性质, 从而完成求解. 根据二次根式的性质, 得 $b \geq 0$, 再根据二次根式的性质计算, 即可得到答案.

【详解】 解: 根据题意, 得 $4ab^3 \geq 0,$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore 4b^3 \geq 0,$$

$$\therefore b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{4ab^3} = 2b\sqrt{ab},$$

故答案为: $2b\sqrt{ab}$.

9. 若 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 1$, 则 $xy^{\frac{1}{2}} =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式有意义的条件, 熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键; 由题意易得 $x-3 \geq 0, 3-x \geq 0$, 然后可得 $x=3, y=1$, 进而问题可求解.

【详解】 解: 由题意得: $x-3 \geq 0, 3-x \geq 0$,

$\therefore$ 要使 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 1$ 成立, 则需满足 $x-3=0, 3-x=0$, 即 $x=3$,

$$\therefore y=1,$$

$$\therefore xy^{\frac{1}{2}} = 3 \times 1^{\frac{1}{2}} = 3;$$

故答案为 3.

10. 将命题“同角的余角相等”, 改写成“如果..., 那么...”的形式_____.

【答案】 如果两个角是同一个角的余角, 那么这两个角相等

【解析】

【分析】 根据“如果”后面接的部分是题设, “那么”后面接的部分是结论, 即可求解.

【详解】 解: 命题“同角的余角相等”, 可以改写成: 如果两个角是同一个角的余角, 那么这两个角相等.

故答案为: 如果两个角是同一个角的余角, 那么这两个角相等.

11. 若最简二次根式 $\sqrt[2a-4]{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式, 则 $a-2b =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题主要考查同类二次根式及最简二次根式, 熟练掌握同类二次根式的概念是解题的关键; 由题意易得 $\begin{cases} 2a-4=2 \\ 3a+b=a-b \end{cases}$, 然后问题可求解.

【详解】 解: 由题意得:

$$\begin{cases} 2a-4=2 \\ 3a+b=a-b \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases},$

$$\therefore a-2b=3-2\times(-3)=9;$$

故答案为 9.

12. 计算: $(\sqrt{3}+2)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)^{2024} =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{3}+2$

【解析】

【分析】 先利用的积的乘法和平方差公式进行计算, 再根据二次根式的乘法法则进行计算即可.

【详解】 解: $(\sqrt{3}+2)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)^{2024},$

$$= (\sqrt{3}+2)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)$$

$$= [(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)]^{2023} \times (\sqrt{3}-2)$$

$$= (-1)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)$$

$$= -(\sqrt{3}-2)$$

$$= -\sqrt{3}+2,$$

故答案为: $-\sqrt{3}+2$.

【点睛】 本题考查二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的混合运算顺序和运算法则是解题的关键.

13. 不等式 $\sqrt{5}x > \sqrt{3}x + 6$ 的解集是_____.

【答案】 $x > 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式和二次根式分母有理化, 注意最后要进行分母有理化.

按照解不等式的步骤进行即可.

【详解】 解: $\sqrt{5}x > \sqrt{3}x + 6,$

移项得: $\sqrt{5}x - \sqrt{3}x > 6,$

合并同类项得: $(\sqrt{5}-\sqrt{3})x>6$,

$$\text{解得: } x > \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})} = 3\sqrt{5}+3\sqrt{3},$$

即 $x > 3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$;

故答案为: $x > 3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$.

14. 某木器厂今年二月份生产了课桌 500 张, 从三月份起加强了管理, 产量逐月上升, 四月份产量达到 605 张. 如果三、四月份的月增长率相同, 设这个增长率为 x , 则根据题意可列方程为_____.

【答案】 $500(1+x)^2 = 605$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的应用, 熟练掌握一元二次方程的应用是解题的关键; 因此此题可根据增长率问题直接进行求解.

【详解】 解: 由题意可得方程为 $500(1+x)^2 = 605$;

故答案为 $500(1+x)^2 = 605$.

15. 在实数范围内因式分解: $2x^2-3x-7=$ _____.

【答案】 $2\left(x-\frac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{65}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解及一元二次方程的解法, 熟练掌握因式分解及一元二次方程的解法是解题的关键; 可令 $2x^2-3x-7=0$, 然后根据求根公式可得出方程的根, 进而问题可求解.

【详解】 解: 由题意可令 $2x^2-3x-7=0$,

则 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 9 + 56 = 65 > 0$,

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{65}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{65}}{4},$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 7 = 2(x - x_1)(x - x_2) = 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{65}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{65}}{4}\right);$$

$$\text{故答案为 } 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{65}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{65}}{4}\right).$$

16. 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得_____.

【答案】 $-\sqrt{-6x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握二次根式的性质，从而完成求解.

根据二次根式的性质，得 $x < 0$ ，再根据二次根式的性质计算，即可得到答案.

【详解】 解：根据题意，得 $-\frac{6}{x} \geq 0$,

$$\therefore -6 \neq 0,$$

$$\therefore -\frac{6}{x} > 0,$$

$$\therefore x < 0,$$

$$\therefore x\sqrt{-\frac{6}{x}} = -\sqrt{-\frac{6}{x} \times x^2} = -\sqrt{-6x},$$

故答案为： $-\sqrt{-6x}$.

17. 若实数 a 是方程 $3x^2 - 5x - 1 = 0$ 的一个根，则代数式 $2024 + 10a - 6a^2$ 的值是_____.

【答案】 2022

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的根的定义，熟练掌握能使方程左右两边同时成立的未知数的值是方程的解是解题的关键.

根据一元二次方程的根的定义，可得 $3a^2 - 5a = 1$ ，再代入 $2024 + 10a - 6a^2$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because a$ 是关于 x 一元二次方程 $3x^2 - 5x - 1 = 0$ 的一个实数根，

$$\therefore 3a^2 - 5a - 1 = 0,$$

$$\therefore 3a^2 - 5a = 1,$$

$$\therefore 2024 + 10a - 6a^2 = -2(3a^2 - 5a) + 2024 = -2 \times 1 + 2024 = 2022,$$

18. 小明在解方程 $\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$ 时采用了下面的方法: 由

又有 $\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$, 可得 $\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}=8$, 将这两式相加可得 $\sqrt{24-x}=5$,

请你学习小明的方法，解决下列问题：

【答案】 $x=2$ 或 $x=6$

【分析】 本题考查了解无理方程，一元二次方程，平方差公式，先计算

$\sqrt{3x^2+20x-3}-\sqrt{3x^2-4x-3}=6$, 则可以求出 $2\sqrt{3x^2-4x-3}=6+4x$, 再平方, 最后解一元二次方程

【 详 解 】 解 :

又由 $\sqrt{3x^2+20x-3}+\sqrt{3x^2-4x-3}=4x$, 可得 $\sqrt{3x^2+20x-3}-\sqrt{3x^2-4x-3}=6$, 将这两式相加可得

$$2\sqrt{3x^2 - 4x - 3} = 6 + 4x,$$

将 $2\sqrt{3x^2+20x-3}=6+4x$ 两边平方可得: $3x^2+20x-3=(3+2x)^2$

整理得: $x^2 - 8x + 12 = 0$, 解得: $x = 2$ 或 $x = 6$,

经检验 $x=2$ 或 $x=6$ 是原方程的解,

故答案为: $x=2$ 或 $x=6$.

三、简答题：(本大题共 6 题，每题 5 分，满分 30 分)

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查零次幂及二次根式的运算，熟练掌握零次幂及二次根式的运算是解题的关键；因此此题可先对二次根式进行化简，分母有理化，然后再进行求解即可.

$$\text{【详解】 解： 原式} = \sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} - 1 + \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= 2\sqrt{3} - 1 - 1 + 2\sqrt{3} + 2$$

$$= 4\sqrt{3}.$$

$$20. \text{ 计算: } 2\sqrt{\frac{2}{3m}} \div \frac{1}{6}\sqrt{6m} \cdot \sqrt{8m^3}$$

$$\text{【答案】 } 8\sqrt{2m}$$

【解析】

【分析】 先进行分母有理化，然后进行二次根式的乘除运算即可.

$$\text{【详解】 解: } = 2\sqrt{\frac{2}{3m}} \cdot \frac{6}{\sqrt{6m}} \cdot 2m\sqrt{2m}$$

$$= 8\sqrt{2m}$$

故答案为 $8\sqrt{2m}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的混合运算，熟练掌握运算顺序与运算法则是解题的关键.

$$21. \text{ 解方程: } 9(2x-3)^2 = (1-x)^2$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{10}{7}, x_2 = \frac{8}{5}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键；因此此题可根据直接开平方法进行求解方程即可.

$$\text{【详解】 解: } 9(2x-3)^2 = (1-x)^2$$

$$3(2x-3) = \pm(1-x),$$

$$\therefore 3(2x-3) = 1-x \text{ 或 } 3(2x-3) = x-1,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{10}{7}, x_2 = \frac{8}{5}.$$

22. 解方程: $2(x+3)^2 - 3 = 5(x+3)$

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键；因此此题可先对方程进行化简，然后再进行求解方程即可.

【详解】 解：原方程可变形为： $2x^2 + 7x = 0$,

$$\therefore x(2x+7) = 0,$$

解得： $x_1 = 0, x_2 = -\frac{7}{2}$.

23. 解方程: $(3x-1)(x+2) = 2x+4$

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，根据方程特点选择合适的方法求解是解题关键. 先移项，再根据因式分解法求解即可.

【详解】 解： $(3x-1)(x+2) = 2x+4$

$$(3x-1)(x+2) - 2(x+2) = 0$$

$$(3x-1-2)(x+2) = 0$$

$$(3x-3)(x+2) = 0,$$

$$\therefore 3x-3 = 0 \text{ 或 } x+2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -2.$$

24. 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，化简代数式 $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+9}{a}} - 6$ ，并求代数式的值.

【答案】 $\frac{3}{a}\sqrt{a} + 1, 3\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】 此题主要考查了二次根式的化简求值，正确化简代数式是解题关键. 首先判断出 $a-3 < 0$ ，然后对二次根式进行化简，代入数值计算即可解答.

【详解】解：∵ $a = \frac{1}{2}$,

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\therefore a - 3 < 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+9}{a}} - 6 \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{(a-3)^2}{a}} \\ &= \sqrt{a} + 1 + \frac{|a-3|}{\sqrt{a}} \\ &= \sqrt{a} + 1 + \frac{3-a}{a} \sqrt{a} \\ &= \sqrt{a} + 1 + \frac{3\sqrt{a}}{a} - \sqrt{a} \\ &= \frac{3}{a} \sqrt{a} + 1, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = \frac{3}{a} \sqrt{a} + 1 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 = 3\sqrt{2} + 1.$$

四. 解答题 (本大题共 4 题, 第 25 ~ 27 题每题 8 分, 第 28 题 10, 满分 34 分)

25. 一个物流公司因为业务拓展, 计划建造一个面积为 150 平方米的矩形仓库, 为节约材料, 仓库的一边靠墙, 墙长 18 米, 另三边用铁栅栏围成, 且在与墙平行的一边要开一扇 2 米宽的门, 已知铁栅栏材料的总长为 33 米, 求矩形仓库的长与宽应分别为多少米?

【答案】仓库的长和宽分别为 15 米, 10 米

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的应用, 解答本题的关键在于利用图形得出平行于墙的一边长为 $(33 - 2x + 2)$ 米.

设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(33 - 2x + 2)$ 米, 根据矩形面积公式可列出方程, 求出答案.

【详解】解: 设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(33 - 2x + 2)$ 米,

由题意得 $x \cdot (33 - 2x + 2) = 150$,

整理, 得 $2x^2 - 35x + 150 = 0$,

解得: $x_1 = 10, x_2 = 7.5$,

当垂直于墙的边长为 7.5 米, 则平行于墙的长度为 $33 - 15 + 2 = 20$ 米 > 18 米, 舍去;

当垂直于墙的边长为 10 米, 则平行于墙的长度为 $33 - 20 + 2 = 15$ 米;

答: 仓库的长和宽分别为 15 米, 10 米.

26. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 37 = 0$ 的两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $k < 100$, 且 k, x_1, x_2 都是整数, 求 k 的最大值及这种情况下方程的解.

【答案】(1) $k > 37$

(2) k 的最大值为 86, 此时方程的解为 $x_1 = 93, x_2 = 79$

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程根的判别式及根, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键;

(1) 根据一元二次方程根的判别式可得 $\Delta = 4k^2 - 4(k^2 - k + 37) > 0$, 然后进行求解即可;

(2) 由 (1) 及题意可得 $37 < k < 100$, 则方程可变形为 $(x - k)^2 = k - 37$, 然后可得 $k - 37$ 为开方数, 进而问题可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4k^2 - 4(k^2 - k + 37) > 0,$$

解得: $k > 37$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 及题意可得: $37 < k < 100$,

由 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 37 = 0$ 可得: $(x - k)^2 = k - 37$,

$\therefore k, x_1, x_2$ 都是整数,

$\therefore k - 37$ 为开方数,

$\therefore k = 38$ 或 41 或 46 或 53 或 62 或 73 或 86 ,

$\therefore k$ 的最大值为 86,

此时方程为 $(x - 86)^2 = 49$,

解得: $x_1 = 93, x_2 = 79$.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \alpha (0^\circ < \alpha < 45^\circ)$. 将线段 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CD , 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E .

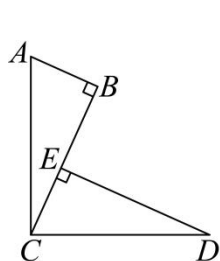


图1

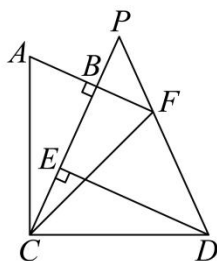
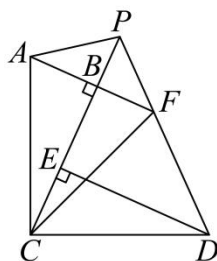


图2



备用图

(1) 如图 1, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle CED$;

(2) 如图 2, $\angle ACD$ 的平分线与 AB 的延长线相交于点 F , 连结 DF , DF 的延长线与 CB 的延长线相交于点 P , 证明: $PC = PD$;

(3) 在 (2) 的条件下, 连结 AP , 当 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 时 $\triangle ACP$ 是等腰三角形.

【答案】 (1) 见详解 (2) 见详解

(3) 15° 或 30°

【解析】

【分析】 (1) 可证得 $\angle D + \angle DCE = 90^\circ$, $\angle DCE + \angle ACB = 90^\circ$, 从而 $\angle ACB = \angle D$, 进而证得 $\triangle ABC \cong \triangle CED$;

(2) 可证得 $\triangle ACF \cong \triangle DCF$, 从而 $\angle A = \angle PDC$, 进而证得 $\angle PDC = \angle DCE$, 从而得出 $PC = PD$;

(3) 由题意可分①当 $AC = PC$ 时, ②当 $AP = AC$ 时, ③当 $AP = PC$ 时, (此种情况不成立), 然后分类进行求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because DE \perp BC$,

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEC,$$

$\because$ 线段 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CD ,

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ, \quad AC = CD,$$

$$\therefore \angle DCE + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle D,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

证明: $\because CF$ 是 $\angle ACD$ 的平分线,

$$\therefore \angle ACF = \angle DCF,$$

由 (1) 知,

$$AC = CD, \triangle ABC \cong \triangle CED,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCE,$$

$$\because CF = CF,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle DCF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle A = \angle PDC,$$

$$\therefore \angle PDC = \angle DCE,$$

$$\therefore PC = PD;$$

【小问 3 详解】

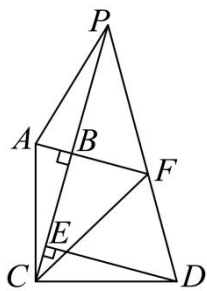
解: 由题意可分: ①当 $\triangle ACP$ 是以 $AC = PC$ 的等腰三角形时, 则有: $AC = PC = PD = CD$,

$\therefore \triangle PCD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle PCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - \angle PCD = 30^\circ = \alpha;$$

②当 $\triangle ACP$ 是以 $AP = AC$ 的等腰三角形时, 如图所示:



$$\therefore \angle ACB = \angle APB = \alpha, \quad CB = PB,$$

$\therefore AF$ 垂直平分 PC ,

$$\therefore PF = CF,$$

$\therefore CF$ 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACF = \angle DCF = 45^\circ,$$

$$\because AF = AF,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle APF (SSS),$$

$$\therefore \angle ACF = \angle APF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PCF = \angle CPF = 45^\circ - \alpha,$$

$$\therefore PC = PD,$$

$$\therefore \angle PCD = \frac{180^\circ - (45^\circ - \alpha)}{2} = \frac{135^\circ + \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ACB + \angle PCD = \alpha + \frac{135^\circ + \alpha}{2} = 90^\circ,$$

解得: $\alpha = 15^\circ$;

③当 $AP = PC$ 时, 则 $\angle ACB = \angle CAP = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$),

$$\therefore \angle APC = 180^\circ - 2\alpha > 90^\circ,$$

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$, 且点 P 在 CB 的延长线上,

$\therefore$ 此种情况是不成立的;

综上所述: 当 $\alpha = 15^\circ$ 或 30° 时, $\triangle ACP$ 是等腰三角形;

故答案为 15° 或 30° .

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定、旋转的性质及等腰三角形的性质与判定, 熟练掌握全等三角形的性质与判定、旋转的性质及等腰三角形的性质与判定是解题的关键.

28. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数解.

(1) 根据求根公式可求得 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1 \cdot x_2 =$ _____. (用含字母 a, b, c 的代数式表示)

(2) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根.

①请用含 k 的代数式表示 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1^2 + x_2^2 =$ _____.

②若实数 k 为整数, 且满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的值也为整数, 则 $k =$ _____.

(3) 若 a, b, c, d 为互不相等的实数, 且满足 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = \frac{8}{27}, (b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = \frac{8}{27}$,
则 $(a^2b^2 - c^2d^2)^{\frac{1}{3}} =$ _____.

【答案】 (1) $-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$

(2) ① $1, \frac{k-1}{2k}$; ② -2 或 -3 或 -5

(3) $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 即可求解;

(2) ① 根据 (1) 中结果 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 代入即可求解;

② 结合 (1) 并结合分式的加减运算、完全平方公式可得 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 - \frac{4}{k+1}$, 再根据 $\frac{2(k-1)}{k+1}$ 为整数, 可得 $k+1 = \pm 1$ 或 ± 2 或 ± 4 , 最后结合 $k < 0$ 即可解答.

(3) 根据题意可知 a^2, b^2 是方程 $(x - c^2)(x - d^2) = \frac{8}{27}$ 的两根, 结合 (1) 中结果即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数解,

根据求根公式可得 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$$\therefore x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a},$$

故答案为: $-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$.

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{-4k}{4k} = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{k+1}{4k},$$

$$\textcircled{1} \therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1^2 - 2 \cdot \frac{k+1}{4k} = \frac{k-1}{2k},$$

故答案为: $1, \frac{k-1}{2k}$.

$$\textcircled{2}\text{解: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{\frac{k-1}{2k}}{\frac{k+1}{4k}}$$

$$= \frac{2(k-1)}{k+1},$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{2(k-1)}{k+1} = \frac{2(k+1)-4}{k+1} = 2 - \frac{4}{k+1} \text{ 的值为整数,}$$

$$\therefore k+1 = \pm 1 \text{ 或 } \pm 2 \text{ 或 } \pm 4,$$

$\therefore$ 方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = (-4k)^2 - 4 \cdot 4k(k+1) > 0, \text{ 解得: } k < 0,$$

$$\therefore k = -2 \text{ 或 } -3 \text{ 或 } -5.$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because a, b, c, d \text{ 为互不相等的实数, 且满足 } (a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = \frac{8}{27}, (b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = \frac{8}{27},$$

$$\text{由此可知 } a^2, b^2 \text{ 是方程 } (x - c^2)(x - d^2) = \frac{8}{27} \text{ 的两根, 即 } x^2 - (c^2 + d^2)x + c^2 d^2 - \frac{8}{27} = 0 \text{ 的两根,}$$

$$\therefore a^2 b^2 = c^2 d^2 - \frac{8}{27},$$

$$\therefore (a^2 b^2 - c^2 d^2)^{\frac{1}{3}} = \left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了求根公式、一元二次方程的解、分数指数幂、根与系数的关系、完全平方公式、根的判别式、分式的混合运算等知识点, 灵活运用相关知识成为解答本题的关键.