

2024 学年第一学期八年级数学学科期中考试试卷

时间：90 分钟 满分：150 分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列二次根式中,与 $\sqrt{3a}$ 属同类二次根式的是()

- A. $\sqrt{9a}$ B. $\sqrt{27a^2}$ C. $\sqrt{18ab^2}$ D. $\sqrt{27ab^2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 先化简，再根据同类二次根式的定义解答.

【详解】 A. $\sqrt{9a}=3\sqrt{a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

B. $\sqrt{27a^2}=3|a|\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

C. $\sqrt{18ab^2}=3|b|\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

D. $\sqrt{27ab^2}=3|b|\sqrt{3a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数相同，则它们是同类二次根式，故本选项正确；

故选 D.

【点睛】 此题主要考查了同类二次根式的定义，即：二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

2. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是 ()

- A. $ax^2+bx+c=0$ B. $3x^2+5=x$
C. $5(x^2-7x)=1+5x^2$ D. $x^2+\frac{1}{x}-1=0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程必须同时满足三个条件：①整式方程，即等号两边都是整式；方程中如果有分母，那么分母中无未知数；②只含有一个未知数；③未知数的最高次数是 2 进行分析即可.

【详解】 A、 $a=0$ 时，不是一元二次方程，故此选项错误；

B、 $3x^2-x+5=0$ 是一元二次方程，故此选项正确；

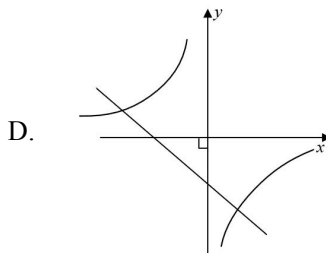
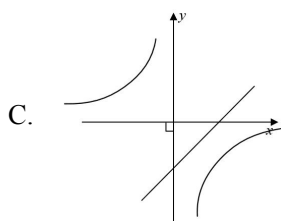
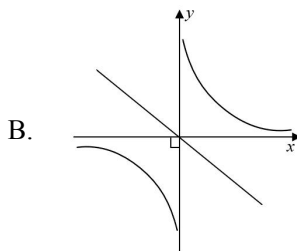
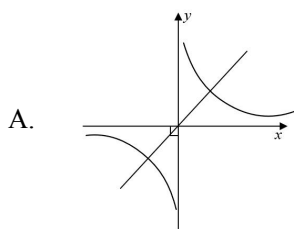
C、化简后得 $-35x=1$ ，未知数的最高次数为 1，不是一元二次方程，故此选项错误；

D、是分式方程，不是一元二次方程，故此选项错误；

故选 B.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程定义，熟练掌握知识点是解题的关键.

3. 若 $ab < 0$, 则函数 $y = ax$ 与 $y = \frac{b}{x}$ 在同一坐标系内的图象大致可能是如图中的 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据 $ab < 0$ 及正比例函数与反比例函数图象的特点, 可以从 $a > 0, b < 0$ 和 $a < 0, b > 0$ 两方面分类讨论得出答案.

【详解】解: $\because ab < 0$,

$\therefore$ 分两种情况:

(1) 当 $a > 0, b < 0$ 时, 正比例函数 $y = ax$ 的图象过原点、第一、三象限, 反比例函数图象在第二、四象限, 无此选项;

(2) 当 $a < 0, b > 0$ 时, 正比例函数 $y = ax$ 的图象过原点、第二、四象限, 反比例函数图象在第一、三象限, 选项 B 符合.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质和正比例函数的图象性质, 根据题意进行分情况讨论, 准确掌握函数图象的性质是解题的关键.

4. 如果二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内不能分解因式, 那么 a 的取值范围是 () .

A. $0 < a < \frac{9}{16}$ 或 $a < 0$

B. $a \neq 0$

C. $a > \frac{9}{16}$

D. $a < \frac{3}{4}$ 且 $a \neq 0$

【答案】C

【解析】

【分析】因二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内不能分解因式, 所以 $ax^2 + 3x + 4 = 0$ 无实数根, 据此求解

即可.

【详解】 $\because$ 二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内不能分解因式,

$\therefore ax^2 + 3x + 4 = 0$ 无实数根,

$\therefore \Delta = 9 - 16a < 0$,

$\therefore a > \frac{9}{16}$.

故选 C.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 以及因式分解法解一元二次方程: 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 那么一元二次方程可整理为 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

5. 下列问题中, 两个变量成反比例的是 ()

- A. 商一定时 (不为零), 被除数与除数
- B. 等边三角形的面积与它的边长
- C. 货物的总价 A 不变, 货物的单价 a 与货物的数量 x
- D. 长方形的长 a 不变时, 长方形的周长 C 与它的宽 b

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了反比例. 两种相关联的量, 一种量变化, 另一种量也随着变化, 如果这两种量相对应的两个数的比值 (也就是商) 一定, 这两种量就叫做成正比例的量, 它们的关系叫做正比例关系, 两种相关联的量, 一种量变化, 另一种量也随着变化, 如果这两种量相对应的两个数的积一定, 这两种量就叫做成反比例的量, 它们的关系叫做反比例关系.

【详解】解: A、商一定时 (不为零), 被除数和除数成正比例关系, 故 A 错误;

B、等边三角形的面积与它的边长不成反比例关系; 故 B 错误;

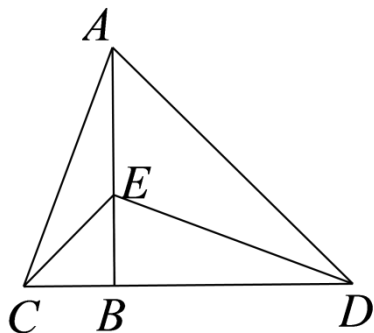
C、货物的总价 A 一定时, 货物的单价 a 与货物的数量 x 成反比例关系; 故 C 正确;

D、长方形的长 a 不变时, 长方形的周长 C 与它的宽 b 不成反比例关系; 故 D 错误.

故选: C

6. 如图, 已知在 $\triangle ACD$ 中, $AB \perp CD$, 且 $BD > BC$, $\triangle BCE$ 和 $\triangle ABD$ 都是等腰直角三角形, 下列结论中正确的有 ()

① $\triangle ABC \cong \triangle DBE$; ② $AC = DE$; ③ $AC \perp DE$; ④ $\angle ACE = \angle ADE$.



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理，三角形外角的性质，等腰直角三角形的性质，熟练掌握共顶点等腰直角三角形中的“手拉手全等模型”是解题的关键．直接利用等腰直角三角形性质即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DBE$ (SAS)，则 $AC = DE$ ，则可判断①②；延长 DE 交 AC 于点 M ，利用 $\triangle ABC \cong \triangle DBE$ ，得 $\angle ACB = \angle DEB$ ，再利用 $\angle DEB + \angle BDE = 90^\circ$ ，可得 $\angle ACB + \angle BDE = 90^\circ$ ，即可判断③；利用 $\angle BCE = \angle BAD = 45^\circ$ ， $\angle ACB = \angle DEB$ ，且 $\angle ACE + \angle BCE = \angle ADE + \angle BAD$ ，即可判断④．

【详解】解： $\because \triangle BCE$ 和 $\triangle ABD$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore BC = BE, AB = BD, \angle CBE = \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBE (\text{SAS}),$$

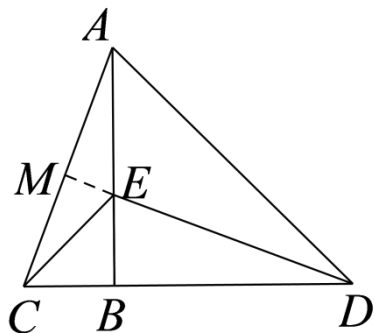
故①正确；

$$\because \triangle ABC \cong \triangle DBE,$$

$$\therefore AC = DE,$$

故②正确；

如图，延长 DE 交 AC 于点 M ，



$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore 180^\circ - (\angle ACB + \angle BDE) = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CMD = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp DE,$$

故③正确;

$$\therefore \triangle BCE \text{ 和 } \triangle ABD \text{ 都是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \angle BCE = \angle BAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle BCE = \angle ADE + \angle BAD,$$

$$\text{即 } \angle ACE + 45^\circ = \angle ADE + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ADE,$$

故④正确;

综上所述, 正确的是①②③④, 有 4 个,

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每空 4 分, 满分 48 分)

7. 当 $mn < 0$ 时, 化简 $\sqrt{m^3 n^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-mn\sqrt{m}$ ## $-nm\sqrt{m}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质即可求出答案.

【详解】解： $\because mn < 0$,

$$\therefore \sqrt{m^3 n^2} = |mn| \sqrt{m} = -mn \sqrt{m},$$

故答案为: $-mn\sqrt{m}$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质与化简, 解题的关键是正确理解二次根式的性质.

8. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 列出不等式组, 解不等式组即可求解.

【详解】 解: 依题意,
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases},$$

解得: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$,

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$.

【点睛】 本题考查了求函数自变量的取值范围, 掌握二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件是解题的关键.

9. 方程 $x(x+1) = x+1$ 的解是_____.

【答案】 $x = \pm 1$

【解析】

【详解】 解: $x(x+1) = x+1$

$$x(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x+1=0 \text{ 或 } x-1=0$$

所以 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

故答案为 ± 1 .

【点睛】 本题是个易错题, 因为不知道 $x+1$ 是否为 0, 所以不能直接利用等式的性质 2 两边除以 $(x+1)$.

10. 已知 $f(x) = \frac{1}{2+x}$, 那么 $f(-\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了函数值的求解, 把 $x = -\sqrt{3}$ 代入函数表达式, 再分母有理化即可得解.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{1}{2+x}$,

$$\therefore f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}.$$

故答案为： $2+\sqrt{3}$.

11. 如果正比例函数 $y = kx^{2k^2+k-2}$ 的图象经过第二，四象限，那么 $k =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的定义，正比例函数的性质，一元二次方程的解法，由正比例函数的性质列出 $\begin{cases} 2k^2+k-2=1 \\ k<0 \end{cases}$ ，然后求解即可，熟练掌握正比例函数定义和正比例函数的性质是解题的关键.

【详解】解：由题意得： $\begin{cases} 2k^2+k-2=1 \\ k<0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} k=1 \text{ 或 } k=-\frac{3}{2} \\ k<0 \end{cases}$,

解得： $k = -\frac{3}{2}$,

故答案为： $-\frac{3}{2}$.

12. 一个三角形的两边长分别为3和6，第三边的长是方程 $(x-2)(x-4)=0$ 的一个根，则这个三角形的周长是_____.

【答案】 13

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解方程 $(x-2)(x-4)=0$ ，根据三角形三边的关系得到三角形第三边的长为4，然后计算三角形的周长.

【详解】解： $(x-2)(x-4)=0$,

$x-4=0$ 或 $x-2=0$,

所以 $x_1=4$, $x_2=2$,

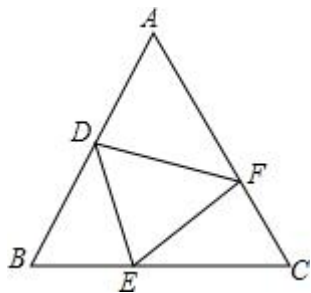
因为 $2+3<6$ ，所以 $x=2$ 舍去，

所以三角形第三边的长为4，

所以三角形的周长 $= 3+6+4=13$,

故答案为：13.

13. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BD = CE$ ， $BE = CF$ ，若 $\angle A = 50^\circ$ ，则 $\angle DEF$ 的度数是_____.



【答案】 65°

【解析】

【分析】 首先证明 $\triangle DBE \cong \triangle ECF$ ，进而得到 $\angle EFC = \angle DEB$ ，再根据三角形内角和计算出 $\angle CFE + \angle FEC$ 的度数，进而得到 $\angle DEB + \angle FEC$ 的度数，然后可算出 $\angle DEF$ 的度数.

【详解】 解： $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} BD = EC \\ \angle B = \angle C, \\ EB = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ECF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle EFC = \angle DEB,$$

$$\because \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle C = (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE + \angle FEC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB + \angle FEC = 115^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ,$$

故答案为： 65° .

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质和判定，以及三角形内角和的定理，关键是熟练掌握三角形内角和是 180° .

14. 已知反比例函数 $y = \frac{1-2m}{x}$ 的图象上两点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，当 $x_1 < 0 < x_2$ 时，有 $y_1 < y_2$ ，则 m 的取值范围是 _____

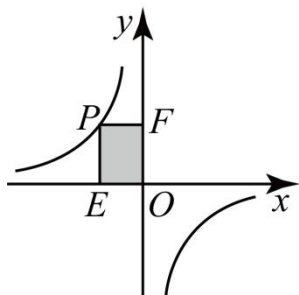
【答案】 $m < \frac{1}{2}$

【解析】

【详解】当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$ 根据两种图象特点可知, 此时 $k > 0$, 所以 $1-2m > 0$, 解不等式得 $m < 1/2$.
故答案为 $m < 1/2$.

15. 如图, P 是反比例函数图象在第二象限上的一点, 且矩形 $PEOF$ 的面积为 8, 则反比例函数的表达式是

_____.



【答案】 $y = -\frac{8}{x}$

【解析】

【分析】因为过双曲线上任意一点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的矩形的面积 S 是个定值, 即 $S = |k|$, 再结合反比例函数所在的象限即可得到 k 值, 则反比例函数的解析式即可求出.

【详解】设反比例函数的表达式是 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

由题意知, $S_{\text{矩形}PEOF} = |k| = 8$,

所以 $k = \pm 8$,

又反比例函数图象在第二象限上, $k < 0$,

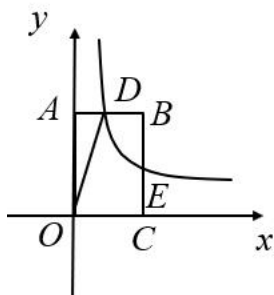
$\therefore k = -8$,

即反比例函数的表达式是 $y = -\frac{8}{x}$,

故答案为: $y = -\frac{8}{x}$.

【点睛】本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义, 本知识点是中考重要考点, 同学们应高度关注.

16. 如图, 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 经过矩形 $OABC$ 的边 BC 的中点 E , 交 AB 于点 D , 若梯形 $ODBC$ 的面积为 3, 则双曲线的解析式为_____.

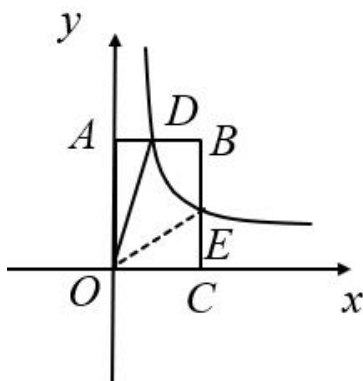


【答案】 $y = \frac{2}{x}$

【解析】

【分析】由题意先根据图形之间的关系可知 $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OEC} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} OABC}$ ，则可求得 $\triangle OCE$ 的面积，根据反比例函数系数的几何意义即可求解。

【详解】解：如图连接 OE ，



$\because$ 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 经过矩形 $OABC$ 的边 BC 的中点 E ，

$$\therefore S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OEC} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} OABC} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形} ODBC} = 1,$$

$$\therefore k = 2,$$

则双曲线的解析式为 $y = \frac{2}{x}$ 。

故答案为： $y = \frac{2}{x}$ 。

【点睛】本题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 中 k 的几何意义。主要体现了数形结合的思想，解答此类题一定要正确理解 k 的几何意义。

17. 如果一个四边形的一条对角线把它分成两个等腰三角形，那么我们就称这条对角线是四边形的“美丽线”。已知 AC 是四边形 $ABCD$ 的“美丽线”，如果 $AB = BC = AC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，那么 $\angle BCD =$ _____ $^\circ$ 。

【答案】 135 或 90 或 45

【解析】

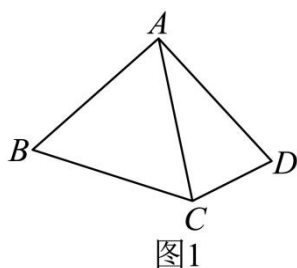
【分析】由 AC 是四边形 $ABCD$ 的美丽线，可以得出 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，从图1，图2，图3三种情况运用等边三角形的性质和判定，正方形的性质和判定和 30° 角的直角三角形的性质就可以求出 $\angle BCD$ 的度数.

【详解】解： $\because AC$ 是四边形 $ABCD$ 的美丽线，

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形.

$\because AB = AD = BC$,

如图1，当 $AD = AC$ 时，



$\therefore AB = AC = BC$, $\angle ACD = \angle ADC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是正三角形，

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$.

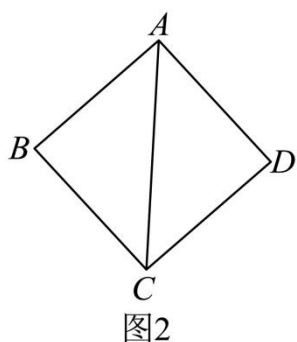
$\because \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle ADC = 75^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ$.

如图2，当 $AD = CD$ 时，



$\therefore AB = AD = BC = CD$.

$\because \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

如图3，当 $AC = CD$ 时，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，过点 B 作 $BF \perp CE$ 于 F ，

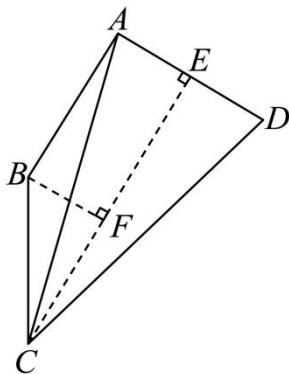


图3

$$\begin{aligned} &\because AC = CD, \quad CE \perp AD, \\ &\therefore AE = \frac{1}{2}AD, \quad \angle ACE = \angle DCE. \end{aligned}$$

$$\because \angle BAD = \angle AEF = \angle BFE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形.

$$\therefore BF = AE.$$

$$\because AB = AD = BC,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle BCF = 30^\circ.$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle BAC.$$

$$\because AB \parallel CE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE = \frac{1}{2}\angle BCF = 15^\circ,$$

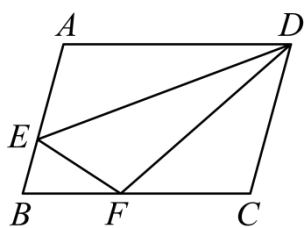
$$\therefore \angle BCD = 15^\circ \times 3 = 45^\circ.$$

综上， $\angle BCD$ 的度数为 135° 或 90° 或 45° .

故答案为：135 或 90 或 45.

【点睛】 本题考查了四边形的“美丽线”的定义和性质的运用，“美丽线”的判定，等边三角形的性质和判定的运用，矩形的性质与判定，正方形的性质和判定的运用， 30° 角的直角三角形的性质的运用. 解答如图 3 这种情况容易忽略，解答时合理运用分类讨论思想是关键.

18. 如图所示，已知 E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 上一点，将 ADE 沿直线 DE 折叠，点 A 恰好落在边 BC 上的点 F 处，如果 $\triangle BEF$ 的周长为 7， $\triangle CDF$ 的周长为 15，那么 CF 的长等于_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质及翻折变换，由折叠性得 $AE = EF$ ， $DF = AD$ ，根据题意可得 $AB + BF = 7$ ， $DC + AD + FC = 15$ ，则 $AB + BF + DC + AD + FC = 22$ ，再根据平行四边形的性质可得 $AD + DC = 11$ ，从而求解，掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】 解：由折叠性得 $AE = EF$ ， $DF = AD$ ，

$\therefore \triangle BEF$ 的周长为 7， $\triangle CDF$ 的周长为 15，

$\therefore EF + BE + BF = AB + BF = 7$ ， $DC + DF + FC = DC + AD + FC = 15$ ，

$\therefore \triangle BEF$ 的周长 + $\triangle CDF$ 的周长 = 平行四边形 $ABCD$ 的周长 = 22，

$\therefore AB + BF + DC + AD + FC = 22$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = DC$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore AD + DC = 11$ ，

$\therefore CF = \triangle CDF$ 的周长 - $(AD + DC) = 15 - 11 = 4$ ，

故答案为：4。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ 。

【答案】 $-5 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的乘除运算法则化简，先算乘除，再利用二次根式的加减运算法则计算得出答案。

【详解】 解： $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

$$\begin{aligned}
&= 3\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} - |\sqrt{3}-2| \\
&= 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3} \\
&= -5 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可．在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍．

20. 解方程： $\frac{3}{2}y\left(y - \frac{8}{3}\right) = 3y - 4$.

【答案】 $y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 先将原方程整理，化为一元二次方程的一般形式后，再运用分解因式法求解即可．

【详解】 $\frac{3}{2}y^2 - 4y = 3y - 4$

$$\frac{3}{2}y^2 - 7y + 4 = 0$$

$$3y^2 - 14y + 8 = 0$$

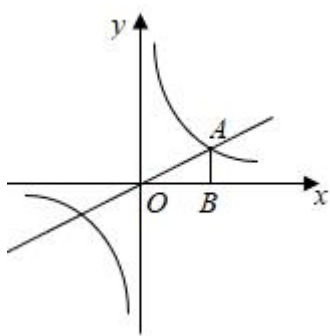
$$(y-4)(3y-2) = 0$$

$$y-4=0 \text{ 或 } 3y-2=0$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{2}{3}$$

【点睛】 本题主要考查对解一元二次方程——因式分解法的理解和掌握，能把一元二次方程转换成一元一次方程是解此题的关键．

21. 已知：如图，在平面直角坐标系中，正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象交于点 $A(2, m)$ ，过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 B．



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 如果点 C 在 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象上，且 $\triangle CAB$ 的面积为 $\triangle OAB$ 面积的 2 倍，求点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$

(2) 点 C 的坐标为 $(6, 3)$ 或 $(-2, -1)$

【解析】

【分析】(1) 把 A 的坐标为 $(2, m)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$ ，求得 m ，然后根据待定系数法即可求得反比例函数的解析式；

(2) 先求出点 C 的横坐标，代入 $y = \frac{1}{2}x$ 求得纵坐标，即可得到 C 的坐标.

【小问 1 详解】

解：∵ 点 A 在函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象上，点 A 的坐标为 $(2, m)$ ，

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 坐标为 } (2, 1).$$

∵ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上，

$$\therefore 1 = \frac{k}{2}, \text{ 解得 } k = 2.$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{2}{x};$$

【小问 2 详解】

解：由题意可知点 C 到 AB 的距离 $= 2OB$ ，设点 C 的横坐标是 c ，

$$\therefore \text{点 } A \text{ 坐标为 } (2, 1).$$

$$\therefore |c - 2| = 2 \times 2,$$

$$\therefore c = 6 \text{ 或 } -2,$$

$$\therefore C \text{ 的横坐标为 } 6 \text{ 或 } -2,$$

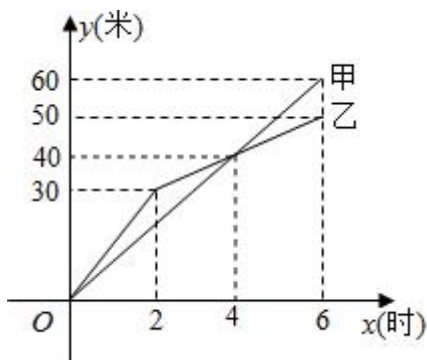
把 $x=6$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$ 得 $y=3$ ；把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$ 得 $y=-1$ ，

$\therefore C$ 的坐标为 $(6,3)$ 或 $(-2,-1)$ 。

【点睛】此题是反比例函数与一次函数的交点问题，主要考查了待定系数法，一次函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，解本题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型。

22. 浦东新区在创建文明城区的活动中，有两段长度相等的彩色道砖路面的铺设任务，分别交给甲、乙两个施工队同时进行施工.如图是反映所铺设的彩色道砖路面的长度 y （米）与施工时间 x （时）之间关系的部分图像.请根据题意回答下列问题：

- (1) 甲队每小时施工_____米；
- (2) 乙队在 $0 \leq x \leq 2$ 时段内， y 与 x 之间的函数关系式是_____；
- (3) 在 $2 \leq x \leq 6$ 时段内，甲队比乙队每小时快_____米；
- (4) 如果甲队施工速度不变，乙队在 6 小时后，施工速度增加到 12 米/时，结果两队同时完成了任务.则甲队从开始施工到完工所铺设的彩色道砖路面的长度为_____米。



【答案】(1)10；(2) $y=15x$ ；(3)5；(4)110

【解析】

【分析】(1) 用甲的工作总量 $60 \div$ 工作的时间 6，即可得到答案；

(2) 设函数解析式 $y=kx$ ，将点 $(2, 30)$ 代入求 k 的值即可；

(3) 根据图象分别求出甲、乙的工作效率即可得到答案；

(4) 设铺设的彩色道砖路面的长度为 a 米，根据两队同时完成了任务列出方程求出 a 的值。

【详解】(1) 甲每小时施工： $60 \div 6=10$ （米），

故答案为：10

(2) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时，设 $y=kx$ ，

将 $(2, 30)$ 代入，得 $2k=30$ ，

解得 $k=15$ ，

故答案为: $y=15x$;

(3) 当 $2 \leq x \leq 6$ 时, 甲每小时的工作量为 10 米;

乙每小时的工作量为: $\frac{50-30}{6-2} = 5$ (米),

$\therefore$ 甲队比乙队每小时快 $10-5=5$ 米,

故答案为: 5;

(4) 设铺设的每条彩色道砖路面的长度为 a 米,

由题意得: $\frac{a-60}{10} = \frac{a-50}{12}$,

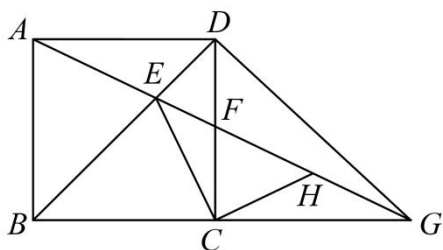
解得 $a=110$,

经检验, $a=110$ 是原方程的解,

故答案为: 110.

【点睛】此题考查一次函数的应用, 对图象上点的意义的理解, 利用待定系数法求函数解析式, (4) 中根据设修路的总长度是解题的关键, 利用时间相等得到方程, 再解方程即可.

23. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = CD$, $\angle ADC = 90^\circ$, DB 平分 $\angle ADC$, 点 F 在 CD 边上, 射线 AF 交 BD 于点 E , 交 BC 的延长线于点 G .



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CDE$;

(2) 过点 C 作 $CH \perp CE$, 交 FG 于点 H , 求证: $FH = GH$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由 DB 平分 $\angle ADC$ 可得 $\angle ADE = \angle CDE = \frac{1}{2} \angle ADC$, 再结合已知条件 $AD = CD$, 利用 SAS

即可得出结论;

(2) 由全等三角形的性质可得 $\angle DAE = \angle DCE$, 由两直线平行内错角相等可得 $\angle DCG = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle CGH = \angle DAE$, 进而可得 $\angle GCH = \angle CGH$, 由等角对等边可得 $CH = GH$, 由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle GCH + \angle FCH = \angle CGH + \angle CFH = 90^\circ$, 于是可得 $\angle FCH = \angle CFH$, 由等角对等边可得

$CH = FH$ ，于是结论得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because DB$ 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \frac{1}{2} \angle ADC,$$

$$\because AD = CD, DE = DE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle ADE \cong \triangle CDE$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE,$$

$$\because CE \perp CH,$$

$$\therefore \angle DCE + \angle FCH = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCG = \angle ADC = 90^\circ, \angle CGH = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle GCH + \angle FCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle DCE = \angle DAE = \angle CGH,$$

$$\therefore CH = GH,$$

$$\because \angle GCH = \angle CGH, \angle GCH + \angle FCH = \angle CGH + \angle CFH = 90^\circ,$$

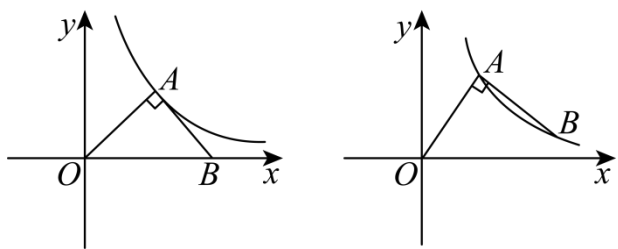
$$\therefore \angle FCH = \angle CFH,$$

$$\therefore CH = FH,$$

$$\therefore FH = GH.$$

【点睛】 本题主要考查了角平分线的有关计算，全等三角形的判定与性质，两直线平行内错角相等，根据等角对等边证明边相等，直角三角形的两个锐角互余等知识点，熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.

24. 已知在平面直角坐标中，点 $A(m,n)$ 在第一象限内， $AB \perp OA$ 且 $AB = OA$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 A，



(1) 当点 B 的坐标为 $(6, 0)$ 时 (如图), 求这个反比例函数的解析式;

(2) 当点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 且在点 A 的右侧时 (如图 2), 用含字母 m, n 的代数式表示点 B 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 求 $\frac{m}{n}$ 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{9}{x}$ (2) $B(m+n, n-m)$ (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 过 A 作 $AC \perp OB$, 根据三角形 AOB 为等腰直角三角形, 得到 $AC=OC=BC=\frac{1}{2}OB$, 确定出 A 坐标, 代入反比例解析式求出 k 的值, 即可确定出反比例解析式;

(2) 过 A 作 $AE \perp x$ 轴, 过 B 作 $BD \perp AE$, 利用同角的余角相等得到一对角相等, 再由一对直角相等, 且 $AO=AB$, 利用 AAS 得出三角形 AOE 与三角形 ABD 全等, 由确定三角形的对应边相等得到 $BD=AE=n$, $AD=OE=m$, 进而表示出 ED 及 $OE+BD$ 的长, 即可表示出 B 坐标;

(3) 由 A 与 B 都在反比例图像上, 得到 A 与 B 横纵坐标乘积相等, 列出关系式, 变形后即可求出 $\frac{m}{n}$ 的值.

【详解】 解: (1) 如图 1, 过 A 作 $AC \perp OB$, 交 x 轴于点 C ,

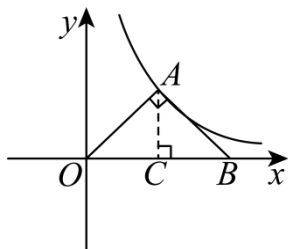


图1

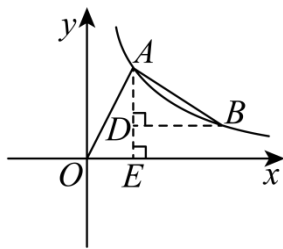


图2

$$\because OA=AB, \angle OAB=90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AC=OC=BC=\frac{1}{2}OB=3,$$

$\therefore A(3, 3)$,

将 $x=3, y=3$ 代入反比例解析式得: $3=\frac{k}{3}$, 即 $k=9$,

则反比例解析式为 $y=\frac{9}{x}$;

(2) 如图 2, 过 A 作 $AE \perp x$ 轴, 过 B 作 $BD \perp AE$,

$\therefore \angle OAB=90^\circ$,

$\therefore \angle OAE + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOE + \angle OAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle AOE$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOE = \angle BAD \\ \angle AEO = \angle BDA = 90^\circ \\ AO = BA \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BAD$ (AAS),

$\therefore AE = BD = n, OE = AD = m$,

$\therefore DE = AE - AD = n - m, OE + BD = m + n$,

则 $B(m+n, n-m)$;

(3) 由 A 与 B 都在反比例图象上, 得到 $mn = (m+n)(n-m)$,

整理得: $n^2 - m^2 = mn$, 即 $(\frac{n}{m})^2 + \frac{m}{n} - 1 = 0$,

这里 $a=1, b=1, c=-1$,

$\therefore \Delta = 1 + 4 = 5$,

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

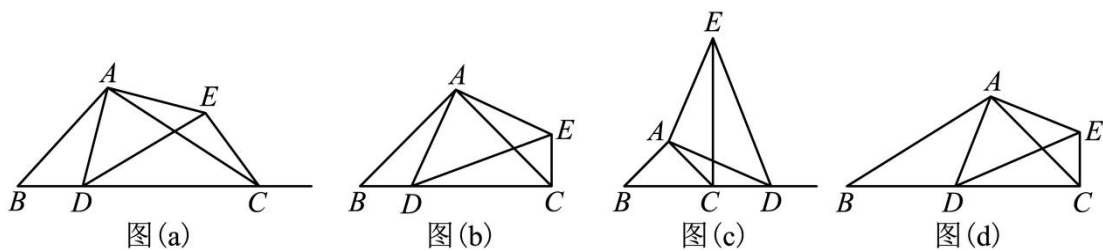
$\therefore A(m, n)$ 在第一象限,

$\therefore m > 0, n > 0$,

$$\text{则 } \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点睛】本题属于反比例函数综合题, 涉及的知识有: 全等三角形的判定与性质, 坐标与图形性质, 等腰直角三角形的性质, 以及一元二次方程的解法, 熟练掌握反比例函数的性质是解本题的关键.

25. 如图 (a) 所示, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB$ 为锐角, 点 D 为射线 BC 上一点, 连接 AD, 以 AD 为一边且在 AD 的右侧作等腰直角 $\triangle ADE$. 解答下列问题:



(1) 如果 $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$.

①如图 (b) 所示, 当点 D 在线段 BC 上时 (与点 B 不重合), 线段 CE , BD 之间的位置关系为_____, 数量关系为_____.

②如图 (c) 所示, 当点 D 在线段 BC 的延长线上时, ①中的结论是否仍然成立, 如果不成立, 请说明理由, 如果成立, 请加以证明.

(2) 如图 (d) 所示, 如果 $AB \neq AC$, $\angle BAC \neq 90^\circ$, 点 D 在线段 BC 上运动. 试探究: 当 $\angle ACB = 45^\circ$ 时, $CE \perp BC$ 吗 (点 C , E 重合除外)? 请说明理由.

【答案】 (1) ① $CE \perp BD$; $BD = CE$; ② 结论仍然成立, 理由见解析

(2) $CE \perp BC$, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 熟练掌握“手拉手模型”, 并会通过辅助线构造模型是解题的关键.

(1) ①先证 $\angle BAD = \angle CAE$, 再证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), 则可得 $BD = CE$, $\angle ABD = \angle ACE = 45^\circ$, 即可求证; ②方法同①即可证明;

(2) 过点 A 作 $AF \perp AC$, 交 BC 于点 F , 构造等腰直角三角形 AFC , 分当点 D 在点 F 右边时, 和当点 D 在点 F 左边时, 两种情况, 再同 (1) 中方法证明 $\triangle AFD \cong \triangle ACE$ (SAS) 即可得.

【小问 1 详解】

解: ① $\because ADE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DAE = 90^\circ$, $AD = AE$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAE - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC$,

即 $\angle BAD = \angle CAE$,

又 $\because AB = AC$, $AD = AE$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS),

$$\begin{aligned}\therefore BD &= CE, \quad \angle ABD = \angle ACE = 45^\circ, \\ \therefore \angle BCE &= \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \\ \therefore CE &\perp BD,\end{aligned}$$

故答案为: $CE \perp BD$; $BD = CE$;

②结论仍然成立, 理由如下:

$$\begin{aligned}\because ADE &\text{ 是等腰直角三角形}, \\ \therefore \angle DAE &= 90^\circ, \quad AD = AE, \\ \because \angle BAC &= 90^\circ, \quad AB = AC, \\ \therefore \angle DAE &= \angle BAC = 90^\circ, \quad \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ, \\ \therefore \angle DAE + \angle DAC &= \angle BAC + \angle DAC, \\ \text{即 } \angle BAD &= \angle CAE,\end{aligned}$$

$$\text{又 } \because AB = AC, \quad AD = AE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

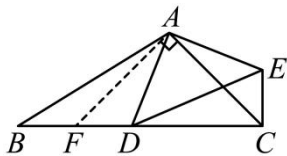
$$\begin{aligned}\therefore BD &= CE, \quad \angle ABD = \angle ACE = 45^\circ, \\ \therefore \angle BCE &= \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \\ \therefore CE &\perp BD,\end{aligned}$$

综上所述, $CE \perp BD$, $BD = CE$;

【小问 2 详解】

解: 过点 A 作 $AF \perp AC$, 交 BC 于点 F,

当点 D 在点 F 右边时, 如图,



$$\begin{aligned}\therefore \angle FAC &= 90^\circ, \\ \because \angle ACB &= 45^\circ, \\ \therefore \angle AFC &= 180^\circ - \angle FAC - \angle ACB = 45^\circ, \\ \therefore AF &= AC, \\ \because ADE &\text{ 是等腰直角三角形}, \\ \therefore \angle DAE &= 90^\circ, \quad AD = AE, \\ \therefore \angle FAC &= \angle DAE = 90^\circ,\end{aligned}$$

$$\therefore \angle FAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC ,$$

$$\text{即 } \angle FAD = \angle CAE ,$$

$$\text{又} \because AF = AC , \quad AD = AE ,$$

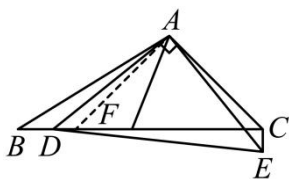
$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle ACE (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ACE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ ,$$

$$\therefore CE \perp BC ;$$

当点 D 在点 F 左边时, 如图,



$$\therefore \angle FAC = 90^\circ ,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle AFC = 180^\circ - \angle FAC - \angle ACB = 45^\circ ,$$

$$\therefore AF = AC , \quad \angle AFD = 180^\circ - \angle AFC = 135^\circ ,$$

$$\because \triangle ADE \text{ 是等腰直角三角形} ,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ , \quad AD = AE ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FAC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAE - \angle EAF = \angle FAC - \angle EAF ,$$

$$\text{即 } \angle FAD = \angle CAE ,$$

$$\text{又} \because AF = AC , \quad AD = AE ,$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle ACE (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ACE = 135^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACE - \angle ACB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ ,$$

$$\therefore CE \perp BC .$$

综上所述, 当 $\angle ACB = 45^\circ$ 时, $CE \perp BC$.