

上海市延安初级中学 2024 学年第一学期初二年级数学学科期中阶段性 测试试卷

(测试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列二次根式是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{30a}$

B. $\sqrt{0.125}$

C. $\sqrt{x^4 - x^2}$

D. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是最简二次根式的定义, 利用完全平方公式、提公因式进行化简是解题的关键, 化简后根据最简二次根式的定义判断即可.

【详解】A. $\sqrt{30a}$ 是最简二次根式, 符合题意;

B. $\sqrt{0.125} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

C. $\sqrt{x^4 - x^2} = \sqrt{x^2(x^2 - 1)} = |x|\sqrt{x^2 - 1}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

D. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选 A.

2. 下列关于 x 方程中, 一定是一元二次方程的是 ()

A. $x^2 = \frac{1}{x^2}$

B. $ax^2 + bx + c = 0$

C. $x^2 = (x - 1)(x + 2)$

D. $x^2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义, 只含有一个未知数, 且未知数的最高次为 2 的整式方程叫做一元二次方程, 据此求解即可.

【详解】解: A、 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 不是整式方程, 不是一元二次方程, 不符合题意;

B、当 $a = 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 不是一元二次方程, 不符合题意;

C、 $x^2 = (x-1)(x+2)$ ，即 $x-2=0$ 未知数的最高次不是 2，不是一元二次方程，不符合题意；

D、 $x^2=0$ 是一元二次方程，符合题意；

故选：D.

3. 下列函数中，在定义域内 y 随 x 的增大而增大的函数是 ()

- A. $y = -2x$; B. $y = 2x$; C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的增减性有限制条件（即范围），不连贯；一次函数 $y = kx + b$ ， $k > 0$ 时 y 随 x 的增大而增大， $k < 0$ 时 y 随 x 的增大而减小.

【详解】A、 $y = -2x$ ， y 随 x 的增大而减小，不符合题意；

B、 $y = 2x$ ， y 随 x 的增大而增大，

C、 $y = \frac{2}{x}$ ，考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，不符合题意；

D、 $y = -\frac{2}{x}$ 考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数、反比例函数的增减性；关键是明确各函数的增减性的限制条件.

4. 下列关于 x 的二次三项式中，一定能在实数范围内因式分解的是 ()

- A. $2x^2 + 1$ B. $x^2 + x + 2$
C. $3x^2 + kx - 1$ D. $x^2 - x + k$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了多项式的因式分解，涉及了一元二次方程根的情况与判别式的关系，解题的关键是将因式分解问题转化为一元二次方程根的情况与判别式的关系. 对每个选项，令值为 0，得到一元二次方程，计算判别式的值，即可判断在实数范围内一定能分解因式的二次三项式.

【详解】解：A、当 $2x^2 + 1 = 0$ 时， $\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 1 = -8 < 0$ ，在实数范围内不能因式分解，不符合题意；

B、当 $x^2 + x + 2$ 时， $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ ，在实数范围内不能因式分解，不符合题意；

C、 $3x^2 + kx - 1 = 0$ 时， $\Delta = k^2 - 4 \times 3 \times (-1) = k^2 + 12 > 0$ ，在实数范围内能因式分解，符合题意；

D、当 $x^2 - x + k$ 时, $\Delta = (-1)^2 - 4k = 1 - 4k$, 在实数范围内不一定能因式分解, 不符合题意;

故选: C.

5. 下列说法错误的是 ()

A. 变量 $x+2$ 是变量 x 的函数;

B. 变量 x 是变量 $x+2$ 的函数;

C. 当速度一定时, 路程与时间成正比例;

D. 当三角形的一边长一定时, 它的面积与这边上的高成反比例.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查函数的概念, 成反比例和正比例的定义等知识, 利用相关知识点对各选项逐项判定即可.

【详解】解: A、当变量 x 的值确定时, 变量 $x+2$ 也唯一, 故变量 $x+2$ 是变量 x 的函数, 此选项正确, 不符合题意;

B、当变量 $x+2$ 的值确定时, 变量 x 也唯一, 故变量 x 是变量 $x+2$ 的函数, 此选项正确, 不符合题意;

C、当速度一定时, 路程与时间的比值不变, 即路程与时间成正比例, 此选项正确, 不符合题意;

D、当三角形的一边长一定时, 它的面积与这边上的高之比是这边长的一半, 比值为定值, 即它的面积与这边上的高成正比例, 此选项错误, 符合题意.

故选: D.

6. 下列说法正确的是 ()

A. 把 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外的 a 移入根号内, 得 $a\sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{-a}$;

B. 二次三项式 $x^4 - 2x^2 - 8$ 因式分解的结果为 $(x^2 + 4)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$;

C. 如果点 A 在直线 $y = kx (k \neq 0)$ 上, 将点 A 绕点 O 旋转 90° , 点 A 的对应点为点 B, 那么点 B 一定在直线 $y = -kx (k \neq 0)$ 上;

D. 如果点 A 在双曲线 $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 上, 将点 A 绕点 O 旋转 90° , 点 A 的对应点为点 B, 那么点 B 一定在双曲线 $y = -\frac{m}{x} (m \neq 0)$ 上.

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了化简二次根式, 因式分解, 坐标与图形变化—旋转, 全等三角形的性质与判定,

一次函数与反比例函数的性质等等，根据题意可得 $a < 0$ ，再根据二次根式的性质求解即可判断 A；先把原式变形为 $x^4 - 2x^2 + 1 - 9$ ，再利用平方差公式和完全平方公式分解因式即可判断 D；过点 A、B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C、D，设 $A(s, t)$ ，证明 $\triangle DOB \cong \triangle CAO (AAS)$ ，可推出 $B(t, -s)$ ，据此可判断 C、D.

【详解】解：A、 $\because a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 有意义，

$$\therefore -\frac{1}{a} > 0,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{-\frac{1}{a} \cdot a^2} = -\sqrt{-a}, \text{ 原说法错误, 不符合题意;}$$

$$\text{B、 } x^4 - 2x^2 - 8$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 - 9$$

$$= (x^2 - 1)^2 - 9$$

$$= (x^2 - 1 + 3)(x^2 - 1 - 3)$$

$$= (x^2 + 2)(x + 2)(x - 2), \text{ 原说法错误, 不符合题意;}$$

C、不妨设点 A 绕点 O 顺时针旋转 90 度的对应点为 B，如图所示，过点 A、B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C、D，设 $A(s, t)$ ，

由旋转的性质可得 $OA = OB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACO = \angle AOB = \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COA + \angle CAO = \angle COA + \angle DOB,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle CAO,$$

$$\therefore \triangle DOB \cong \triangle CAO (AAS),$$

$$\therefore OD = AC = t, \quad BD = OC = -s,$$

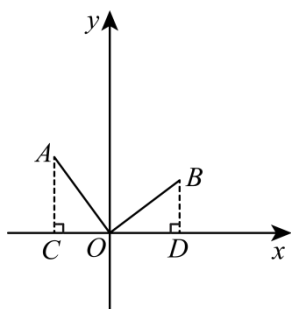
$$\therefore B(t, -s),$$

$\because$ 点 A 在直线 $y = kx (k \neq 0)$ 上，

$$\therefore t = ks,$$

$$\therefore -s = -\frac{1}{k}t,$$

$\therefore B(t, -s)$ 在直线 $y = -\frac{1}{k}x$, 原说法错误, 不符合题意;



D、不妨设点 A 绕点 O 顺时针旋转 90° 的对应点为 B , 由 C 的判断过程可知当 $A(s, t)$ 时, $B(t, -s)$,

$\therefore$ 点 A 在双曲线 $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 上,

$$\therefore m = st,$$

$$\therefore -st = -m,$$

$\therefore$ 点 B 一定在双曲线 $y = -\frac{m}{x} (m \neq 0)$ 上, 原说法正确, 符合题意;

故选: D.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 函数 $y = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域为 ____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式中被开方数非负, 同时注意分母不为零, 即可求得函数的定义域.

【详解】 由题意得: $\frac{1}{x-2} \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$

解得: $x > 2$

故答案为: $x > 2$

【点睛】 本题考查了求函数的自变量的取值范围, 即函数的定义域. 一般考虑下列情形: 函数解析式有分母时, 分母不为零; 含有二次根式时, 要求被开方数非负.

8. 化简: $\sqrt{12x^2y} (x < 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-2x\sqrt{3y}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，根据 $\sqrt{x^2} = |x|$ 进行求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{12x^2y} = 2|x|\sqrt{3y} = -2x\sqrt{3y} (x < 0)$,

故答案为: $-2x\sqrt{3y}$.

9. 已知 $f(x) = -\frac{3}{x}$, 那么 $f(\sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查函数求值问题，分母有理化；将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = -\frac{3}{x}$ ，化简即可求解.

【详解】 解: $\because f(x) = -\frac{3}{x}$,

$$\therefore f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

故答案为: $-\sqrt{3}$.

10. 方程 $\sqrt{2}x^2 + x = 0$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先把方程左边利用提公因式法分解因式，再解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{2}x^2 + x = 0$,

$$\therefore x(\sqrt{2}x + 1) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. 如果函数 $y = 2kx + x$ 经过第二、四象限，那么 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $k < -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的性质，正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ ，当 $k < 0$ 时，该函数的图象经过第二、四象限，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = 2kx + x = (2k + 1)x$ 经过第二、四象限，

$$\therefore 2k + 1 < 0,$$

$$\text{解得： } k < -\frac{1}{2};$$

$$\text{故答案为： } k < -\frac{1}{2}.$$

12. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - 5xy + y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{【答案】 } \frac{1}{12}(6x - 5y + \sqrt{13}y)(6x - 5y - \sqrt{13}y)$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，先提取公因式 3，再把式子变形为 $3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{25}{36}y^2 - \frac{25}{36}y^2 + \frac{1}{3}y^2\right)$,

进一步利用完全平方公式和平方差公式分解因式即可.

【详解】 解： $3x^2 - 5xy + y^2$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{1}{3}y^2\right)$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{25}{36}y^2 - \frac{25}{36}y^2 + \frac{1}{3}y^2\right)$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 - \frac{13}{36}y^2\right]$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}y + \frac{\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{5}{6}y - \frac{\sqrt{13}}{6}y\right)$$

$$= \frac{1}{12}(6x - 5y + \sqrt{13}y)(6x - 5y - \sqrt{13}y),$$

$$\text{故答案为： } \frac{1}{12}(6x - 5y + \sqrt{13}y)(6x - 5y - \sqrt{13}y).$$

13. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 9$ 且 $a \neq 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程的定义，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根，据此根据判别式求出 a 的取值范围，再由二次项系数不为 0 即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 6^2 - 4a > 0,$$

$$\therefore a < 9,$$

又 $\because$ 二次项系数不为 0，

$$\therefore a \neq 0,$$

综上所述， $a < 9$ 且 $a \neq 0$.

14. 某工厂七月份的产值是 100 万元，计划第三季度总产值要达到 314 万元，如果每个月产值的增长率相同，设这个增长率为 x ，那么可以列方程为： ____.

【答案】 $100 + 100(x+1) + 100(x+1)^2 = 314$

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的应用. 每个月产值的平均增长率为 x ，根据七月份的产值是 100 万元，表示之后两个月的产值，根据已知第三季度的总产值是 314 万元列方程即可.

【详解】 解： $\because$ 每个月产值的平均增长率为 x ，

$$\therefore \text{八月份产值为 } 100(1+x), \text{ 九月份产值为 } 100(1+x)^2,$$

$$\text{则 } 100 + 100(x+1) + 100(x+1)^2 = 314,$$

$$\text{故答案为: } 100 + 100(x+1) + 100(x+1)^2 = 314.$$

15. 不等式 $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 的解集为 ____.

【答案】 $x > -2 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的应用，解不等式，根据解一元一次不等式的步骤求解即可.

【详解】 解： $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})x < \sqrt{2}$$

$$\therefore x > \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -2-\sqrt{2}$$

$$\therefore x > -2-\sqrt{2}$$

16. 如果点 $A(x, y_1)$, $B(x, y_2)$ 分别在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 、 $y = \frac{k_2}{x}$ 的第二象限的图像上, ($k_1 k_2 \neq 0$), A 在 B 的下方, 那么 k_1 ____ k_2 (填 “>” 或 “<”).

【答案】>

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数图象的性质, 不等式的性质, 根据题意可得 $k_1 = xy_1$, $k_2 = xy_2$, $0 < y_1 < y_2$, $x < 0$, 再由不等式的性质即可得到答案.

【详解】解: 由题意得, $k_1 = xy_1$, $k_2 = xy_2$,

$\therefore A$ 在 B 的下方, 且点 A 和点 B 都在第二象限,

$$\therefore 0 < y_1 < y_2, \quad x < 0,$$

$$\therefore k_1 = xy_1 > k_2 = xy_2,$$

故答案为: >.

17. 如果关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($ac \neq 0$) 的两个根为 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, 那么关于 y 的方程 $cy^2 + by - a = 0$ ($ac \neq 0$) 的两个根为__.

$$\text{【答案】 } y_1 = -\frac{1}{6}, \quad y_2 = 1$$

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系, 先利用根与系数的关系得到 $2+3 = -\frac{b}{a}$, $2 \times 3 = \frac{c}{a}$, 则 $b = -5a$,

$c = 6a$, 所以关于 y 的方程 $cy^2 + by - a = 0$ 化为 $6ay^2 - 5ay - a = 0$, 然后利用因式分解法解方程即可.

【详解】解: $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($ac \neq 0$) 的两个根为 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$,

$$\therefore 2+3=-\frac{b}{a}, \quad 2 \times 3 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore b = -5a, \quad c = 6a,$$

$$\therefore \text{关于 } y \text{ 的方程 } cy^2 + by - a = 0 \text{ 化为 } 6ay^2 - 5ay - a = 0,$$

$$\text{即 } 6y^2 - 5y - 1 = 0,$$

$$(6y+1)(y-1) = 0,$$

$$6y+1=0 \text{ 或 } y-1=0,$$

$$\text{解得 } y_1 = -\frac{1}{6}, \quad y_2 = 1.$$

$$\text{故答案为: } y_1 = -\frac{1}{6}, \quad y_2 = 1.$$

18. 我们规定：横、纵坐标都是整数的点叫做整点. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 与直线 $y = 2x$ 交于第一象限内的点 A ，点 P 在射线 OA 上，分别过点 P 作 x 轴、 y 轴的垂线，交双曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 于点 B 、 C ，将线段 PB 、 PC 和函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图像在 B 、 C 之间的部分围成的区域（不含边界）记为区域 W . 如果区域 W 内恰有 5 个整点，那么点 P 的横坐标 x 的取值范围是__.

【答案】 $2 < x \leq \frac{5}{2}$

【解析】

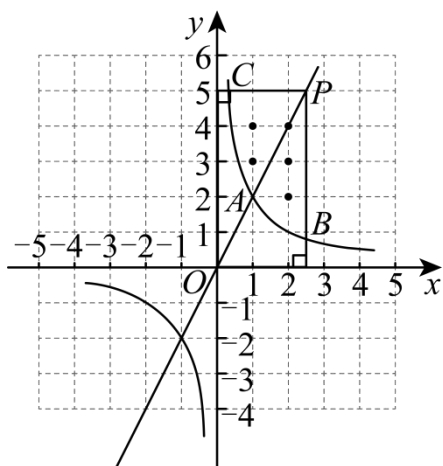
【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，根据题意画出两个函数的函数图像，再由题意得，点 P 只能在线段 OA 的延长线上，据此找到区域 W 内恰有 5 个整点的临界情况，结合函数图像即可得到答案.

【详解】 解：由题意得，点 P 只能在线段 OA 的延长线上，

$$\text{在 } y = 2x \text{ 中，当 } y = 5 \text{ 时，} x = \frac{5}{2},$$

由函数图像可知，当 $2 < x \leq \frac{5}{2}$ 时，区域 W 内恰有 5 个整点，

$$\text{故答案为: } 2 < x \leq \frac{5}{2}.$$



三、计算题 (每题 4 分, 共 8 分)

19. 计算: $3\sqrt{\frac{1}{3a}} - \left(\sqrt{\frac{a}{8}} - \sqrt{75a}\right)$

【答案】 $\frac{1+5a}{a}\sqrt{3a} - \frac{\sqrt{2a}}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减计算, 先化简二次根式, 再根据二次根式的加减计算法则求解即可.

【详解】 解: $3\sqrt{\frac{1}{3a}} - \left(\sqrt{\frac{a}{8}} - \sqrt{75a}\right)$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{3a} - \left(\frac{\sqrt{2a}}{4} - 5\sqrt{3a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{3a} - \frac{\sqrt{2a}}{4} + 5\sqrt{3a}$$

$$= \frac{1+5a}{a}\sqrt{3a} - \frac{\sqrt{2a}}{4}.$$

20. 计算: $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + 2 \div \frac{\sqrt{2}}{7}$

【答案】 $\frac{11+55\sqrt{2}}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 根据二次根式的运算法则解析计算即可求解.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + 2 \div \frac{\sqrt{2}}{7} \\
 &= \frac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} + 2 \times \frac{7}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{9+6\sqrt{2}+2}{9-2} + 7\sqrt{2} \\
 &= \frac{11+6\sqrt{2}}{7} + 7\sqrt{2} \\
 &= \frac{11+55\sqrt{2}}{7}.
 \end{aligned}$$

四、解方程 (每题 4 分, 共 12 分)

21. 解方程: $(x+1)^2 = 9(3x-2)^2$

【答案】 $x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 运用直接开方法求解即可.

【详解】 解: 开方得: $x+1 = \pm 3(3x-2)$,

即 $x+1 = 3(3x-2)$ 或 $x+1 = -3(3x-2)$,

解得: $x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{1}{2}$.

22. 解方程: $\frac{x(x-\sqrt{3})}{2} = -\frac{3}{8}$

【答案】 $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先把原方程化为一般式, 再利用完全平方公式分解因式, 进而解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because \frac{x(x-\sqrt{3})}{2} = -\frac{3}{8},$

$$\therefore x^2 - \sqrt{3}x = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = 0,$$

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

23. 解方程: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ (配方法)

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查利用配方法解一元二次方程, 运用配方法解一元二次方程的一般步骤求解即可.

【详解】 解: 移项得: $2x^2 - 4x = 3$,

二次项系数化为 1 得: $x^2 - 2x = \frac{3}{2}$,

配方得: $x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{2} + 1$,

即 $(x-1)^2 = \frac{5}{2}$,

开方得: $x-1 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$,

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

五、解答题 (8 分+8 分+7 分+9 分, 共 32 分)

24. 已知 $y = y_1 + y_2$, 其中 y_1 与 x^2 成正比例, y_2 与 $x-1$ 成反比例. 当 $x = 2$ 时, $y = 2$; 当 $x = -1$ 时, $y = 2$, 求 y 关于 x 的函数解析式.

【答案】 $y = x^2 - \frac{2}{x-1}$

【解析】

【分析】 题考查了待定系数法求函数的解析式, 正比例函数与反比例函数的性质, 根据题意, 设 $y_1 = k_1 x^2, y_2 = \frac{k_2}{x-1} (k_1 \neq 0, k_2 \neq 0)$, 根据当 $x = 2$ 时, $y = 2$; 当 $x = -1$ 时, $y = 2$, 待定系数法求得 k_1, k_2 ,

即可求解.

【详解】解: 设 $y_1 = k_1 x^2, y_2 = \frac{k_2}{x-1} (k_1 \neq 0, k_2 \neq 0)$,

$$\therefore y = y_1 + y_2 = k_1 x^2 + \frac{k_2}{x-1},$$

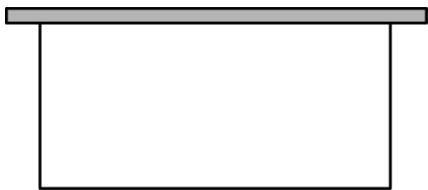
$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $y = 2$; 当 $x = -1$ 时, $y = 2$,

$$\therefore \begin{cases} 2 = 4k_1 + \frac{k_2}{2-1} \\ 2 = k_1 + \frac{k_2}{-1-1} \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -2 \end{cases};$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = x^2 - \frac{2}{x-1}$.

25. 某建筑工程队, 在工地一边的靠墙处, 墙长 40 米, 用 120 米长的铁栅栏围一个所占地形状为长方形的临时仓库, 铁栅栏只围三边, 如果长方形的面积为 1152 平方米, 那么长方形的两条邻边长是多少米?



【答案】长方形的两条邻边长分别是 48 米、24 米

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(120 - 2x)$ 米, 根据长方形的面积为 1152 平方米, 可列出关于 x 的一元二次方程, 解方程得出 x 的值, 再结合墙长 40 米, 即可确定结论.

【详解】解: 设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(120 - 2x)$ 米,

根据题意得: $x(120 - 2x) = 1152$,

整理得: $x^2 - 60x + 576 = 0$,

解得: $x_1 = 12$, $x_2 = 48$,

当 $x = 12$ 时, $120 - 2x = 120 - 2 \times 12 = 96 > 40$, 不符合题意, 舍去;

当 $x = 48$ 时, $120 - 2x = 120 - 2 \times 48 = 24 < 40$, 符合题意.

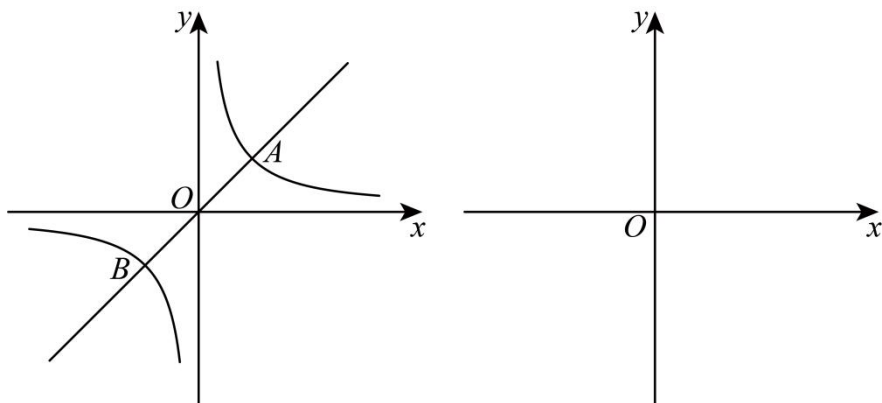
答：长方形的两条邻边长分别是 48 米、24 米.

26. 用函数观点看不等式，如何解不等式 $x < \frac{2}{x}$ ？

分析：我们可以把不等号的左边看作正比例函数 $y = x$ ，右边看作反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ，那么这个不等式的解集就是直线 $y = x$ 在直线 $y = \frac{2}{x}$ 下方的所有点的横坐标的取值范围.

解：当 $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ 时，解得 $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = \sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$ ，可知函数 $y = x$ 与函数 $y = \frac{2}{x}$ 的公共点的坐标为 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

如图，直线 $y = x$ 在 $y = \frac{2}{x}$ 下方的所有点，就是直线 $y = x$ 在点 B 的下方和直线 $y = x$ 在点 O 和点 A 之间的部分，横坐标的取值范围是 $x < -\sqrt{2}$ 或 $0 < x < \sqrt{2}$ ，所以不等式 $x < \frac{2}{x}$ 的解集为 $x < -\sqrt{2}$ 或 $0 < x < \sqrt{2}$.



(1) 模仿上述方法，解不等式： $-2x \leq -\frac{1}{x}$ ；

(2) 填空：如果关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 的解集为 $x > 0$ ，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0$ 或 $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $0 \leq a \leq 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合：

(1) 仿照题意求出函数 $y = -2x$ 和函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的交点坐标，再找到函数 $y = -2x$ 的函数图象在函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象下方或二者的交点处时，自变量的取值范围即可得到答案；

(2) 分当 $a-1 > 0$ 时，当 $a-1 = 0$ ，即 $a = 1$ 时，当 $0 < a < 1$ 时，当 $a = 0$ 时，当 $a < 0$ 时，五种情况结合函数图象讨论求解即可.

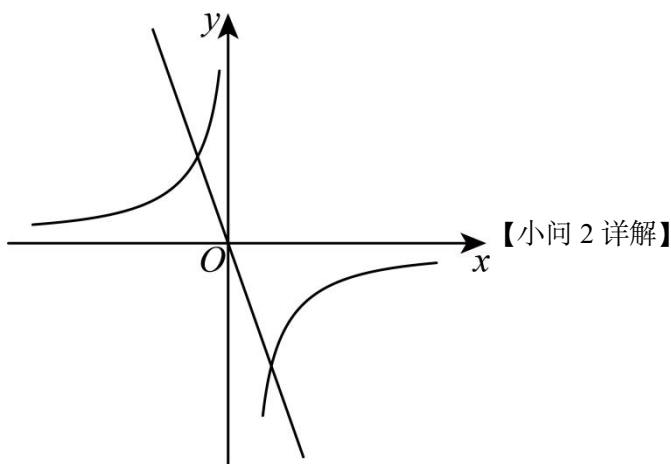
【小问 1 详解】

解：联立 $\begin{cases} y = -2x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ ，

由函数图象可知，当函数 $y = -2x$ 的函数图象在函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象下方或二者的交点处时，自变量的取值

范围为 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0$ 或 $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore$ 不等式 $-2x \leq -\frac{1}{x}$ 的解集为 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0$ 或 $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；



解：当 $a-1 > 0$ 时，函数 $y = ax$ 的图象经过第一、三象限，函数 $y = \frac{a-1}{x}$ 的图象也经过第一、三象限，此

时不可能满足关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 的解集为 $x > 0$ ；

当 $a-1 = 0$ ，即 $a = 1$ 时，则关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 即为 $x > 0$ ，此时符合题意；

当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = ax$ 的图象经过第一、三象限，函数 $y = \frac{a-1}{x}$ 的图象经过第二、四象限，此时能满

足关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 的解集为 $x > 0$ ；

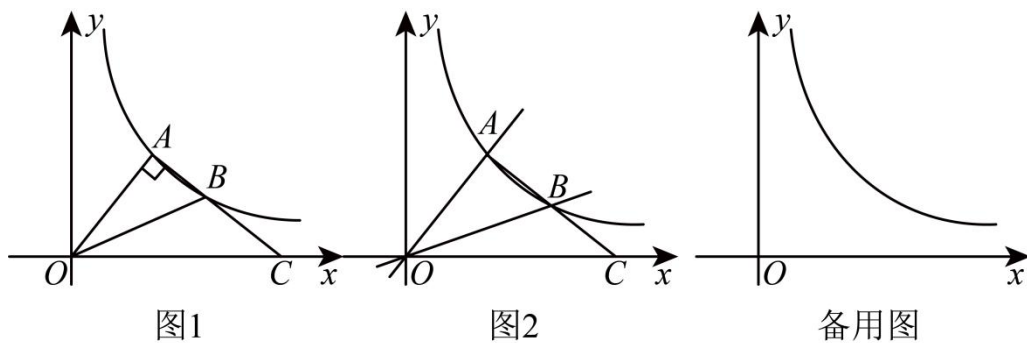
当 $a = 0$ 时，则关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 即为 $0 > -\frac{1}{x}$ ，此时符合题意；

当 $a < 0$ 时，函数 $y = ax$ 的图象经过第二、四象限，函数 $y = \frac{a-1}{x}$ 的图象也经过第二、四象限，此时不可能

满足关于 x 的不等式 $ax > \frac{a-1}{x}$ 的解集为 $x > 0$ ；

综上所述， $0 \leq a \leq 1$ 。

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 第一象限内的图象上。



(1) 已知点 B 在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 第一象限内的图象上，且点 B 在点 A 的下方，延长 AB 与 x 轴交于点 C 。

①如图 1，如果 $m = 2$ ， $\angle OAB = 90^\circ$ ，且 OB 平分 $\angle AOC$ ，求 $\triangle OAB$ 的面积；

②如图 2，如果点 B 是线段 AC 的中点，直线 OA 的表达式为 $y = k_1x$ ，直线 OB 的表达式为 $y = k_2x$ ，求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值；

(2) 已知点 D 在射线 OA 上（点 D 不与点 A 重合），过点 D 作 x 轴的垂线，与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象交于点 E ，连接 AE ，请问是否存在点 E ，使得 $AD = AE$ ？如果存在，求点 A 的坐标（用 m 表示）；如果不存在，请说明理由。

【答案】(1) ① $\triangle OAB$ 的面积为 1；② $\frac{k_1}{k_2} = 4$

(2) 不存在，理由见解析

【解析】

【分析】(1) ①过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ，利用角平分线的性质可得 $BA = BE$ ，再证得 $\text{Rt}\triangle OBA \cong \text{Rt}\triangle OBE$ (HL)，即可求得答案；

②过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D ，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ，设 $A\left(a, \frac{m}{a}\right), B\left(b, \frac{m}{b}\right)$ ，可得 $k_1 = \frac{m}{a^2}, k_2 = \frac{m}{b^2}$ ，

再利用中点坐标可得出 $b = 2a$ ，即可求得答案；

(2) 分两种情况：当点 D 在线段 OA 上时，当点 D 在线段 OA 的延长线上时，分别讨论即可。

【小问 1 详解】

解：(1) ①当 $m = 2$ 时， $y = \frac{2}{x}$ ，

如图 1，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ，

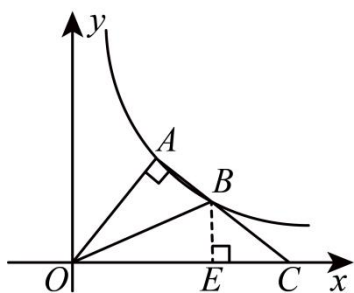


图1

则 $S_{\triangle OBE} = 1$,

$\because \angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore BA \perp OA$,

$\because OB$ 平分 $\angle AOC$, $BA \perp OA$, $BE \perp OE$,

$\therefore BA = BE$,

在 $\text{Rt}\triangle OBA$ 和 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中,

$$\begin{cases} BA = BE \\ OB = OB \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle OBA \cong \text{Rt}\triangle OBE$ (HL)

$\therefore S_{\triangle OBA} = S_{\triangle OBE} = 1$,

$\therefore \triangle OAB$ 的面积为 1;

②如图 2, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D, 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E,

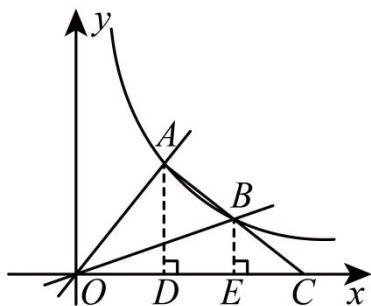


图2

$\because$ 直线 OA 的表达式为 $y = k_1x$, 直线 OB 的表达式为 $y = k_2x$,

设 $A\left(a, \frac{m}{a}\right), B\left(b, \frac{m}{b}\right)$, 则 $\frac{m}{a} = k_1a$, $\frac{m}{b} = k_2b$

$\therefore k_1 = \frac{m}{a^2}, k_2 = \frac{m}{b^2}$

∵ 点 B 是线段 AC 的中点,

$$\therefore \frac{\frac{m}{a} + 0}{2} = \frac{m}{b}$$

$$\therefore b = 2a$$

$$\therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{m}{a^2} \cdot \frac{b^2}{m} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{(2a)^2}{a^2} = 4$$

【小问 2 详解】

点 D 在射线 OA 上 (点 D 不与点 A 重合), 不存在点 E , 使得 $AD = AE$; 理由如下:

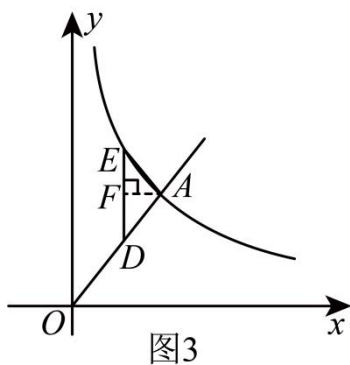
$$\text{设 } A\left(a, \frac{m}{a}\right),$$

∵ 点 A 在直线 OA 上, 则直线 OA 的解析式为 $y = \frac{m}{a^2}x$

∵ 点 D 在射线 OA 上 (点 D 不与点 A 重合), 过点 D 作 x 轴的垂线, 与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象交于点 E ,

$$\therefore D\left(t, \frac{mt}{a^2}\right), \quad E\left(t, \frac{m}{t}\right)$$

当点 D 在线段 OA 上时, 过点 A 作 $AF \perp DE$ 于点 F , 如图 3,



$$\text{则 } F\left(t, \frac{m}{a}\right)$$

∵ $AD = AE$, $AF \perp DE$,

∴ 点 F 是 DE 的中点,

$$\therefore F \text{ 的纵坐标为 } \frac{1}{2}\left(\frac{mt}{a^2} + \frac{m}{t}\right)$$

$$\therefore \frac{m}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{mt}{a^2} + \frac{m}{t}\right)$$

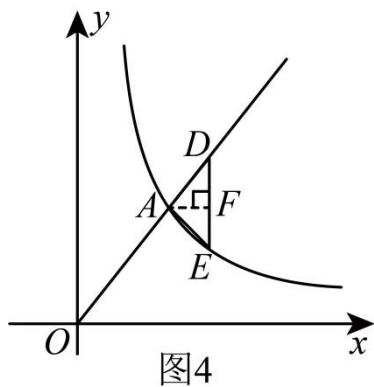
化简得, $(t-a)^2 = 0$,

$\therefore a=t$,

又 $\because$ 点 D 不与点 A 重合,

$\therefore t \neq a$, 此时不存在点 E , 使得 $AD = AE$;

当点 D 在线段 OA 的延长线上时, 过点 A 作 $AF \perp DE$ 于点 F , 如图 4,



同理可得: 当点 D 在线段 OA 的延长线上时, 不存在点 E , 使得 $AD = AE$;

综上所述, 点 D 在射线 OA 上 (点 D 不与点 A 重合), 不存在点 E , 使得 $AD = AE$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象和性质, 反比例函数的图象和性质, 等腰三角形的性质, 角平分线的性质, 全等三角形的判定和性质等, 中点坐标公式, 熟练掌握反比例函数的性质是解题关键.