

明珠中学 2024 学年第一学期八年级数学期中学科活动

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分):

1. 下列各组二次根式中, 属同类二次根式的是 ()

- A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{8a}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式, 将各项先化为最简二次根式, 再根据同类二次根式的定义逐项判断即可, 掌握二次根式的化简是解题的关键.

【详解】解: A、 $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$ 不是同类二次根式, 该选项不合题意;

$$\text{B、} \because \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 不是同类二次根式, 该选项不合题意;

$$\text{C、} \because -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore -\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 是同类二次根式, 该选项符合题意;

$$\text{D、} \because \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}, \quad \sqrt{8a} = 2\sqrt{2a},$$

$\therefore \sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{8a}$ 不是同类二次根式, 该选项不合题意;

故选: C.

2. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $2^2x - 1 = 0$ B. $x - \frac{1}{x} = 0$
C. $(x+1)(x+4) = x(x-2)$ D. $(x+3)(x-3) + 4 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的概念: 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数 2 的整式方程, 叫做一元二次方程; 其一般形式为: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 且 a 、 b 、 c 都是常数; 根据一元二次方程的概念

进行判断即可.

【详解】解: A、是一元一次方程, 故不符合题意;

B、是分式方程, 故不符合题意;

C、 $(x+1)(x+4)=x(x-2)$ 经整理后为 $7x+4=0$, 是一元一次方程, 故不符合题意;

D、方程整理后为 $x^2-5=0$, 是一元二次方程, 故符合题意;

故选: D.

3. 关于 x 的方程 $(x+2)(x-3)-m^2=0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 先把方程化为一般式, 再计算出判别式, 根据判别式的符号即可判断方程根的情况.

【详解】解: $(x+2)(x-3)-m^2=0$ 方程可化为 $x^2-x-6-m^2=0$,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6 - m^2) = 4m^2 + 25 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根;

故选: A.

4. 到三角形三个顶点距离都相等的点是 ()

A. 三角形的三条角平分线的交点

B. 三角形的三边垂直平分线的交点

C. 三角形的三条高线的交点

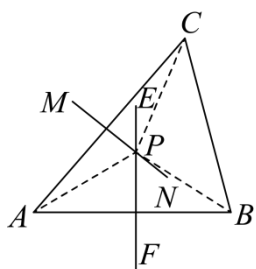
D. 三角形的三条中线的交点

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的判定与性质, 掌握线段垂直平分线的交点到三角形三个顶点的距离相等是解决问题的关键.

【详解】解:



$\because P$ 在 AB 的垂直平分线 EF 上,

$$\therefore PA = PB,$$

$\because P$ 在 AC 的垂直平分线 MN 上,

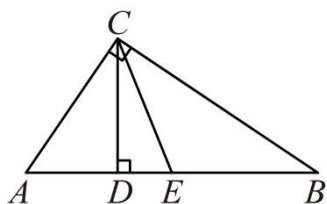
$$\therefore PA = PC,$$

$$\therefore PA = PB = PC,$$

即 P 是到三角形三个顶点的距离相等的点,

故选: B.

5. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$. 线段 CD 、 CE 分别为 ABC 的高和中线, 下列说法中错误的是 ()



A. $\angle B = \angle ACD$

B. $\angle BCE = \angle ACD$

C. $2CE = AB$

D. $2AC = AB$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的高和中线的性质, 熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键; 根据三角形高和中线的性质, 结合图形对选项一一判断即可求解.

【详解】 解: 线段 CD 、 CE 分别为 ABC 的高和中线,

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD, \text{ 故 A 选项正确, 不符合题意;}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$, 故 B 选项正确, 不符合题意;

$$\because CE = \frac{1}{2}AB,$$

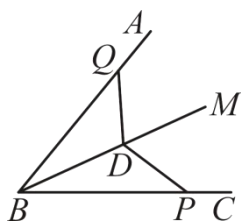
$\therefore AB = 2CE$, 故选项 C 正确, 不符合题意;

根据题中条件无法推出 $AC = AE = CE$, 故无法推出 $2AC = AB$, 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

6. 如图, BM 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 Q 、 D 分别在 BA 、 BM 上, 点 P 为直线 BC 上的一个动点, 如果 $BQ = 6$,

$\triangle BDQ$ 的面积为 9, 那么线段 DP 的长不可能是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

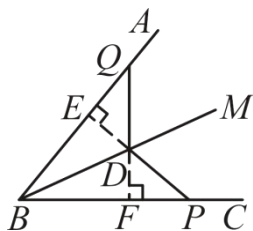
D. 5.5

【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质与三角形的面积计算公式. 作出辅助线是正确解答本题的关键. 根据三角形的面积得出 DE 的长, 进而利用角平分线的性质解答即可.

【详解】解: 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F ,



$\because BQ = 6$, $\triangle BDQ$ 的面积为 9,

$$\therefore \frac{1}{2}BQ \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6DE = 9,$$

$$\therefore DE = 3,$$

$\because BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore DE = DF = 3,$$

$$\therefore DP \geq 3,$$

$\therefore$ 线段 DP 的长不可能是 2,

故选: A.

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分):

7. $\sqrt{(3-2x)^2} = 2x-3$, x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的非负性, 由题意得出 $2x-3 \geq 0$, 计算即可得解, 熟练掌握算术平方根的性质是解此题的关键.

【详解】 解: 由题意可得 $2x-3 \geq 0$,

解得: $x \geq \frac{3}{2}$,

故答案为: $x \geq \frac{3}{2}$.

8. 方程 $x(x-2) = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=3$.

【解析】

【详解】 因式分解法解一元二次方程.

【分析】 原方程可化为 $x(x-2) - x=0$,

$$x(x-2-1)=0,$$

$$x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得: $x_1=0$, $x_2=3$.

9. 将一元二次方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 配方后可得 $(x+m)^2 = n$, 那么 $m-n =$ _____.

【答案】 -8

【解析】

【分析】 本题考查了配方法解一元二次方程, 求代数式的值, 关键是配方后求出 m 与 n 的值; 方程两边加 5, 配方得 $(x-3)^2 = 5$, 即可得 m 与 n 的值, 再代入代数式中即可求解.

【详解】 解: 方程两边加 5, 得: $x^2 - 6x + 9 = 5$,

$$\text{配方得 } (x-3)^2 = 5,$$

$$\therefore m = -3, n = 5,$$

$$\therefore m-n=-3-5=-8;$$

故答案为: -8.

10. 在实数范围内因式分解: $x^2-2x-1=$ _____.

【答案】 $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 本题考查了在实数范围内分解因式, 先利用配方法, 再利用平方差公式进行分解即可解答.

【详解】 $x^2-2x-1=x^2-2x+1-2=(x-1)^2-(\sqrt{2})^2=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}),$

故答案为: $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}).$

11. 国庆期间, 南京东路某商场为了吸引游客, 对某种商品连续两次降价, 每次下降百分率相同. 已知该商品原售价为 875 元, 降价两次后的售价为 560 元, 若设下降的百分率为 x , 那么根据题意可以列方程为_____.

【答案】 $875(1-x)^2=560$

【解析】

【分析】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 利用经过两次降价后的售价=原售价 $\times(1-$ 每次下降的百分率 $)^2$, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 此题得解.

【详解】 解: 根据题意得 $875(1-x)^2=560.$

故答案为: $875(1-x)^2=560.$

12. 命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题是_____命题. (填“真”或“假”)

【答案】 假

【解析】

【分析】 首先分清题设是: 两个三角形全等, 结论是: 对应角相等, 把题设与结论互换即可得到逆命题, 然后判断正误即可.

【详解】 解: “全等三角形的对应角相等”的题设是: 两个三角形全等, 结论是: 对应角相等, 因而逆命题是: 对应角相等的三角形全等. 是一个假命题.

故答案为: 假.

【点睛】 本题考查了互逆命题的知识, 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题. 命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要

熟悉课本中的性质定理.

13. 经过已知线段 AB 的两个端点的圆的圆心轨迹是_____.

【答案】 线段 AB 的垂直平分线

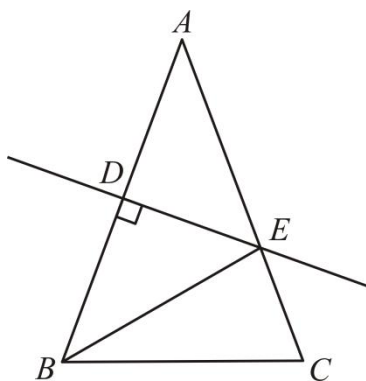
【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的判定定理; 由题意知, 圆心到线段 AB 的两个端点的距离相等, 由线段垂直平分线的判定定理即可求解.

【详解】 解: 由题意知, 圆心到线段 AB 的两个端点的距离相等,
表明圆心在线段 AB 的垂直平分线上;

故答案为: 线段 AB 的垂直平分线.

14. 如图, 等腰 ABC 的周长为 13, 底边 $BC = 3$, AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 则 BEC 的周长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查垂直平分线的性质, 利用性质将线段进行等量代换是解题的关键. 由垂直平分线上的点到线段两端的距离相等可得 $AE = BE$, 根据题目条件求出 AC , 再根据 BEC 的周长

$= BE + EC + BC = AE + EC + BC = AC + BC$, 求出结果即可.

【详解】 解: $\because$ 等腰 ABC 的周长为 13, 底边 $BC = 3$,

$$\therefore 2AC + BC = 13,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} \times (13 - 3) = 5,$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

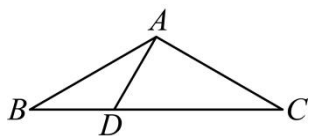
$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \triangle BEC \text{ 的周长} = BE + EC + BC = AE + EC + BC = AC + BC = 3 + 5 = 8.$$

故答案为: 8.

15. 如图, 在 ABC 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 连接 AD , $AD = DB$, 若 $AD = \sqrt{3}$,

那么 $BC =$ _____.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质，三角形内角和定理，含 30° 直角三角形性质等知识，掌握这两个性质是关键；由 $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，得 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ；再由 $AD = DB$ 得 $\angle BAD = 30^\circ$ ，从而可得 $\angle DAC = 90^\circ$ ；由 30° 直角三角形性质得 $CD = 2AD = 2\sqrt{3}$ ，则可求得 BC 。

【详解】 解： $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ;$$

$$\because AD = DB = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 30^\circ,$$

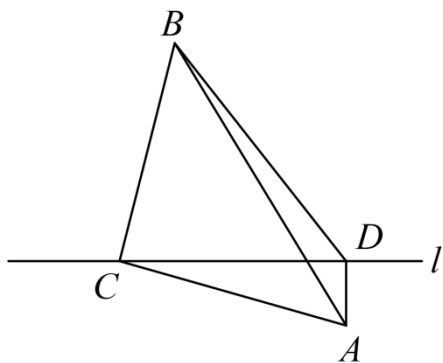
$$\therefore \angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ;$$

$$\therefore CD = 2AD = 2\sqrt{3};$$

$$\therefore BC = CD + BD = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

故答案为： $3\sqrt{3}$.

16. 如图，等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角顶点 C 在直线 l 上， $AD \perp$ 直线 l 于点 D ，若 $CD = 2\sqrt{2}$ ，则 $\triangle BCD$ 的面积为_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 此题考查了等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质等知识. 过点 B 作 $BE \perp CD$ 于点 E ,

则 $\angle BEC = 90^\circ$ ，证明 $\triangle BCE \cong \triangle CAD$ (AAS)，则 $BE = CD = 2\sqrt{2}$ ，利用三角形面积公式即可求出 $\triangle BCD$ 的面积.

【详解】解：过点 B 作 $BE \perp CD$ 于点 E ，则 $\angle BEC = 90^\circ$ ，

$\because$ 等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角顶点 C 在直线 l 上，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，

$\therefore \angle BCE + \angle ACD = \angle BCE + \angle CBE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle CBE$ ，

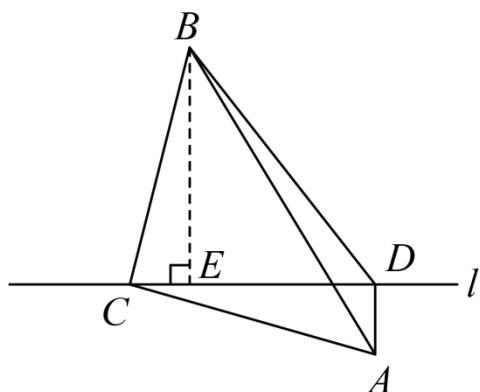
$\because AD \perp$ 直线 l 于点 D ，

$\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CAD$ (AAS)，

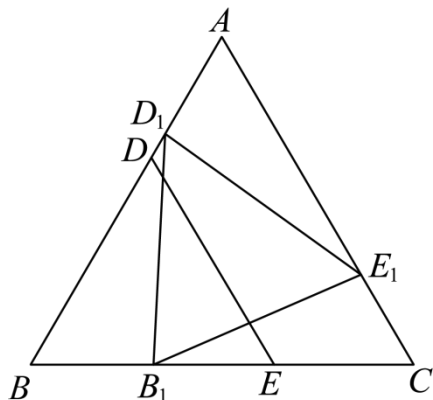
$\therefore BE = CD = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 $= \frac{1}{2} BE \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ ，



故答案为：4

17. 如图，等边 ABC 的边长为 6， $DE \parallel AC$ ，将 $\triangle DBE$ 按照某一点旋转至得到 $\triangle D_1B_1E_1$ ，点 D_1 、 B_1 、 E_1 分别在边 AB 、 BC 、 AC 上，那么五边形 $DECE_1D_1$ 的周长为_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，掌握这些知识是关键；由等边三角形性质及平行线性质得 $\triangle DBE$ 是等边三角形，由旋转的性质得 $BE = DE = BD = B_1E_1 = D_1E_1$ ，

$\angle B_1E_1D_1 = 60^\circ$ ，证明 $\triangle B_1CE_1 \cong \triangle E_1AD_1$ ，则有 $CE_1 = AD_1$ ，则

$$DE + CE + CE_1 + D_1E_1 + DD_1 = 2BC = 12.$$

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC = 6, \angle B = \angle C = \angle A = 60^\circ;$$

$$\because DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle C = 60^\circ, \angle BDE = \angle A = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DBE$ 是等边三角形，

$$\therefore BE = DE = BD;$$

由旋转的性质得 $\triangle D_1B_1E_1 \cong \triangle DBE$ ，

$$\therefore BE = DE = BD = B_1E_1 = D_1E_1, \angle B_1E_1D_1 = \angle BED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AE_1D_1 + \angle B_1E_1C = 180^\circ - \angle B_1E_1D_1 = 120^\circ;$$

$$\because \angle AD_1E_1 + \angle AE_1D_1 = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B_1E_1C = \angle AD_1E_1,$$

$$\because \angle A = \angle C = 60^\circ, D_1E_1 = E_1B_1,$$

$$\therefore \triangle B_1CE_1 \cong \triangle E_1AD_1 (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE_1 = AD_1,$$

五边形 $DECE_1D_1$ 的周长为：

$$DE + CE + CE_1 + D_1E_1 + DD_1$$

$$= BE + CE + AD_1 + BD + DD_1$$

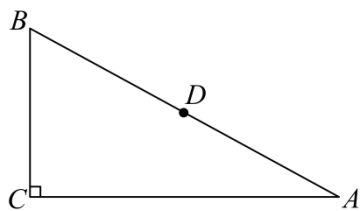
$$= BC + AB$$

$$= 2BC$$

$$= 12.$$

故答案为：12.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 6$ ，点 D 为斜边 AB 的中点，点 E 在边 AC 上，连结 DE ，若线段 DE 的垂直平分线恰好经过边 AC 的中点 P ，则线段 $AE =$ _____.

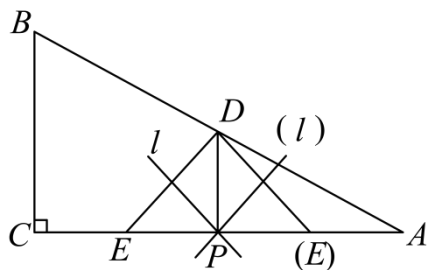


【答案】 $3 \pm \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形中位线定理和垂直平分线的性质，分两种情况讨论：当点 E 位于点 P 左侧时和当点 E 位于点 P 右侧时.

【详解】 解：设线段 DE 的垂直平分线为 l .



$\because D, P$ 分别为 AB, AC 的中点,

$$\therefore DP = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}, \quad AP = \frac{1}{2}AC = 3.$$

$\because l$ 为 DE 的垂直平分线,

$$\therefore DP = EP.$$

当点 E 位于点 P 左侧时， $AE = AP + EP = 3 + \sqrt{3}$.

当点 E 位于点 P 右侧时， $AE = AP - EP = 3 - \sqrt{3}$.

综上所述， $AE = 3 \pm \sqrt{3}$.

故答案为： $3 \pm \sqrt{3}$.

三. 解答题：(本大题共 8 题，满分 78 分)：

19. 解方程： $x(x-6) = 2(x-8)$.

【答案】 $x_1 = x_2 = 4$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，先把右式移到左边，把方程整理成一般式，再利用因式分解法解答即可求解，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

【详解】 解: $\because x(x-6)=2(x-8),$

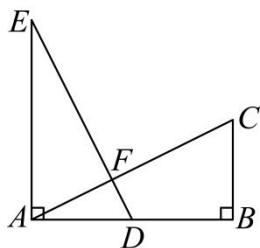
$$\therefore x(x-6)-2(x-8)=0,$$

$$\therefore x^2-8x+16=0,$$

$$\text{即 } (x-4)^2=0,$$

$$\therefore x_1=x_2=4.$$

20. 如图, 点 D 为 AB 的中点, $EA \perp AB$, $CB \perp AB$, $AE = AB = 2BC$, AC 与 DE 交于点 F .



(1) 求证: $\triangle EAD \cong \triangle ABC$;

(2) 连接 EC , 求证: $EC = ED$.

【答案】 (1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质, 直角三角形的性质, 熟练掌握三角形的判定和性质是解题的关键;

(1) 根据全等三角形的判定和性质证明即可;

(2) 取 AE 的中点 M , 连接 CM , 分别证明 $\triangle MAC \cong \triangle BCA$ (SAS) 和 $\triangle AED \cong \triangle MCE$ (SAS), 进而证明 $EC = ED$;

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 D 为 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$AE = AB = 2BC,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$\because EA \perp AB, CB \perp AB,$

$\therefore \angle EAD = \angle ABC,$

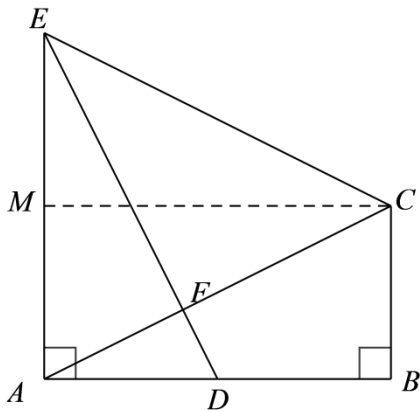
在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} AE = AB \\ \angle EAD = \angle ABC, \\ AD = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle ABC (\text{SAS}),$

【小问 2 详解】

证明: 取 AE 的中点 M , 连接 CM ,



$\therefore AE = 2AM$

又 $AE = AB = 2BC$

$\therefore AM = BC,$

$\because EA \perp AB, CB \perp AB,$

$\therefore \angle EAD = \angle ABC,$

$\therefore \angle MAC + \angle BAC = \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ,$

$\therefore \angle MAC = \angle BCA,$

又 $AM = BC, AC = CA,$

$\therefore \triangle MAC \cong \triangle BCA (\text{SAS}),$

$\therefore \angle AMC = \angle CBA = 90^\circ, CM = AB,$

$\therefore \angle EMC = \angle AMC = 90^\circ, CM = AE;$

又点 D 为 AB 的中点, 点 M 为 AE 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB, EM = \frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore AE = AB,$$

$$\therefore EM = AD,$$

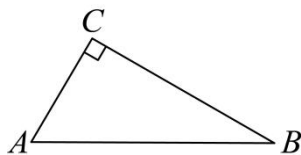
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle MEC$ 中,

$$\begin{cases} ME = AD \\ \angle EMC = \angle DAE, \\ AE = MC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle MCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore EC = ED.$$

21. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$, $BC = 4\sqrt{3}$.



(1) 求点 C 到边 AB 的距离;

(2) 若点 P 在边 AB 上, 联结 CP , CP 平分 $\angle ACB$, 求线段 AP 的长.

【答案】 (1) $2\sqrt{3}$

$$(2) AP = 4\sqrt{3} - 4$$

【解析】

【分析】 (1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 由含 30° 度直角三角形的性质得 $CD = \frac{1}{2}BC$ 即可求解;

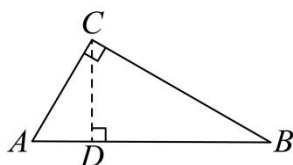
(2) 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E , 由已知易得 $PE = CE$; 设 $AP = 2x$, 则得 $AE = x$, $PE = \sqrt{3}x$, 由题意得 $CE = PE = \sqrt{3}x$; 根据 $AE + CE = AC = 4$, 即可求得 x 的值, 从而求得线段 AP 的长.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, BC = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$



即点 C 到边 AB 的距离为 $2\sqrt{3}$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E ，

$\because CP$ 平分 $\angle ACB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ECP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ；$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP = 45^\circ；$$

$$\therefore PE = CE；$$

$$\because PE \perp AC，$$

$$\therefore \angle ACB = \angle PEA = 90^\circ，$$

$$\therefore PE \parallel BC，$$

$$\therefore \angle APE = \angle B = 30^\circ；$$

设 $AP = 2x$ ，则 $AE = \frac{1}{2}AP = x$ ，

由勾股定理得： $PE = \sqrt{3}x$ ，

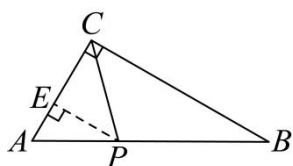
$$\therefore CE = PE = \sqrt{3}x；$$

$$\because AE + CE = AC = 4，$$

$$\therefore x + \sqrt{3}x = 4，$$

$$\therefore x = 2(\sqrt{3} - 1)，$$

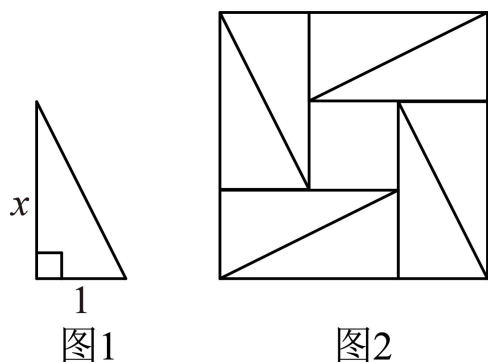
$$\therefore AP = 2 \times 2(\sqrt{3} - 1) = 4(\sqrt{3} - 1) = 4\sqrt{3} - 4。$$



【点睛】 本题考查了含 30° 直角三角形的性质，勾股定理，等腰三角形的判定，平行线的判定与性质等知识，构造适当辅助线是解题的关键。

22. 在一节数学探究课上老师提供了若干张直角边分别为 x 、 $1(x > 1)$ 的直角三角形纸板，如图1所示．经

过同学们探究后得出如下结论：选用若干张这样的纸片可以互不重叠的拼成一个大正方形，并且内部留下一个“空隙”是一个较小的正方形，图2是同学们的一种拼法.



- (1) 若图2中大正方形的面积是“空隙”小正方形面积的9倍，求 x 的值；
- (2) 请你选择若干张纸片拼出一个符合探究结论的图形（与图2不同），画出示意图并直接用含 x 的代数式表示大正方形、小正方形的面积.

【答案】 (1) $x = 2$ ；

(2) 画图见解析；大正方形面积为 $x^2 + 1$ ，“空隙”小正方形面积 $(x-1)^2$.

【解析】

【分析】 (1) 根据题意列出代数式，再由大正方形的面积是“空隙”小正方形面积的9倍，得出 $(x+1)^2 = 9(x-1)^2$ ，然后求解即可；

(2) 根据题意画出图形，再根据图形求出面积即可；

本题主要考查了完全平方公式，勾股定理的几何背景等知识，掌握知识点的应用是解题的关键.

【小问1详解】

解：由图可知，大正方形的面积为 $(x+1)^2$ ，“空隙”小正方形面积 $(x-1)^2$ ，

$\therefore$ 大正方形的面积是“空隙”小正方形面积的9倍，

$$\therefore (x+1)^2 = 9(x-1)^2,$$

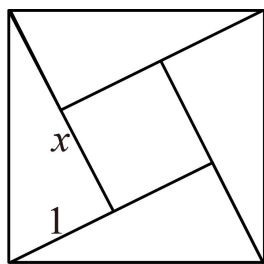
$$\text{解得： } x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore x > 1,$$

$$\therefore x = 2;$$

【小问2详解】

解：如图，



∴ 大正方形面积为 $x^2 + 1$ ，“空隙”小正方形面积 $(x-1)^2$.

23. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上，连接 AD 、 CE 。

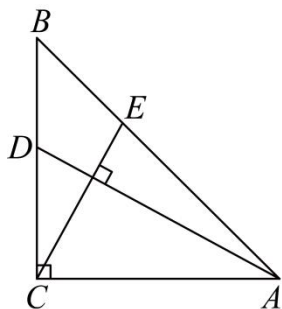


图1

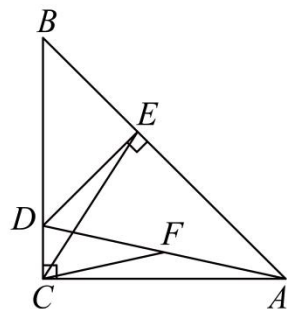


图2

(1) 如图1，若 $CE \perp AD$ ， $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCE$ ，求证： $AD = 2CD$ ；

(2) 如图2，连接 DE ，若 $DE \perp AB$ ，点 F 为 AD 的中点，连接 CF 、 CE ，求 $\angle ECF$ 的大小。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 45°

【解析】

【分析】(1) 如图，设 AD 与 CE 相交于点 F ，由等腰直角三角形的性质可得 $\angle BAC = \angle B = 45^\circ$ ，设 $\angle BAD = \alpha$ ， $\angle BCE = 2\alpha$ ，则 $\angle CAF = 45^\circ - \alpha$ ， $\angle ACF = 90^\circ - 2\alpha$ ，由 $\angle CAF + \angle ACF = 90^\circ$ 可求得 $\alpha = 15^\circ$ ，进而可得 $\angle CAD = 30^\circ$ ，由直角三角形的性质即可求证；

(2) 连接 EF ，由直角三角形的性质可得 $EF = CF = AF = \frac{1}{2}AD$ ，进而可得 $\angle AEF = \angle EAF$ ， $\angle CAF = \angle ACF$ ， $\angle ECF = \angle CEF$ ，得到 $\angle DFE = 2\angle EAF$ ， $\angle DFC = 2\angle CAF$ ，可得 $\angle CFE = 90^\circ$ ，进而即可求解。

【小问1详解】

证明：如图，设 AD 与 CE 相交于点 F ，

∵ $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，

∴ $\angle BAC = \angle B = 45^\circ$ ，

∵ $CE \perp AD$ ，

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCE,$$

$$\therefore \text{可设 } \angle BAD = a, \angle BCE = 2a, \text{ 则 } \angle CAF = 45^\circ - a, \angle ACF = 90^\circ - 2a,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle ACF = 90^\circ,$$

$$\therefore 45^\circ - a + 90^\circ - 2a = 90^\circ,$$

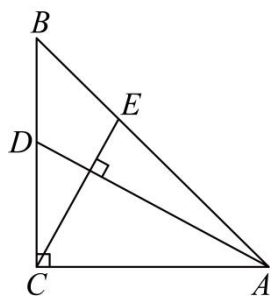
$$\therefore a = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = 2CD;$$



【小问2详解】

图1

解：连接 EF ，

$$\therefore DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 为 } AD \text{ 的中点},$$

$$\therefore EF = CF = AF = \frac{1}{2} AD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle EAF, \angle CAF = \angle ACF, \angle ECF = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle DFE = 2\angle EAF, \angle DFC = 2\angle CAF,$$

$$\therefore \angle DFE + \angle DFC = 2\angle EAF + 2\angle CAF = 2(\angle EAF + \angle CAF) = 2\angle BAC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

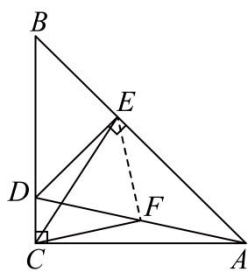


图2

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的性质，直角三角形的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理及外角性质，正确作出辅助线是解题的关键.

24. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根为 α 、 β ，那么 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ，这就是一元二次方程的根与系数的关系. 利用该结论，不解方程便可以求二次方程的两根之和与积，例如

$$2x^2 + x - 3 = 0 \text{ 的两个根分别为 } \alpha、\beta. \text{ 则 } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}.$$

(1) 小聪同学喜爱思考，他发现利用根与系数的关系不仅可以求解两根之和与两根之积，还可求解方程两根的倒数和. 不解方程，请求一元二次方程 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根的倒数和.

(2) 小明同学酷爱数学，他进一步研究根与系数的关系，发现了一种解一元二次方程的新方法. 例如方程 $2x^2 - 3x - 7 = 0$ ， $\therefore a = 2$ 、 $b = -3$ 、 $c = -7$ ， $\therefore x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$.

设 $x_1 = \frac{3}{4} + k$ ， $x_2 = \frac{3}{4} - k$ ，则 $x_1 x_2 = \left(\frac{3}{4} + k\right)\left(\frac{3}{4} - k\right) = \frac{7}{2}$ ，即 $\frac{9}{16} - k^2 = -\frac{7}{2}$ ，解得 $k = \pm \frac{\sqrt{65}}{4}$ ，所以原

方程的解为 $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4}$ 、 $x_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4}$. 请利用小明的方法解方程 $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

(3) 小睿同学善于发现，他对三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 的根与系数关系作了探究，将该方程两边同时除以 a 可得 $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. 若该方程的三个根分别为 α 、 β 、 γ ，则

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ ，将其展开后为 $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$ ，于是

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ 、 $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$ 、 $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$. 若三次方程 $x^3 - x^2 - 3x - 10 = 0$ 的三个根分别为 α 、

β 、 γ ，且 $\mu = -\alpha + \beta + \gamma$. 请先说明 $\mu + 2\alpha = 1$ 、再直接（不必书写过程）写一个三次方程且使得该三次方程的三个根分别为 $-\alpha + \beta + \gamma$ 、 $\alpha - \beta + \gamma$ 、 $\alpha + \beta - \gamma$.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

$$(2) \quad x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$(3) \quad x^3 - x^2 - 13x - 93 = 0, \text{ 详见解析}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的根与系数关系的综合应用等知识点，

(1) 把两根倒数和通分后代入计算即可；

(2) 仿照小明同学的求解即可；

(3) 由根与系数的关系，可得 $a + \beta + \gamma = 1$ ， $a\beta + a\gamma + \beta\gamma = -3$ ， $a\beta\gamma = 10$ ，代入即可证出 $\mu + 2a = 1$ ，

可设新方程为 $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ ，由题意和根与系数的关系化简即可得出 m, n, p 的值，进而即可得解；

熟练掌握其性质并灵活运用是解决此题的关键.

【小问 1 详解】

$$\therefore a + \beta = \frac{b}{a} = -\frac{1}{2}, \quad a\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{a + \beta}{a\beta} = -\frac{1}{2} \div \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3},$$

【小问 2 详解】

$$3x^2 - 4x - 2 = 0,$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -4, \quad c = -2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4}{3}, \quad x_1 x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{设 } x_1 = \frac{2}{3} + k, \quad x_2 = \frac{2}{3} - k,$$

$$\therefore x_1 x_2 = \left(\frac{2}{3} + k\right)\left(\frac{2}{3} - k\right) = -\frac{2}{3}, \quad \text{即 } \frac{4}{9} - k^2 = -\frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3};$$

【小问 3 详解】

$\therefore$ 三次方程 $x^3 - x^2 - 3x - 10 = 0$ 的三个根分别为 a, β, γ ，且 $\mu = -a + \beta + \gamma$ ，

$\therefore$ 由根与系数的关系, 可得 $a + \beta + \gamma = 1$, $a\beta + a\gamma + \beta\gamma = -3$, $a\beta\gamma = 10$,

$\therefore \mu + 2a = (-a + \beta + r) + 2a = a + \beta + \gamma = 1$,

由题意得, 可设新方程为 $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$,

$\therefore$ 新的三次方程, 其三个根分别为 $-a + \beta + \gamma$ 、 $a - \beta + r$ 、 $a + \beta - \gamma$,

又 $\because a + \beta + \gamma = 1$,

$\therefore$ 新的三次方程, 其三个根分别可化为 $1 - 2a$ 、 $1 - 2\beta$ 、 $1 - 2\gamma$,

$\therefore (1 - 2a) + (1 - 2\beta) + (1 - 2\gamma) = -m$, $(1 - 2a)(1 - 2\beta) + (1 - 2a)(1 - 2\gamma) + (1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) = n$,

$(1 - 2a)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) = p$,

$\therefore m = -[3 - 2(a + \beta + \gamma)] = -(3 - 2) = -1$, $3 - 4(a + \beta + \gamma) + 4(a\beta + a\gamma + \beta\gamma) = n$,

$1 - 2(a + \beta + \gamma) + 4(a\beta + a\gamma + \beta\gamma) - 8a\beta\gamma = p$,

$\therefore n = 3 - 4 \times 1 + 4 \times (-3) = -13$, $p = 1 - 2 \times 1 + 4 \times (-3) - 8 \times 10 = -93$,

$\therefore$ 新方程为 $x^3 - x^2 - 13x - 93 = 0$.

25. 已知: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, 点 P 在角平分线 CD 的延长线上.

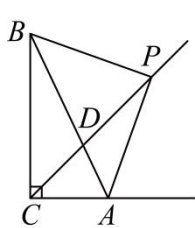


图1

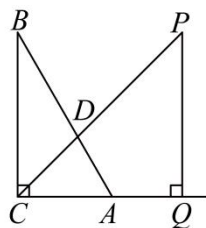


图2

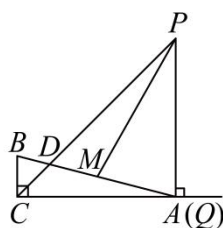


图3

(1) 如图1, 连接 PA 、 PB , $PA = PB$, 求证, $PA \perp PB$;

(2) 过点 P 作 $PQ \perp CA$, 垂足为点 Q ;

①如图2, 若 $PQ = BC$ 、 $AQ = AD$, 求 $\angle B$ 的度数;

②如图3, 若垂足点 Q 恰好与点 A 重合, 点 M 在线段 AB 上, 且点 M 在线段 CA 的垂直平分线上, 连接 PM ,

$PM = PA$. 若 $AB = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) ① $\angle B = 30^\circ$; ② 1

【解析】

【分析】(1) 如图, 过点 P 作 $PD \perp CA$ 的延长线于点 D , $PE \perp BC$ 于点 E , 由角平分线的性质可得 $PD = PE$, 进而可证 $\text{Rt}\triangle ADP \cong \text{Rt}\triangle BEP$ (HL), 得到 $\angle APD = \angle BPE$, 由可得四边形 $CDPE$ 是矩形, 得到 $\angle DPE = 90^\circ$, 即得 $\angle APB = \angle BPE + \angle APE = \angle APD + \angle APE = \angle DPE = 90^\circ$, 即可求证;

(2) ①连接 DQ , 证明 $\triangle BCD \cong \triangle QCD$ (SAS) 可得 $\angle B = \angle CQD$, 又由 $AQ = AD$ 可得 $\angle AQD = \angle ADQ$, 即得到 $\angle BCA = \angle AQD + \angle ADQ = 2\angle AQD = 2\angle B$, 进而直角三角形两锐角互余即可求解; ②如图, 过点 M 作 $ME \perp AC$ 于 E , 过点 P 作 $PF \perp AM$ 于 F , 过点 C 作 $CG \perp BD$ 于 G , 可得

$$\angle AEM = \angle CGA = \angle AFP = 90^\circ, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC, \quad \text{证明 } \triangle AEM \sim \triangle ACB \text{ 可得 } \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2},$$

即得到 $AM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$, 再根据等腰三角形的性质可得 $AF = \frac{1}{2}AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 然后证明

$$\triangle ACG \cong \triangle PAF \text{ (AAS)}, \quad \text{得到 } CG = AF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{最后根据三角形的面积公式计算即可求解.}$$

【小问 1 详解】

证明: 如图, 过点 P 作 $PD \perp CA$ 的延长线于点 D , $PE \perp BC$ 于点 E , 则 $\angle PDC = \angle PEC = 90^\circ$,

$\because CP$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\therefore PD = PE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 和 $\text{Rt}\triangle BEP$ 中,

$$\begin{cases} PD = PE \\ PA = PB \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADP \cong \text{Rt}\triangle BEP \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle APD = \angle BPE,$$

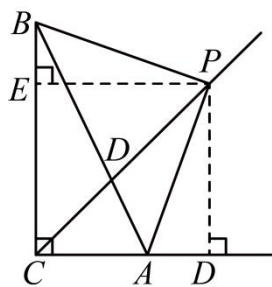
$$\therefore \angle PDC = \angle PEC = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CDPE$ 是矩形,

$$\therefore \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle BPE + \angle APE = \angle APD + \angle APE = \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore PA \perp PB;$$



【小问 2 详解】

图1

解：①连接 DQ ，

$\because CP$ 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

$\because PQ \perp CA$ ，

$$\therefore \angle PQC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 45^\circ,$$

$$\therefore PQ = QC,$$

$$\because PQ = BC,$$

$$\therefore BC = QC,$$

$$\because CD = CD,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle QCD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle B = \angle CQD,$$

$$\because AQ = AD,$$

$$\therefore \angle AQD = \angle ADQ,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle AQD + \angle ADQ = 2\angle AQD = 2\angle B,$$

$$\because \angle B + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + 2\angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$

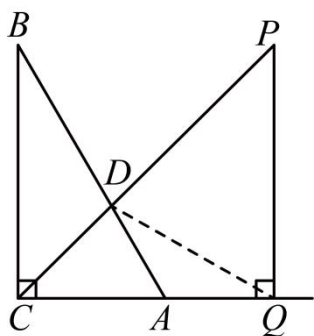


图2

②如图，过点 M 作 $ME \perp AC$ 于 E ，过点 P 作 $PF \perp AM$ 于 F ，过点 C 作 $CG \perp BD$ 于 G ，则

$$\angle AEM = \angle CGA = \angle AFP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 M 在线段 CA 的垂直平分线上，

$$\therefore AE = CE = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore \angle AEM = \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle EAM = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore PM = PA, \quad PF \perp AM,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2} AM = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle PAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAG + \angle PAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APF + \angle PAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAG = \angle APF,$$

$$\therefore CP \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = AP,$$

$$\therefore \angle CGA = \angle AFP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACG \cong \triangle PAF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CG = AF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

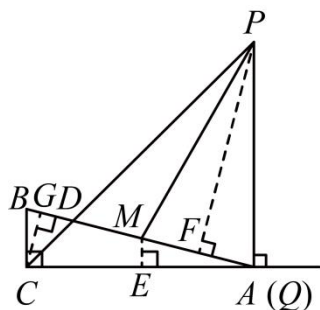


图3

【点睛】 本题考查了角平分线的 性质，全等三角形的判定和性质，矩形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，三角形外角性质，线段垂直平分线的性质，相似三角形的判定和性质，正确作出辅助线是解题的关键.