

青浦一中 2024 学年第一学期期中学业质量调研

初二年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟, 满分 100 分) 2024.11

一、选择题: (本大题共 6 题, 每小题 2 分, 满分 12 分)

[每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{x^2-3}$; B. $\sqrt{\frac{x-y}{x}}$; C. $\sqrt{3a^2b}$; D. $\sqrt{9x}$.

【答案】A

【解析】

【分析】结合最简二次根式的概念: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 进行解答即可.

【详解】A. $\sqrt{x^2-3}$, 是最简二次根式, 符合题意;

B. $\sqrt{\frac{x-y}{x}} = \frac{\sqrt{x(x-y)}}{x}$, 故该选项不是最简二次根式, 不符合题意;

C. $\sqrt{3a^2b} = |a|\sqrt{3b}$, 故该选项不是最简二次根式, 不符合题意;

D. $\sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$, 故该选项不是最简二次根式, 不符合题意;

故选 A

【点睛】本题考查了最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的概念是解答本题的关键.

2. 下列方程中, 属于一元二次方程的是 ()

- A. $3^2x-1=0$ B. $x^2=(3x-2)(x+1)$
C. $x^2+y=0$ D. $x+\frac{1}{x^2}=3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程的定义, 熟知只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程是解答此题的关键. 根据定义逐项判断即可.

【详解】解: A、 $3^2x-1=0$ 未知数的最高次数是 1, 故不是一元二次方程, 不符合题意;

B、方程 $x^2=(3x-2)(x+1)$ 化为 $2x^2+x-2=0$, 是一元二次方程, 符合题意;

C、 $x^2 + y = 0$ 含有两个未知数，故不是一元二次方程，不符合题意；

D、 $x + \frac{1}{x^2} = 3$ 不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意.

故选：B.

3. 关于反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ，下列说法中错误的是（ ）

A. 它的图象是双曲线

B. 它的图象在第一、三象限

C. y 的值随 x 的值增大而减小

D. 若点 (a, b) 在它的图象上，则点 (b, a) 也在它的图象上

【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上点的坐标特征，以及该函数的图象的性质进行分析.

【详解】A. 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象是双曲线，正确，不符合题意；

B. $k = 3 > 0$ ，图象位于一、三象限，正确，不符合题意；

C. 在每一象限内， y 的值随 x 的增大而减小，错误，符合题意；

D. $\because ab = ba$ ， $\therefore$ 若点 (a, b) 在它的图象上，则点 (b, a) 也在它的图象上，故正确，不符合题意.

故选 C.

【点睛】本题主要考查反比例函数的性质. 注意：描述反比例函数的增减性时要指明在每一象限内.

4. 下列命题的逆命题是真命题的是（ ）

A. 在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 为三角形三边的长，若 $a^2 = (b+c)(b-c)$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

B. 关于某个点中心对称的两个三角形全等.

C. 两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相垂直.

D. 全等三角形的对应角相等.

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理，中心对称图形的性质和判定，全等三角形的判定和性质，平行线的判定和性质一一判断即可.

【详解】解：A、在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 为三角形三边的长，若 $a^2 = (b+c)(b-c)$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角

三角形. 它的逆命题是假命题, $\angle B$ 不一定是直角, 本选项不符合题意;

B、关于某个点中心对称的两个三角形全等, 它的逆命题是假命题, 全等三角形不一定是中心对称图形, 本选项不符合题意;

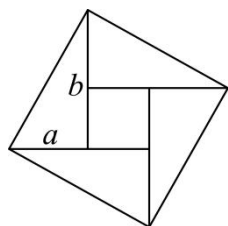
C、两条平行线被第三条直线所截, 一对同旁内角的平分线互相垂直, 它的逆命题是真命题, 本选项符合题意;

D、全等三角形的对应角相等, 它的逆命题是假命题, 对应角相等的三角形不一定是全等三角形, 本选项不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查勾股定理, 中心对称图形的性质和判定, 全等三角形的判定和性质, 平行线的判定和性质等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

5. 我国是最早了解勾股定理的国家之一, 它被记载于我国古代的数学著作《周髀算经》中, 汉代数学家赵爽创制了《勾股弦图》, 它是由四个全等的直角三角形拼接而成, 如果小正方形的面积是 2, 直角三角形的直角边长分别为 a 、 b , 且 $a^2 + b^2 = ab + 10$, 那么大正方形的面积为 ().



A. 8

B. 10

C. 14

D. 18

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理的证明、正方形的性质以及完全平方公式等知识, 求出 $ab = 8$ 是解题的关键.

由正方形性质和勾股定理列方程即可得到结论.

【详解】 解: 设大正方形的边长为 c , 则大正方形的面积是 c^2 ,

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\because a^2 + b^2 = ab + 10,$$

$$\therefore c^2 = ab + 10,$$

$$\therefore ab = c^2 - 10,$$

$$\because \text{小正方形的面积为: } (b-a)^2 = 2,$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - 2ab = ab + 10 - 2ab = 2,$$

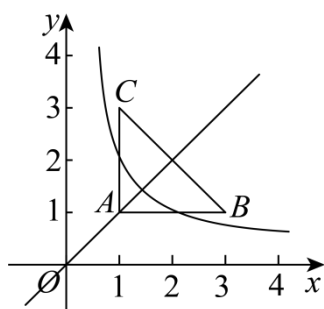
$$\therefore ab = 8,$$

$$\because ab = c^2 - 10,$$

$$\therefore c^2 = 18,$$

故选 D.

6. 如图, 等腰直角 ABC 位于第一象限, $AB = AC = 2$, 直角顶点 A 在直线 $y = x$ 上, 其中 A 点的横坐标为 1, 且两条直角边平行于 x 轴、 y 轴, 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与 ABC 有交点, 则 k 的取值范围是 ()



A. $1 < k < 2$

B. $1 \leq k \leq 2$

C. $1 < k < 4$

D. $1 \leq k \leq 4$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解题的关键.

先根据题意求出 A 点的坐标, 再根据 $AB = AC = 2$, AB, AC 分别平行于 x 轴, y 轴求出 B, C 两点的坐标,

再根据双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 分别经过 A, B 两点时 k 的取值范围即可.

【详解】 解: 点 A 在直线 $y = x$ 上, 其中 A 点的横坐标为 1,

则把 $x = 1$ 代入 $y = x$, 解得: $y = 1$,

则 A 的坐标是 $(1, 1)$,

$$\because AB = AC = 2,$$

$\therefore B$ 点的坐标是 $(3, 1)$, C 点的坐标是 $(1, 3)$,

$\therefore BC$ 的中点坐标为 $(2, 2)$,

当双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 $(1,1)$ 时, $k = 1$,

当双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 $(2,2)$ 时, $k = 4$,

因而 $1 \leq k \leq 4$.

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 化简: $\sqrt{24x^3} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{6x}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质和乘法法则化简即可

【详解】 $\because \sqrt{24x^3}$ 有意义, $\therefore x^3 > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore \sqrt{24x^3} = \sqrt{24} \sqrt{x^2 x} = 2x\sqrt{6x}$.

故答案为: $2x\sqrt{6x}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的性质和乘法法则, 掌握以上知识是解题的关键.

8. 函数 $y = \sqrt{4+3x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件、自变量的取值范围等知识点, 掌握二次根式被开方数大于等于零成为解题的关键.

根据二次根式有意义的条件列不等式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = \sqrt{4+3x}$,

$\therefore 4+3x \geq 0$, 解得: $x \geq -\frac{4}{3}$,

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt{4+3x}$ 的定义域是 $x \geq -\frac{4}{3}$.

故答案为: $x \geq -\frac{4}{3}$.

9. 如果 $f(x) = \frac{1}{x-2}$, 那么 $f(\sqrt{5}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 将 $x = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{1}{x-2}$ 中进行计算即可得到 $f(\sqrt{5})$ 的值.

【详解】 解: 将 $x = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{1}{x-2}$, 得 $f(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$.

故答案为: $\sqrt{5} + 2$.

【点睛】 本题考查了二次根式的计算, 计算过程中进行分母有理化是解题的关键.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2x + m-3 = 0$ 的一个根是 0, 那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义得到 $m-1 \neq 0$, 由方程的解的定义, 把 $x=0$ 代入已知方程, 列出关于 m 的新方程, 通过解新方程来求 m 的值.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2x + m-3 = 0$ 的一个根为 0,

$\therefore m-3 = 0$, 且 $m-1 \neq 0$,

解得, $m = 3$,

故答案是: 3.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解的定义和一元二次方程的定义. 注意二次项系数不等于零.

11. 在实数范围内分解因式: $x^2 - 2x - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$

【解析】

【分析】 根据完全平方公式, 可得平方差公式, 根据平方差公式, 可得答案.

【详解】 解: 原式 $= (x^2 - 2x + 1) - 5$

$= (x-1)^2 - (\sqrt{5})^2$

$= (x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$

故答案为: $(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$

【点睛】 本题考查了因式分解，利用完全平方公式得出平方差公式是解题关键.

12. 某种产品原来每件 100 元，经过两次降价，现在每件售价为 81 元，如果每次降价的百分率相同，设这个百分率为 x ，则根据题意，可列出方程为__.

【答案】 $100(1-x)^2 = 81$

【解析】

【分析】 设每次降价百分率为 x ，根据原来每件售价为 100 元，经过两次降价后，现在每件售价为 81 元，可列出方程.

【详解】 解：每次降价百分率为 x ,

$$100(1-x)^2 = 81.$$

故答案为： $100(1-x)^2 = 81$.

【点睛】 本题考查理一元二次方程的应用，是个增长率问题，根据两次降价前的结果，和现在的价格，列出方程是关键.

13. 经过定点 P，且半径等于 2cm 的圆的圆心的轨迹_____.

【答案】 以 P 点为圆心，2cm 为半径的圆

【解析】

【分析】 求圆心的轨迹实际上是求距 P 点 2 厘米能画一个什么图形.

【详解】 解：所求圆心的轨迹，就是到 P 点的距离等于 2 厘米的点的集合，

因此应该是一个以点 P 为圆心，2cm 为半径的圆；

故答案为：以点 P 为圆心，2cm 为半径的圆.

【点睛】 此题所求圆心的轨迹，就是到顶点的距离等于定长的点的集合，因此应该是一个圆.

14. 在直角坐标系内，已知点 $A(m,0)$ ， $B(0,-3)$ ，且 $AB=5$ ，那么 m 的值是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 结合两点间的距离公式根据 AB 的长列等式，计算可求解 m 的值.

【详解】 $\because A(m,0)$ 、 $B(0,-3)$,

$$\therefore AB = \sqrt{m^2 + (-3)^2} = \sqrt{m^2 + 9},$$

$$\because AB = 5,$$

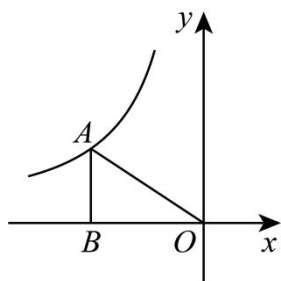
$$\therefore m^2 + 9 = 25,$$

解得 $m = \pm 4$,

故答案为: ± 4 .

【点睛】 本题主要考查两点间的距离公式, 掌握两点间的距离公式是解题的关键.

15. 如图, 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上, $AB \perp x$ 轴, 垂足为 B , 且 $S_{\triangle AOB} = 3$, 则 $k =$ _____.



【答案】 -6

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何应用, 熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题关键. 设点 A 的坐标为 $A(m, n)$, 则 $OB = -m, AB = n$, 先根据三角形的面积公式可得 $mn = -6$, 再将点 $A(m, n)$ 代入计算即可得.

【详解】 解: 设点 A 的坐标为 $A(m, n)$,

$\because AB \perp x$ 轴, 且点 A 在第二象限,

$\therefore OB = -m, AB = n$,

$\because S_{\triangle AOB} = 3$,

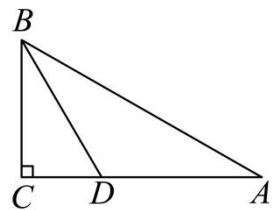
$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OB = 3$, 即 $-\frac{1}{2} mn = 3$,

解得 $mn = -6$,

将点 $A(m, n)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 得: $k = mn = -6$,

故答案为: -6 .

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 若 $CD = 2\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, 则 $\triangle ABD$ 的面积是 _____ cm^2 .

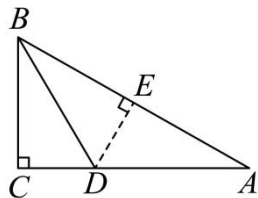


【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质，过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，由角平分线的性质得 $DE = CD = 2\text{cm}$ ，再根据三角形面积公式即可求解，解题的关键是掌握角平分线的有关性质。

【详解】解：如图，过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp BC,$$

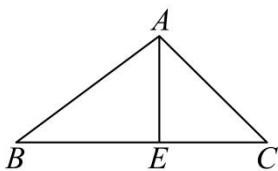
$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore DE = CD = 2\text{cm},$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} AB \times DE = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8 (\text{cm}^2),$$

故答案为：8.

17. 定义：三角形一边上的点将该边分为两条线段，且这两条线段的积等于这个点到这边所对顶点连线的平方，则称这个点为三角形该边的“好点”。如图，在 ABC 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AE = 6$ ， $BC = 14$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，点 D 是 BC 边上的“好点”，则线段 BD 的长为_____。



【答案】5 或 10

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定及性质，勾股定理，解一元二次方程等知识，由等题意得 $AE = CE = 6$ ， $BE = 8$ ，设 $BD = x$ ，得 $DE = |8 - x|$ ， $CD = 14 - x$ ，然后根据“好点”定义及勾股定理得到

$BD \cdot CD = DE^2 + AE^2$ 是解决问题的关键。

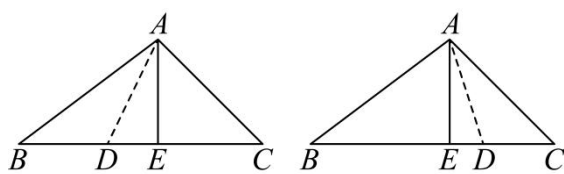
【详解】解： $\because AE \perp BC$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle CAE = 45^\circ, \text{ 则 } AE = CE = 6,$$

$$\therefore BC = 14,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 8,$$

设 $BD = x$ ，如图，可得 $DE = |8 - x|$ ， $CD = BC - BD = 14 - x$ ，



$\because$ 点 D 是 BC 边上的“好点”，

$$\therefore AD^2 = BD \cdot CD,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中，由勾股定理可得： $AD^2 = DE^2 + AE^2$ ，

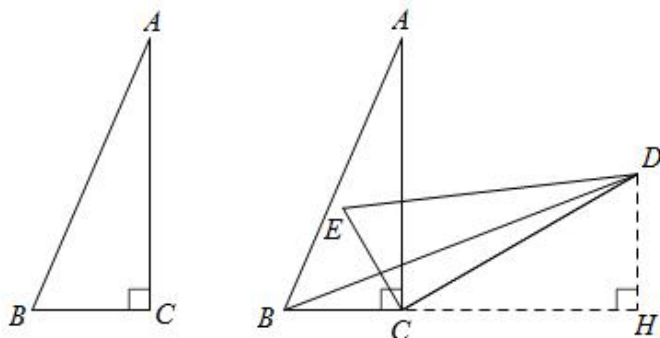
$$\text{则 } BD \cdot CD = DE^2 + AE^2, \text{ 即: } x(14 - x) = (8 - x)^2 + 6^2,$$

解得： $x_1 = 5$ ， $x_2 = 10$ ，

即： $BD = 5$ 或 10 ；

故答案为：5 或 10.

18. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4\sqrt{3}$ ， $BC = 3$ ，如图所示. 如果将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$ ，其中点 A 、 B 的对应点分别为点 D 、 E ，联结 BD ，那么 BD 的长等于_____.

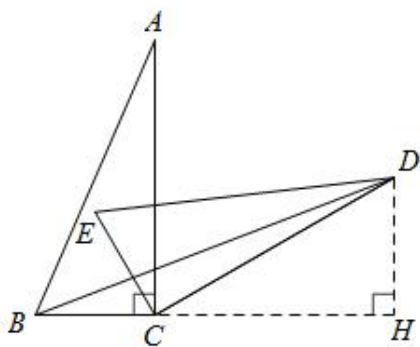


【答案】 $\sqrt{93}$ ；

【解析】

【分析】过 D 作 $DH \perp BC$ 交 BC 延长线于 H ，根据旋转的性质，可得 $CD = AC$ ，并可求出 $\angle DCH = 30^\circ$ ，再在 $Rt\triangle CDH$ 中求出 CH 、 DH ，则可得 BH ，利用勾股定理即可求得 BD 。

【详解】解：如图，过 D 作 $DH \perp BC$ 交 BC 延长线于 H ，



依题可知 $\angle BCE=60^\circ$, $\angle ACB=90^\circ=\angle DCE$,

$$\therefore \angle ACE=\angle ACB-\angle BCE=30^\circ,$$

$$\because \angle ACH=\angle ACB=90^\circ=\angle DCE,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle DCE-\angle ACE=60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCH=\angle ACH-\angle ACD=30^\circ,$$

$$\because \text{根据旋转的性质, } CD=AC=4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle DCH \text{ 中, } DH=\frac{1}{2}CD=2\sqrt{3},$$

$$\text{则 } CH=\sqrt{3}DH=6,$$

$$\therefore BH=BC+CH=3+6=9,$$

$$\therefore BD=\sqrt{9^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{93}.$$

故答案为: $\sqrt{93}$.

【点睛】 本题考查了旋转的性质、勾股定理、含 30° 角的直角三角形的性质等知识, 充分利用勾股定理是解答本题的关键.

三、解答题 (本大题共 5 题, 每题 6 分, 满分 30 分)

[请将解题过程填入答题纸的相应位置]

19. 计算: $(\sqrt{3}-2)^2 + \frac{3}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}.$

【答案】 11

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算, 先根据完全平方公式, 分母有理化和二次根式的性质将原式化简, 再进行合并即可. 掌握相应的运算法则和公式是解题的关键.

【详解】 解: $(\sqrt{3}-2)^2 + \frac{3}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

$$= 3 - 4\sqrt{3} + 4 + \frac{3(2+\sqrt{3})}{1} - |\sqrt{3}-2|.$$

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 6 + 3\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}).$$

$$= 13 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}$$

$$= 11.$$

20. 解方程: $(x-9)^2 = 4(x-1)^2$.

【答案】 $x_1 = -7$, $x_2 = \frac{11}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，根据直接开平方法解一元二次方程，即可求解.

【详解】 解：由题意可得： $x-9=2(x-1)$ 或 $x-9=-2(x-1)$.

$$\therefore x-9=2x-2 \text{ 或 } x-9=-2x+2$$

$$\text{解得： } x=-7 \text{ 或 } x=\frac{11}{3}.$$

$$\therefore \text{原方程的解是： } x_1 = -7, x_2 = \frac{11}{3}$$

21. 已知方程 $(m-2)x^2 + 2mx + m-3 = 0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

【答案】 $m > \frac{6}{5}$ 且 $m \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式与一元二次方程的定义，根据一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ，以及二次项系数不为 0，建立式子，求出 m 的取值范围即可.

【详解】 解： $\Delta = (2m)^2 - 4(m-2)(m-3)$

$$= 4m^2 - 4(m^2 - 5m + 6)$$

$$= 20m - 24.$$

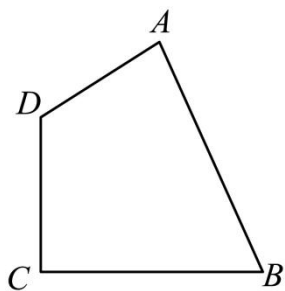
$\because$ 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore 20m - 24 > 0, \text{ 且 } m \neq 2,$$

$$\text{解得 } m > \frac{6}{5},$$

综上所述， m 的取值范围为 $m > \frac{6}{5}$ 且 $m \neq 2$.

22. 如图是一块四边形绿地的示意图, 其中 $AB = 24$, $BC = 15$, $CD = 20$, $DA = 7$, $\angle C = 90^\circ$. 求此绿地 $ABCD$ 的面积.

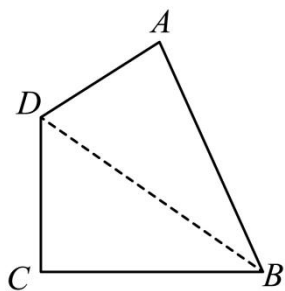


【答案】 234

【解析】

【分析】 连接 BD , 先根据勾股定理求出 BD 的长, 再由勾股定理的逆定理判定 $\triangle ABD$ 为直角三角形, 则四边形 $ABCD$ 的面积 = 直角 $\triangle BCD$ 的面积 + 直角 $\triangle ABD$ 的面积.

【详解】 解: 连接 BD , 如图所示:



$\because \angle C = 90^\circ$, $BC = 15$, $CD = 20$,

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25;$$

在 $\triangle ABD$ 中,

$\because BD = 25$, $AB = 24$, $DA = 7$,

$$\therefore 24^2 + 7^2 = 25^2, \text{ 即 } AB^2 + AD^2 = BD^2,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形.

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD + \frac{1}{2} BC \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7 + \frac{1}{2} \times 15 \times 20$$

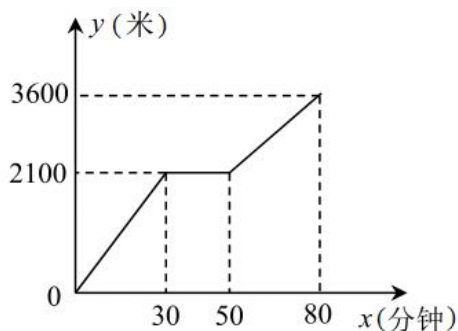
$$= 84 + 150$$

$$= 234;$$

即绿地 $ABCD$ 的面积为 234.

【点睛】 本题考查了勾股定理及其逆定理的相关知识，通过勾股定理的逆定理由边与边的关系可证明直角三角形，正确分割四边形 $ABCD$ 的面积是解题关键.

23. 小明爸妈上山游玩，爸爸步行，妈妈乘坐缆车，相约在山顶缆车的终点会合. 步行的路程是缆车所经线路长的 2.5 倍，妈妈在爸爸出发后 50 分钟才坐上缆车，缆车的平均速度为每分钟 180 米. 图中反映了爸爸整个过程中步行的路程 y (米) 与时间 x (分钟) 之间的函数关系.



- (1) 爸爸行走的总路程是_____米，他途中休息了_____分钟；
- (2) 当 $0 \leq x \leq 30$ 时， y 与 x 之间的函数关系式是_____；
- (3) 爸爸休息之后，行走的速度是每分钟_____米；当妈妈到达缆车终点时，爸爸离缆车终点的路程是_____米.

【答案】 (1) 3600； 20

(2) $y = 70x$

(3) 50； 1100

【解析】

【分析】 (1) 根据图象获取信息：爸爸到达山顶用时 80 分钟，中途休息了 20 分钟，行程为 3600 米；

(2) 利用待定系数法解答正比例函数解析式即可；

(3) 休息前 30 分钟行走 2100 米，休息后 30 分钟行走 $(3600 - 2100)$ 米，利用路程、时间得出速度即可，先求妈妈到达缆车终点的时间，再计算爸爸行走路程，从而求出爸爸离缆车终点的路程.

【小问 1 详解】

根据图象知：爸爸行走的总路程是 3600 米，他途中休息了 20 分钟.

故答案为 3600， 20；

【小问 2 详解】

设函数关系式为 $y = kx$ ，图像过 $(30, 2100)$

可得： $2100 = 30k$ ，

解得: $k = 70$,

所以解析式为: $y = 70x$,

故答案为 $y = 70x$;

【小问 3 详解】

爸爸休息之后行走的速度是 $(3600 - 2100) \div (80 - 50) = 50$ 米/分钟,

妈妈到达缆车终点的时间: $3600 \div 2.5 \div 180 = 8$ (分),

此时爸爸比妈妈迟到 $80 - 50 - 8 = 22$ (分),

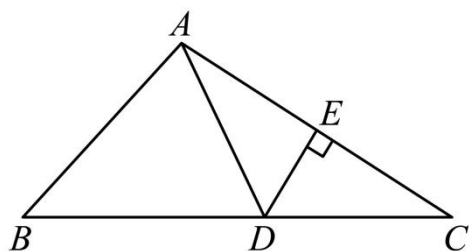
$\therefore$ 妈妈到达终点时, 爸爸离缆车终点的路程为: $50 \times 22 = 1100$ (米),

故答案为 50; 1100.

【点睛】此题考查一次函数及其图象的应用, 从图象中获取相关信息是关键.

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 24、25、26 题每题 8 分, 第 27 题 10 分, 满分 34 分)

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, 边 AC 的垂直平分线分别交边 BC 、 AC 于点 D 、 E , $DC = 6$. 求 AB 的长.



【答案】 $AB = 3\sqrt{6}$.

【解析】

【分析】连接 BE , 证明 $\angle DAC = \angle C = 30^\circ$, 根据含 30° 角的直角三角形的边角关系求出 AC , AF , 再利用勾股定理即可解决问题.

【详解】解: 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ,

$\because DE$ 垂直平分 AC ,

$\therefore EA = EC$, $AD = CD = 6$,

$\because \angle C = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAC = \angle C = 30^\circ$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$,

$$\therefore CE = AE = \sqrt{CD^2 - ED^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 2EC = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

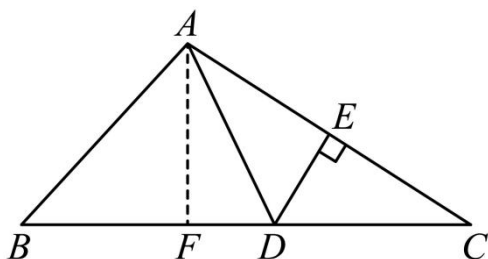
$$\because \angle B = 45^\circ, AF \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAF = 180^\circ - \angle B - \angle AFB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle B,$$

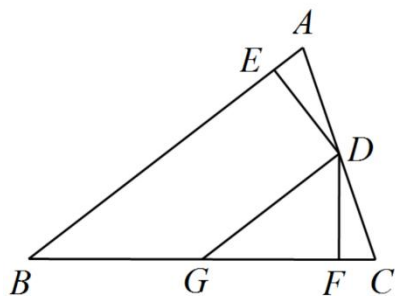
$$\therefore BF = AF = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6}.$$



【点睛】本题考查了垂直平分线的性质，勾股定理的应用，含 30° 角的直角三角形的边的关系，掌握垂直平分线的性质是解题的关键.

25. 已知：如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点，过点 D 作 $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ， E 、 F 为垂足，再过点 D 作 $DG \parallel AB$ ，交 BC 于点 G ，且 $DE = DF$ 。



(1) 求证： $DG = BG$ ；

(2) 当 D 点是 AC 边的中点时，求证： $BD \perp AC$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

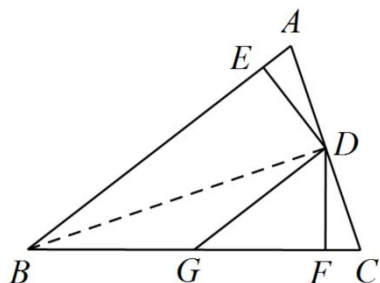
【分析】(1) 连接 BD ，先根据 $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ 且 $DE = DF$ 可知 $\angle ABD = \angle DBC$ ，再根据 $DG \parallel AB$ ，即可得出 $\angle ABD = \angle BDG$ ，进而可得出 $\angle BDG = \angle DBC$ ，由等角对等边可知 $DG = BG$ ；

(2) 先根据 (1) 中 $\angle ABD = \angle DBC$ 可知 $\angle EDB = \angle FDB$ ，由全等三角形的判定定理可得出 $\triangle BDE \cong \triangle BDF$ ，

再根据全等三角形的性质可得出 $BE = BF$ ， $DE = DF$ ，同理证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ ，得出 $AE = CF$ ，推出 $AB = CB$ ，由等腰三角形三线合一即可得出。

【小问 1 详解】

证明：连接 BD 。



$\because DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ 且 $DE = DF$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle DBC$ ，

又 $\because DG \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle BDG$ ，

$\therefore \angle BDG = \angle DBC$ ，

$\therefore DG = BG$ ；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) $\angle ABD = \angle DBC$ 可知， $\angle EDB = \angle FDB$ ，

在 $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDF$ 中，

$\because \angle ABD = \angle DBC$ ， $BD = BD$ ， $\angle EDB = \angle FDB$ ，

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDF$ ，

$\therefore BE = BF$ ， $DE = DF$ ，

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$\because AD = CD$ ， $ED = FD$ ， $\angle AED = \angle CFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$ ，

$\therefore AE = CF$ ，

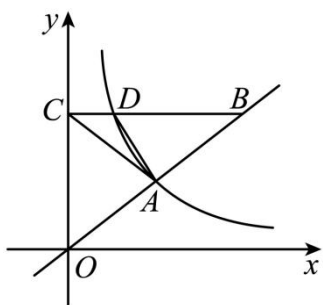
$\therefore AB = CB$ ，

又 D 为 AC 的中点，

$\therefore BD$ 垂直平分 AC 。

【点睛】 本题考查的是线段垂直平分线的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定及性质，根据题意作出辅助线，构造出全等三角形是解答此题的关键。

26. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(3, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，点 B 在 OA 延长线上， $BC \perp y$ 轴，垂足为点 C ，直线 BC 与反比例函数的图象相交于点 D ，连接 AC ， AD 。



(1) 求该反比例函数解析式；

(2) 若 $S_{\triangle ACD} = \frac{3}{2}$ ，求线段 BD 的长度；

(3) 在第 (2) 问的条件下， x 轴上是否存在一点使 $\angle BMO = \angle ACB$ ，若存在请求出点 M 的坐标，若不存在请说明理由。

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$

(2) $\frac{9}{2}$

(3) 存在， $M(12, 0)$ ，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 把点 $A(3, 2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ ，即可求出函数解析数。

(2) 过点 A 作 $AE \perp OC$ ，垂足为 E ，设直线 OA 关系式为 $y = kx$ ，将 $A(3, 2)$ 代入得到直线 OA 的关系式为 $y = \frac{2}{3}x$ ，设点 $C(0, a)$ ，根据三角形面积公式得到 $a=4$ ，于是得到结论。

(3) 延长 CA 交 x 轴于点 P ，过 B 作 $BM \parallel AC$ 交 x 轴于 M ，则 $\angle BMO = \angle CPO = \angle ACB$ ，根据平行四边形即可得到结论。

【小问 1 详解】

$\because$ 点 $A(3, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上，

$\therefore k = 3 \times 2 = 6$ ，

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ 。

【小问 2 详解】

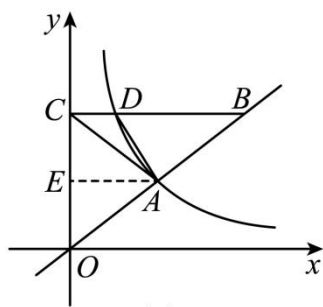


图1

如图 1, 过点 A 作 $AE \perp OC$, 垂足为 E ,

设直线 OA 关系式为 $y = kx$, 将 $A(3, 2)$ 代入得 $k = \frac{2}{3}$,

$\therefore OA$ 的关系式为 $y = \frac{2}{3}x$,

设点 $C(0, a)$, 把 $y = a$ 代入 $y = \frac{2}{3}x$, 得 $x = \frac{3}{2}a$,

把 $y = a$ 代入 $y = \frac{6}{x}$, 得 $x = \frac{6}{a}$,

$\therefore B(\frac{3}{2}a, a)$, 即 $BC = \frac{3}{2}a$,

$\therefore D(\frac{6}{a}, a)$, 即 $CD = \frac{6}{a}$,

$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{1}{2}CD \times EC = \frac{3}{2}$, 即 $\frac{1}{2} \times \frac{6}{a} \times (a - 2) = \frac{3}{2}$,

解得 $a = 4$,

$\therefore BD = BC - CD = \frac{3}{2}a - \frac{6}{a} = \frac{9}{2}$,

故线段 BD 的长度为 $\frac{9}{2}$.

【小问 3 详解】

存在

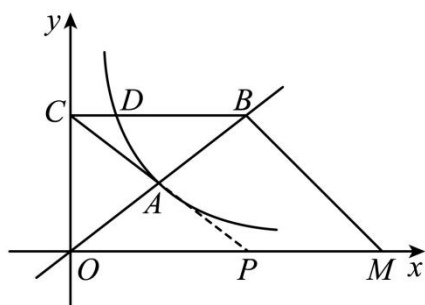


图2

延长 CA 交 x 轴于点 P ,

$\therefore BC \perp y$ 轴,

$$\therefore BC \parallel x,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle APO,$$

过 B 作 $BM \parallel AC$ 交 x 轴于 M , 则 $\angle BMO = \angle CPO = \angle ACB$,

由(1)知 $C(0, 4)$,

$$\therefore A(3, 2),$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + 4,$$

当 $y = 0$ 时, $x = 6$,

$$\therefore P(6, 0),$$

$$\therefore BC \parallel x \text{ 轴}, BM \parallel AC$$

$\therefore$ 四边形 $BCPM$ 是平行四边形,

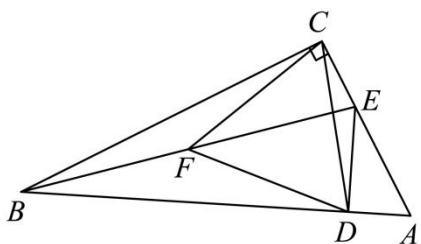
$$\therefore PM = BC = 6,$$

$$\therefore OM = 12,$$

$$\therefore M(12, 0).$$

【点睛】 本题考查了反比例函数的综合题, 待定系数法求函数的解析式, 平行四边形的判定和性质, 平行线的性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.

27. 如图所示, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AC = 3$, 点 D 是边 AB 上的动点(点 D 与点 A 、 B 不重合), 过点 D 作 DE 垂直于 AB 交射线 AC 与 E , 连接 BE , 点 F 是 BD 的中点, 连接 CD 、 CF 、 DF .



(1) 当点 E 在边 AC 上 (点 E 与点 C 不重合) 时, 设 $AD = x$, $CE = y$.

①直接写出 y 关于 x 的函数解析式及定义域;

②求证: $\triangle CDF$ 是等边三角形;

(2) 如果 $BE = 2\sqrt{7}$, 求出 AD 的长.

【答案】 (1) ① $y = -2x + 3 \left(0 < x < \frac{3}{2} \right)$; ②见解析

(2) 1或2

【解析】

【分析】(1) ①根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半可得 $AE = 2AD$, 然后根据 $AC = 3$ 进行解答即可;

②根据直角三角形斜边上中线等于斜边的一半得到 $CF = DF = \frac{1}{2}BE$, 再根据三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和得到 $\angle CFD = 2\angle CBA$, 然后即可证得 $\triangle CDF$ 是等边三角形;

(2) 先求出 BC 的长, 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, 再利用勾股定理求出 $CE = 1$, 再分点 E 在 AC 上和点 E 在 AC 延长线上两种情况求解.

【小问 1 详解】

① $\because \angle A = 60^\circ, DE \perp AB$,

$$\therefore \angle AED = 30^\circ$$

$$\therefore AE = 2AD = 2x,$$

$$\text{又} \because AC = AE + CE,$$

$$\therefore 3 = 2x + y,$$

$$\therefore y = -2x + 3 \left(0 < x < \frac{3}{2} \right);$$

②证明: 在 $\text{Rt}\triangle ECB$ 和 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中, $\angle ECB = \angle EDB = 90^\circ$,

$\because F$ 是 BE 的中点,

$$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}BE = BF.$$

$$\therefore \angle FCB = \angle CBF, \angle FDB = \angle DBF,$$

$$\therefore \angle CFE = 2\angle CBF, \angle DFE = 2\angle DBF,$$

$$\therefore \angle CFE + \angle DFE = 2(\angle CBF + \angle DBF),$$

$$\text{即 } \angle CFD = 2\angle CBA.$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CDF$ 是等边三角形;

【小问 2 详解】

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle A = 60^\circ, AC = 3,$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中,

$$CE = \sqrt{BE^2 - BC^2} = 1.$$

$$\text{当点 } E \text{ 在 } AC \text{ 上时, } AD = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(3-1) = 1;$$

$$\text{当点 } E \text{ 在 } AC \text{ 延长线上时, } AD = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(3+1) = 2.$$

综上所述: AD 的长为 1 或 2.

【点睛】 本题主要考查直角三角形的性质以及勾股定理及等边三角形的判定与性质的综合运用, 综合性较强, 注意认真分析题中条件.