

2024 学年第一学期八年级数学期中试卷

(时长: 100 分钟, 满分: 150 分)

一、选择题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 ()

A. $\sqrt{a-b}$

B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

C. $\sqrt{a+b}$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分母有理化, 熟练掌握两个含二次根式的代数式相乘时, 它们的积不含二次根式, 这样的两个代数式称作互为有理化因式是解题的关键.

根据有理化因式的定义进行判断即可.

【详解】解: 由题意知, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 $\sqrt{a+b}$,

故选: C.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{24}$

B. $\sqrt{0.2}$

C. $\sqrt{\frac{3}{4}}$

D. $\sqrt{98}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了利用二次根式的性质进行化简, 同类二次根式. 熟练掌握利用二次根式的性质进行化简, 同类二次根式是解题的关键.

利用二次根式的性质对各数进行化简, 然后根据同类二次根式的定义判断作答即可.

【详解】解: 由题意知, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

A 中 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 不是 $\sqrt{8}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

B 中 $\sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 不是 $\sqrt{8}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

C 中 $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 不是 $\sqrt{8}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

D 中 $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, 是 $\sqrt{8}$ 的同类二次根式, 故符合要求;

故选：D.

3. 下列方程中，没有实数根的方程是（ ）

A. $x^2 - 2x + 1 = 0$

B. $x^2 + 4 = 0$

C. $3x^2 - 8 = 0$

D. $2x^2 + x - 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根. 一元二次方程中，没有实数根，即根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

【详解】解：A. $\because \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ ，方程有两个相等的实数根，不符合题意；

B. $\because \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$ ，方程没有实数根，符合题意；

C. $\because \Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 96 > 0$ ，方程有两个不相等的实数根，不符合题意；

D. $\because \Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$ ，方程有两个不相等的实数根，不符合题意.

故选：B.

4. 如果关于 x 的方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 有实数根，那么 k 的取值范围是（ ）

A. $k \geq -\frac{1}{4}$

B. $k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

C. $k < -\frac{1}{4}$

D. $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的定义，一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式. 熟练掌握一元一次方程的定义，一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式是解题的关键.

由题意知，分方程是一元一次方程，一元二次方程两种情况求解作答即可.

【详解】解：当方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 是一元一次方程，且有实数根时， $k = 0$ ，

$$\therefore -x + 1 = 0,$$

解得， $x = 1$ ；

当方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 是一元二次方程时，且有实数根时，

$$\therefore k^2 \neq 0, \Delta = [-(2k+1)]^2 - 4k^2 \geq 0,$$

解得, $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$;

综上所述, $k \geq -\frac{1}{4}$;

故选: A.

5. 假设每一个参加宴会的人跟其他参会的人都握一次手, 在宴会结束时, 所有的参会者总共握手 28 次, 那么参会人士共有多少人? 设参会人士共有 x 人, 则可列方程为 ()

- A. $x(x-1)=28$ B. $x(x+1)=28$ C. $\frac{x(x-1)}{2}=28$ D. $\frac{x(x+1)}{2}=28$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的应用, 设参会人士共有 x 人, 则根据两两握手一次, 共握了 28 次手可列出方程, 解出即可.

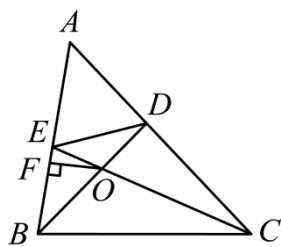
【详解】解: 设参会人士共有 x 人,

则根据分析可得: $\frac{x(x-1)}{2}=28$.

故选: C.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$ ($\angle ABC > \angle A$), 角平分线 BD , CE 交于点 O , $OF \perp AB$ 于点 F . 下列结论: ① $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle BOE} = BC : BE$; ② $\angle EOF = \angle ABC - \angle A$; ③ $BE + CD = BC$;

④ $S_{\text{四边形}BEDC} = 2S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO}$; 其中正确结论是 ()



- A. ①③④ B. ①②③④ C. ①②③ D. ①③

【答案】A

【解析】

【分析】如图 1 过 O 作 $OH \perp BC$ 于 H , 根据角平分线的性质得到 $OF = OH$, 根据三角形的面积公式得

到 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle BOE} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OH}{\frac{1}{2}BE \cdot OF} = \frac{BC}{BE}$, 故①正确; 根据角平分线的定义得到 $\angle OBC = \angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC$,

$\angle OCB = \angle OCA = \frac{1}{2} \angle ACB$, 求得 $\angle EOF = \angle BOE - \angle BOF$, 于是得到
 $\angle EOF = 60^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle ABC - 30^\circ = \frac{1}{2} (\angle ABC - 60^\circ) = \frac{1}{2} (\angle ABC - \angle A)$, 故②错误; 在 BC 上截取
 $BM = BE$, 连接 OM , 根据全等三角形的性质得到 $OE = OM$, $\angle EOB = \angle BOM = 60^\circ$, $CD = CM$, 于
 是得到 $BE + CD = BC$, 故③正确; 根据全等三角形的性质得到 $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOM}$, $S_{\triangle COD} = S_{\triangle COM}$, 于是得
 到 $S_{\text{四边形}BEDC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle EDO} = 2S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO}$, 故④正确.

【详解】解: 如图 1 过 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ,

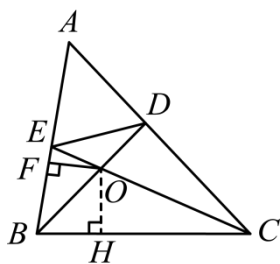


图1

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $OF \perp AB$,

$\therefore OF = OH$,

$\therefore S_{\triangle BOC} : S_{\triangle BOE} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot OH}{\frac{1}{2} BE \cdot OF} = \frac{BC}{BE}$, 故①正确;

$\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$,

$\because BD$ 、 CE 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$, 且 BD 、 CE 相交于点 O ,

$\therefore \angle OBC = \angle OBA = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle OCB = \angle OCA = \frac{1}{2} \angle ACB$,

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ$,

$\therefore \angle EOB = \angle OBC + \angle OCB = 60^\circ$,

$\therefore \angle EOF = \angle BOE - \angle BOF$,

$\because \angle OBF = \frac{1}{2} \angle ABC$,

$\therefore \angle BOF = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC$,

$\therefore \angle EOF = 60^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle ABC - 30^\circ = \frac{1}{2} (\angle ABC - 60^\circ) = \frac{1}{2} (\angle ABC - \angle A)$, 故②错误;

在 BC 上截取 $BM = BE$, 连接 OM ,

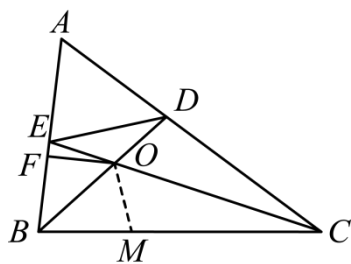


图2

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle BOM$ 中,

$$\begin{cases} BE = BM \\ \angle OBE = \angle OBM, \\ OB = OB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle BOM,$$

$$\therefore OE = OM, \quad \angle EOB = \angle BOM = 60^\circ,$$

$$\because \angle COD = \angle EOB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COM = 180^\circ - \angle BOM - \angle COD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = \angle COM,$$

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COM$ 中,

$$\begin{cases} \angle COD = \angle COM \\ OC = OC \\ \angle OCD = \angle OCM \end{cases},$$

$$\therefore \triangle COD \cong \triangle COM,$$

$$\therefore CD = CM,$$

$$\therefore BE + CD = BC, \quad \text{故③正确;}$$

$$\because \triangle BOE \cong \triangle BOM, \quad \triangle COD \cong \triangle COM,$$

$$\therefore S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOM}, \quad S_{\triangle COD} = S_{\triangle COM},$$

$$\therefore S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOM} + S_{\triangle COM} = S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BEDC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle EDO} = 2S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO},$$

故④正确,

故选: A.

【点睛】此题考查全等三角形的判定与性质、角平分线的性质、三角形内角和定理及其推论等知识, 解题的关键是正确地作出所需要的辅助线, 构造全等三角形, 再利用全等三角形的判定与性质解决问题.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 若 $\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件以及解一元一次不等式, 分式有意义的条件, 能熟记二次根式有意义的条件是解此题的关键, 注意: $\sqrt{a}$ 中 $a \geq 0$. 根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件得出

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases}, \text{再求出答案即可.}$$

【详解】 解: 使代数式 $\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+1}$ 有意义, 必须满足 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $x \geq 3$.

故答案为: $x \geq 3$.

8. 计算: $\sqrt{18} + \sqrt{8} =$ _____.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 首先化简二次根式, 进而合并求出即可.

【详解】 解: 原式 $= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

故答案为: $5\sqrt{2}$.

【点睛】 此题主要考查了二次根式的加减运算, 正确化简二次根式是解题关键.

9. 化简: $\sqrt{x^2-4x+4}(x>2) =$ _____.

【答案】 $x-2$

【解析】

【分析】 本题考查了利用完全平方公式进行因式分解, 利用二次根式的性质进行化简等知识. 熟练掌握利用完全平方公式进行因式分解, 利用二次根式的性质进行化简是解题的关键.

由题意知, $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, 由 $x > 2$ 即可化简.

【详解】 解: $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = x-2$,

故答案为: $x-2$.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 4 = 0$ 的一个实数根是 1, 那么 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 由题意，将 $x=1$ 代入得， $1+3\times 1+m-4=0$ ，计算求解即可.

【详解】 解：由题意，将 $x=1$ 代入得， $1+3\times 1+m-4=0$ ，
解得 $m=0$ ；
故答案为：0.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解，解一元一次方程. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

11. 在实数范围内分解因式： $2x^2-5x+1=$ _____.

【答案】 $2(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4})$

【解析】

【分析】 本题考查了实数范围内分解因式. 先求出方程的两个根，再根据 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 即可因式分解. 设多项式等于 0，解出方程两根，再分解因式即可.

【详解】 解：令 $2x^2-5x+1=0$ ，
 $\Delta=25-8=17>0$ ，
 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ ，
 $\therefore 2x^2-5x+1=2(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4})$.
故答案为： $2(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4})$.

12. 不等式 $3x>5+\sqrt{2}x$ 的解集为_____.

【答案】 $x>3+\sqrt{2}$

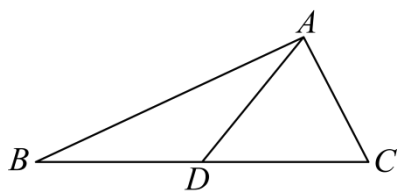
【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化和求不等式解集，解题关键熟练掌握分母有理化方法，准确进行计算；先移项、合并同类项，再系数化为 1 即可求解.

【详解】 解： $3x>5+\sqrt{2}x$ ，
 $3x-\sqrt{2}x>5$ ，
 $(3-\sqrt{2})x>5$ ，
 $x>3+\sqrt{2}$ ，

故答案为: $x > 3 + \sqrt{2}$.

13. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线, 若 $AB = 5$, $AC = 3$, 则 AD 的取值范围为_____.



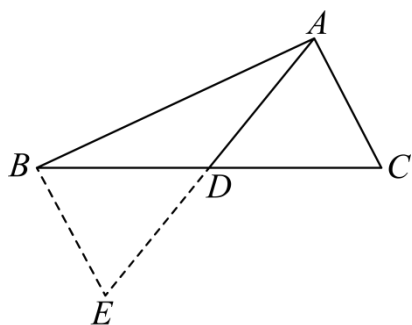
【答案】 $1 < AD < 4$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质, 三角形三边关系的应用. 熟练掌握全等三角形的判定与性质, 三角形三边关系的应用是解题的关键.

如图, 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE , 证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDA$ (SAS), 则 $BE = AC = 3$, 由 $AB - BE < 2AD < AB + BE$, 可得 $5 - 3 < 2AD < 5 + 3$, 计算求解即可.

【详解】 解: 如图, 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE ,



$\because DE = AD, \angle BDE = \angle CDA, BD = CD,$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA$ (SAS),

$\therefore BE = AC = 3,$

$\because AB - BE < 2AD < AB + BE,$

$\therefore 5 - 3 < 2AD < 5 + 3,$

$\therefore 1 < AD < 4,$

故答案为: $1 < AD < 4$.

14. 某厂一月份的产值为 10 万元, 第一季度产值共为 33.1 万元, 且每个月的增长率相同, 若设该增长率为 x , 则根据题意, 可列方程: _____.

【答案】 $10 + 10(1 + x) + 10(1 + x)^2 = 33.1$

【解析】

【分析】由增长率公式求出二月份和三月份的产值，根据题意可列等量关系式：一月份的产值+二月份的产值+三月份的产值=33.1，把相关数值代入即可.

【详解】 $\because$ 一月份的产值为 10 万元，增长率为 x ，

$\therefore$ 二月份产值为： $10(1+x)$ ，三月份产值为： $10(1+x)^2$ ，

$\therefore$ 第一季度产值共为 33.1 万元，

$\therefore 10+10(1+x)+10(1+x)^2=33.1$ ，

故答案为： $10+10(1+x)+10(1+x)^2=33.1$.

【点睛】本题考查一元二次方程的应用—增长率问题，若变化前的量为 a ，变化后的量为 b ，平均变化率为 x ，则经过 2 次变化后的数量关系为 $a(1 \pm x)^2 = b$ ，列到第一季度产值的等量关系是解决本题的关键.

15. 定理“等角对等边”改为“如果…，那么…”的是_____.

【答案】如果在同一个三角形中有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

【解析】

【分析】分析原命题，找出其条件与结论，然后写成“如果…那么…”形式即可.

【详解】解：因为条件是：在同一个三角形中有两个角相等，结论为：这两个角所对的边也相等.

所以改写后为：如果在同一个三角形中有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

故答案为：如果在同一个三角形中有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

【点睛】本题主要考查了命题的定义，难度适中，正确理解定义是关键.

16. 等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， DE 垂直平分 AB ，交 AC 所在的直线于点 E ，若 DE 与直线 AC 所夹的锐角是 40° ，则等腰三角形的顶角度数是_____.

【答案】 50° 或 130°

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，垂直平分线的定义，三角形内角和定理，三角形外角的性质. 分情况求解是解题的关键.

由题意知，分 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $\triangle ABC$ 是钝角三角形，两种情况求解即可.

【详解】解：由题意知，分 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $\triangle ABC$ 是钝角三角形，两种情况求解；

当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，如图 1，

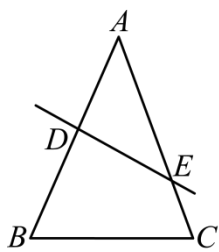


图1

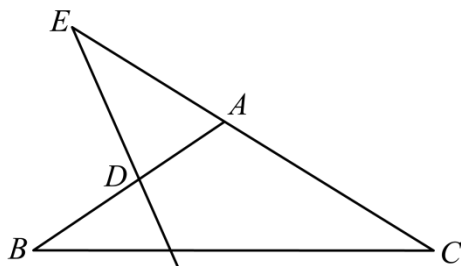


图2

$\because DE$ 垂直平分 AB , DE 与直线 AC 所夹的锐角是 40° ,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 40^\circ$,

$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = 50^\circ$;

当 ABC 是钝角三角形, 如图 2,

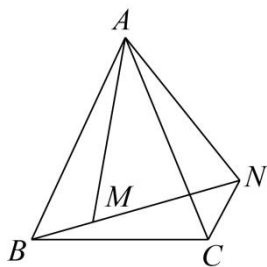
同理, $\therefore \angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 40^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle ADE + \angle AED = 130^\circ$;

综上所述, 等腰三角形的顶角度数是 50° 或 130° ,

故答案为: 50° 或 130° .

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 M 在 $\triangle ABC$ 内, 将 $\triangle ABM$ 以点 A 为旋转中心进行旋转, 使点 B 与点 C 重合, 点 M 落在点 N 处, 若 $\angle MAN = 40^\circ$, 且 B 、 M 、 N 三点恰共线, 则 $\angle MNC =$ _____.



【答案】 40° 或 40° 度

【解析】

【分析】 由全等可推理得到 $\angle BAC = \angle MAN = 40^\circ$, 由 $AB = AC$ 可得到 $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$, 又由 $\angle NBC = \angle ABC - \angle ABM$, $\angle BCN = \angle ACB + \angle ACN$, 结合三角形内角和定理即可求得答案.

【详解】 解: 由旋转可知: $\triangle ABM \cong \triangle ACN$

$\therefore \angle BAM = \angle CAN$, $\angle ABM = \angle ACN$

$\therefore \angle BAM + \angle MAC = \angle MAC + \angle CAN$

即: $\angle BAC = \angle MAN$

又 $\because \angle MAN = 40^\circ$

$$\therefore \angle BAC = 40^\circ$$

$$\because AB = AC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$$

$$\because \angle NBC = \angle ABC - \angle ABM, \angle BCN = \angle ACB + \angle ACN$$

$$\therefore \angle NBC + \angle BCN = \angle ABC - \angle ABM + \angle ACB + \angle ACN = 140^\circ$$

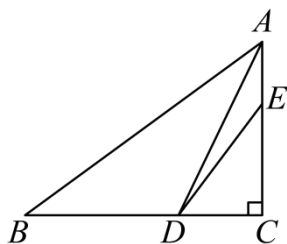
$$\because \angle NBC + \angle BCN + \angle MNC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle MNC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

故答案为： 40°

【点睛】 本题考查三角形内角和定理，等腰三角形的性质，全等三角形的性质等相关知识点，牢记相关的知识点并能结合图形灵活应用是解题的关键.

18. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ， E 为线段 AC 上一点， 连接 DE ， 且 $\angle B = \angle CED$. 若 $AB = 16$ ， $CE = 7$ ， 则 AE 的长为_____.

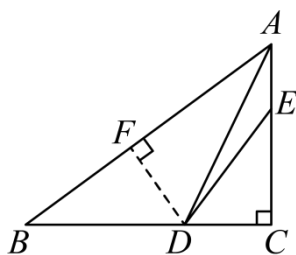


【答案】 2

【解析】

【分析】 此题考查全等三角形的判定和性质和角平分线的性质，解题的关键是作出辅助线，构造全等三角形，根据 HL 证明直角三角形的全等解答. 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，由角平分线的性质得出 $DC = DF$ ，证明 $\triangle DCE \cong \triangle DFB$ ，得出 $BF = CE$ ，求出 AF ，由 HL 证明 $\text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADF$ ，得出 $AC = AF$ ，即可求出结果.

【详解】 解： 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ， 如图所示：



$\because \angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ,

$\therefore DC = DF$,

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle DFB$ 中,

$$\begin{cases} \angle BFD = \angle DCE = 90^\circ \\ \angle B = \angle CED \\ DC = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DFB$ (AAS),

$\therefore BF = CE = 7$,

$\therefore AF = AB - BF = 16 - 7 = 9$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 与 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} DC = DF \\ AD = AD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADF$,

$\therefore AC = AF = 9$,

$\therefore AE = AC - CE = 9 - 7 = 2$.

故答案为: 2.

三、简答题 (每小题 8 分, 共 48 分)

19. 计算

(1) 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

(2) 计算: $\frac{1}{3}\sqrt{45xy} \cdot 99\sqrt{\frac{y^2}{6x}} \div \left(\frac{2}{3}\sqrt{5x}\right)$.

【答案】 (1) $2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{99y\sqrt{6xy}}{4x}$

【解析】

【分析】 (1) 先利用二次根式的性质进行化简, 分母有理化, 然后进行加减运算即可;

(2) 利用二次根式的性质进行化简, 将除法变乘法, 并且分母有理化, 然后进行乘法运算即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
 &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\
 &= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2};
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \frac{1}{3}\sqrt{45xy} \cdot 99\sqrt{\frac{y^2}{6x}} \div \left(\frac{2}{3}\sqrt{5x}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5xy} \cdot 99 \cdot \frac{\sqrt{6xy}}{6x} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5x}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5xy} \cdot 99 \cdot \frac{\sqrt{6xy}}{6x} \cdot \frac{3\sqrt{5x}}{10x} \\
 &= \frac{99y\sqrt{6xy}}{4x}.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了利用二次根式的性质进行化简，分母有理化，二次根式的加减运算，二次根式的乘除运算等知识．熟练掌握利用二次根式的性质进行化简，分母有理化，二次根式的加减运算，二次根式的乘除运算是解题的关键．

20 解方程

(1) 解方程: $x^2 + x = 12$

(2) 用配方法解方程: $x^2 - 4x + 1 = 0$

【答案】 (1) $x_1 = -4$, $x_2 = 3$

(2) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键．

(1) 利用十字相乘法求解可得；

(2) 整理后，利用配方法求解可得．

【小问 1 详解】

解: $x^2 + x = 12$

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x+4)(x-3) = 0,$$

$$x+4=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得: $x_1 = -4$, $x_2 = 3$;

【小问 2 详解】

解: $x^2 - 4x + 1 = 0$

整理得: $x^2 - 4x = -1$,

配方得: $x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$, 即 $(x-2)^2 = 3$,

开方得: $x-2 = \pm\sqrt{3}$,

解得: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

21. 先化简, 再求值, 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求代数式 $x^2 - 2xy + y^2$ 的值;

【答案】 96

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值, 分母有理化, 完全平方公式, 先计算出 $x-y$, 再利用完全平方公式得到原式 $= (x-y)^2$, 然后利用整体代入的方法计算.

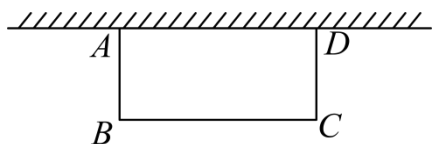
【详解】 解: $\because x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$$y = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore x-y = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 - (3+2\sqrt{6}+2) = -4\sqrt{6},$$

$$\therefore x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = (-4\sqrt{6})^2 = 96.$$

22. 某建筑工程队在工地一边靠墙处用 64 米长的铁栅栏围成一个长方形的临时仓库, 可利用墙长是 32 米, 铁栅栏只围三边, 围成的长方形面积是 510 平方米, 求按以上要求围成长方形的两条邻边的长.



【答案】平行于墙的一边长为 30 米，垂直于墙的一边长为 17 米

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用．熟练掌握一元二次方程的应用是解题的关键．

设平行于墙的一边长为 x 米，则垂直于墙的一边长为 $\frac{64-x}{2}$ 米， $x \leq 32$ ，依题意得， $x\left(\frac{64-x}{2}\right) = 510$ ，

计算求出满足要求的解，然后作答即可．

【详解】解：设平行于墙的一边长为 x 米，则垂直于墙的一边长为 $\frac{64-x}{2}$ 米， $x \leq 32$ ，

依题意得， $x\left(\frac{64-x}{2}\right) = 510$ ，

整理得， $x^2 - 64x + 1020 = 0$ ，

$(x-30)(x-34) = 0$ ，

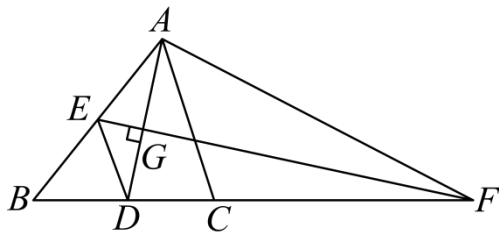
解得， $x_1 = 30$ ， $x_2 = 34$ （舍去），

$\therefore \frac{64-30}{2} = 17$ ，

$\therefore$ 平行于墙的一边长为 30 米，垂直于墙的一边长为 17 米．

四、解答题（第 23 题 8 分，第 24 题 10 分，第 25 题 12 分，共 30 分）

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \parallel AC$ ， $EF \perp AD$ 交 BC 延长线于 F ．求证： $\angle FAC = \angle B$ ．



【答案】见解析

【解析】

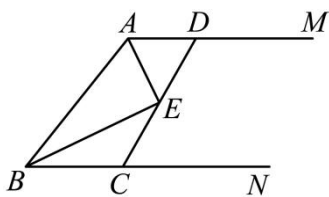
【分析】由 AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \parallel AC$ ，可得 $\angle EDA = \angle BAD$ ，证明 $\triangle EDG \cong \triangle EAG$ (AAS)，则 $DG = AG$ ， EF 垂直平分 AD ，则 $FA = FD$ ， $\angle FAD = \angle FDA$ ，由 $\angle FAD = \angle CAD + \angle FAC$ ， $\angle FDA = \angle BAD + \angle B$ ，可得 $\angle FAC = \angle B$ ．

【详解】证明： $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,
 $\therefore DE \parallel AC$,
 $\therefore \angle EDA = \angle CAD$,
 $\therefore \angle EDA = \angle BAD$,
 $\therefore EF \perp AD$,
 $\therefore \angle EGD = 90^\circ = \angle EGA$,
 又 $\therefore \angle EDG = \angle EAG$, $EG = EG$,
 $\therefore \triangle EDG \cong \triangle EAG$ (AAS) ,
 $\therefore DG = AG$,
 $\therefore EF$ 垂直平分 AD ,
 $\therefore FA = FD$,
 $\therefore \angle FAD = \angle FDA$,
 $\therefore \angle FAD = \angle CAD + \angle FAC$, $\angle FDA = \angle BAD + \angle B$,
 $\therefore \angle CAD + \angle FAC = \angle BAD + \angle B$,
 $\therefore \angle FAC = \angle B$.

【点睛】 本题考查了角平分线的定义，平行线的性质，全等三角形的判定与性质，垂直平分线的判定与性质，等边对等角，三角形外角的性质．熟练掌握角平分线的定义，平行线的性质，全等三角形的判定与性质，垂直平分线的判定与性质，等边对等角，三角形外角的性质是解题的关键．

24. 如图， $AM \parallel BN$ ， $\angle MAB$ 与 $\angle NBA$ 的平分线交于点 E ，过点 E 的直线交 AM 于 D ，交 BN 于 C ，求证：



- (1) $DE = CE$;
 (2) $AD + BC = AB$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的意义，全等三角形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握知识点是解题的关键．

(1) 由平行线的性质可得 $\angle MAB + \angle ABN = 180^\circ$ ，根据角平分线的性质可得

$\angle AEB = 180^\circ - \angle BAE - \angle ABE = 90^\circ$ ，延长 AE ，交 BN 于点 F ，可证 $\triangle DAE \cong \triangle CFE$ ，则可得 $ED = EC$ ；

(2) 由 (1) 可知 $AD = CF$ ；所以总有 $AD + BC = BF = AB$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because AM \parallel BN$ ，

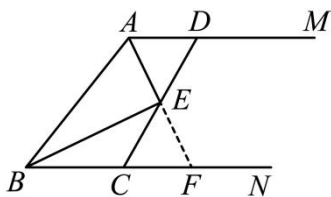
$$\therefore \angle MAB + \angle ABN = 180^\circ,$$

又 AE ， BE 分别为 $\angle MAB$ 、 $\angle NBA$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \frac{1}{2}(\angle MAB + \angle ABN) = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle BAE - \angle ABE = 90^\circ,$$

延长 AE ，交 BN 于点 F ，



$\because AM \parallel BN$ ，

$$\therefore \angle MAF = \angle AFB,$$

$\because \angle MAE = \angle BAE$ ，

$$\therefore \angle BAF = \angle AFB,$$

$$\therefore BA = FB,$$

$\because \angle AEB$ 为直角，

$$\therefore AE = EF,$$

$\because \angle DAE = \angle EFC$ ， $\angle AED = \angle CEF$ ，

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CFE,$$

$$\therefore ED = EC.$$

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 中结论可知， $AB = BF$ ， $\triangle DAE \cong \triangle CFE$ ，

$$\therefore AD = CF;$$

$$\therefore AD + BC = CF + BC = BF = AB.$$

25. 在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，直线 MN 过点 A 且 $MN \parallel BC$ ，以点 B 为一锐角顶点作 $\text{Rt}\triangle BDE$ ，使 $\angle BDE = 90^\circ$ ，且点 D 在直线 MN 上（不与点 A 重合）。

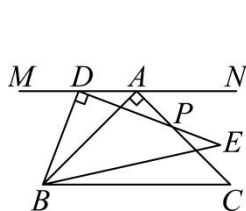


图1

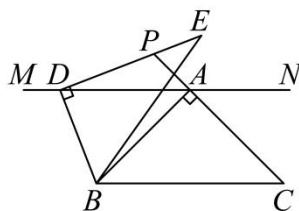


图2

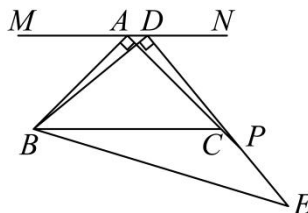


图3

(1) 如图 1, DE 与 AC 交于点 P , 请证明: $BD = DP$;

(2) 在图 2 中, DE 与 CA 的延长线交于点 P , $BD = DP$ 是否成立? 如果成立, 请加以证明; 如果不成立, 请说明理由;

(3) 在图 3 中, DE 与 AC 的延长线交于点 P , BD 与 DP 是否相等? 如果相等, 请加以证明; 如果不相等, 请说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) 成立, 见解析

(3) 相等, 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的判定与性质, 平行线的性质, 全等三角形的判定与性质. 熟练掌握等腰三角形的判定与性质, 平行线的性质, 全等三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 如图 1, 作 $DF \perp MN$, 交 AB 于 F , 证明 $\triangle BDF \cong \triangle PDA$ (ASA), 可得 $BD = DP$;

(2) 如图 2, 作 $DF \perp MN$, 交 AB 的延长线于 F , 证明 $\triangle BDF \cong \triangle PDA$ (ASA), 则 $BD = DP$;

(3) 如图 3, 作 $DF \perp MN$, 交 BA 的延长线于 F , 证明 $\triangle BDF \cong \triangle PDA$ (ASA), 则 $BD = DP$.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, 作 $DF \perp MN$, 交 AB 于 F ,

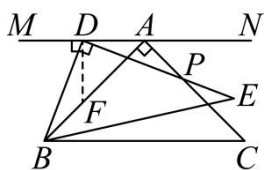


图1

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DFA = 45^\circ = \angle DAF,$$

$$\therefore DF = DA,$$

$\therefore \angle DFB = 180^\circ - \angle DFA = 135^\circ$, $\angle DAP = \angle DAF + \angle BAC = 135^\circ$,
 $\therefore \angle DFB = \angle DAP$,
 $\therefore \angle BDF + \angle FDP = 90^\circ = \angle FDP + \angle PDA$,
 $\therefore \angle BDF = \angle PDA$,
 $\therefore \angle BDF = \angle PDA$, $DF = DA$, $\angle DFB = \angle DAP$,
 $\therefore \triangle BDF \cong \triangle PDA$ (ASA),
 $\therefore BD = DP$;

【小问 2 详解】

解: $BD = DP$ 成立, 证明如下;

如图 2, 作 $DF \perp MN$, 交 AB 的延长线于 F ,

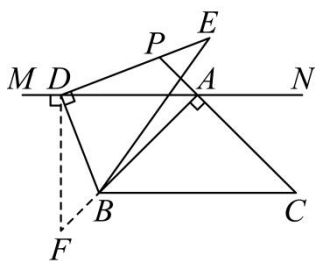


图2

同理 (1), $\angle DFA = 45^\circ = \angle DAF$, $DF = DA$,
 $\therefore MN \parallel BC$,
 $\therefore \angle DAP = \angle ACB = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DFB = \angle DAP$,
 $\therefore \angle BDF + \angle BDA = 90^\circ = \angle BDA + \angle PDA$,
 $\therefore \angle BDF = \angle PDA$,
 $\therefore \angle BDF = \angle PDA$, $DF = DA$, $\angle DFB = \angle DAP$,
 $\therefore \triangle BDF \cong \triangle PDA$ (ASA),
 $\therefore BD = DP$;

【小问 3 详解】

解: BD 与 DP 相等, 理由如下;

如图 3, 作 $DF \perp MN$, 交 BA 的延长线于 F ,

