

2024 学年第一学期八年级数学学科期中考试

时间：90 分钟 满分：100 分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{18a}$ B. $\sqrt{12a^4}$ C. $\sqrt{\frac{a^2}{8}}$ D. $\sqrt{24}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的概念，化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式。根据同类二次根式的定义进行解答。

【详解】解：A、 $\sqrt{18a} = 3\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

B、 $\sqrt{12a^4} = 2\sqrt{3a^2}$ ，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

C、 $\sqrt{\frac{a^2}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}|a|$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故本选项符合题意；

D、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ ，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

故选：C。

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = -1$ B. $(\sqrt{3}+1)^2 = 4$
C. $\sqrt{3.6} = 0.6$ D. $\sqrt{9+16} = 3+4$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了化简二次根式，二次根式的乘法，根据二次根式的乘法运算法则与二次根式的化简逐一分析各选项即可。

【详解】解：A、 $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = 4-5 = -1$ ，故正确；

B、 $(\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$ ，故错误；

C、 $\sqrt{3.6} = \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$ ，故错误；

D、 $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ，故错误；

故选：A.

3. 下列选项是一元二次方程的是 ()

A. $x^2 - \frac{1}{x} = 1$

B. $x^2 - 3x + 2$

C. $2x^2 + 1 = 0$

D. $ax^2 + 3x = 0$ (a 为常数)

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义：只有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程，进行判断即可，解题的关键是熟记一元二次方程的定义.

【详解】解：A. $x^2 - \frac{1}{x} = 1$ 含有分式，不是一元二次方程，故不符合题意；

B. $x^2 - 3x + 2$ 是代数式，不是一元二次方程，故不符合题意；

C. $2x^2 + 1 = 0$ 是一元二次方程，故符合题意；

D. $ax^2 + 3x = 0$ (a 为常数)，当 $a = 0$ 时，不是一元二次方程，故不符合题意；

故选：C.

4. 下列关于 x 的方程中，一定有实数根的是 ()

A. $(x-8)^2 + 1 = 0$

B. $x^2 - x + 6 = 0$

C. $ax^2 + b = 0$

D. $2x(x-1) = 2x^2 + 3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程根的判别式及解一元一次方程，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 根据一元二次方程根的判别式判断即可.

【详解】解：A、由 $(x-8)^2 + 1 = 0$ 得 $(x-8)^2 = -1$,

$\therefore -1 < 0$,

$\therefore$ 方程没有实数根；

B、 $x^2 - x + 6 = 0$,

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -25 < 0$$

∴ 方程没有实数根；

C、 $ax^2 + b = 0$ ，

当 $a \neq 0$ 且 a, b 同号时，方程没有实数根；

D、 $2x(x-1) = 2x^2 + 3$ ，

经整理得： $2x = -3$ ，解得： $x = -\frac{3}{2}$ ，

∴ 方程有实数根；

故选：D

5. 下列命题中，是真命题的是（ ）

A. 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个实数根，那么 $b^2 - 4ac > 0$

B. 如果 $a^2 = b^2$ ，那么 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$

C. 两腰及一腰上的高对应相等的两个等腰三角形全等

D. 底边及一个内角相等的两个等腰三角形全等

【答案】B

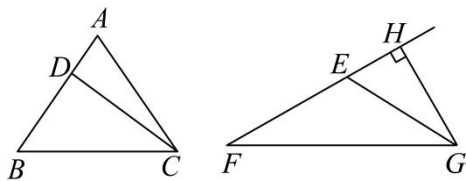
【解析】

【分析】本题主要考查了命题真假的判定，根据根的判别式，等腰三角形的性质，算术平方根定义，三角形全等的判定方法，逐项进行判断即可。

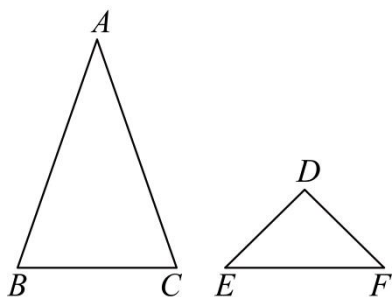
【详解】解：A. 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个实数根，那么 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，原命题不是真命题，故 A 不符合题意；

B. 如果 $a^2 = b^2$ ，那么 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$ ，此命题为真命题，故 B 符合题意；

C. 如图 ABC 和 $\triangle EFG$ 都是等腰三角形，且 $AB = EF = AC = GE$ ，且腰上的高 $CD = GH$ ，从图形中显然可看出这两个三角形不全等，原命题是假命题，故 C 不符合题意；



D. 如图，等腰 ABC 和 $\triangle DEF$ 中 $BC = EF$ ， $\angle A = \angle E$ ，但 ABC 与 $\triangle DEF$ 不全等，因此原命题是假命题，不符合题意。



故选：B.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 中点，下列说法错误的是（ ）

A. 点 B 、 C 到直线 AD 的距离相等

B. 如果 $BD = AD$ ，那么 $AB \perp AC$

C. 如果 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点 E ， F ，那么 $\frac{DE}{DF} = \frac{AC}{AB}$

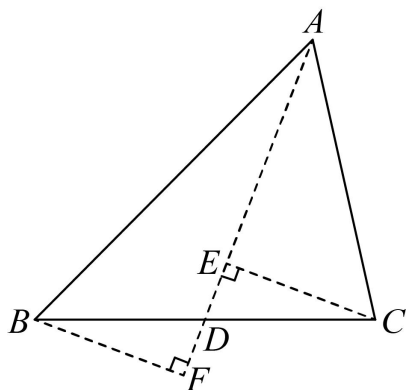
D. 如果 $\angle C = 2\angle B$ ，那么 $AD = BD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，等边对等角，三角形中线的性质等知识，过 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，过 B 作 $BF \perp AD$ 于 F ，证明 $\triangle BDF \cong \triangle CDE$ ，得出 $BF = CE$ ，即可判断选项 A；根据等边对等角、三角形内角和定理即可判断选项 B；根据三角形中线的性质、等面积法即可判定选项 C；由选 B 知，当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时， $AD = BD = CD = \frac{1}{2}AB$ ，与 $\angle B$ 、 $\angle C$ 数量关系无关，即可判定选项 D.

【详解】解：连接 AD ，过 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，过 B 作 $BF \perp AD$ 于 F ，



则 $\angle F = \angle CED = 90^\circ$ ，

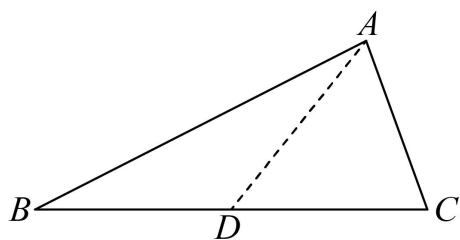
又 $\angle BDF = \angle CDE$ ， $BD = CD$ ，

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE$ ，

$\therefore BF = CE$ ，

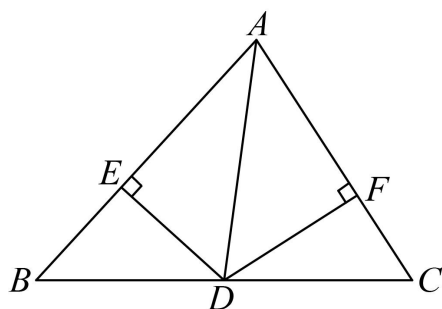
$\therefore$ 点 B 、 C 到直线 AD 的距离相等，故选项 A 正确，但不符合题意；

如图,



$\because BD = AD, CD = BD,$
 $\therefore \angle B = \angle BAD, CD = AD,$
 $\therefore \angle C = \angle CAD,$
 $\because \angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ,$
 $\therefore \angle B + \angle BAD + \angle CAD + \angle C = 180^\circ,$
 $\therefore \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ,$ 即 $\angle BAC = 90^\circ,$
 $\therefore AB \perp AC,$ 故选项 B 正确, 但不符合题意;

如图,



$\because D$ 为 BC 中点,
 $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD},$
 又 $DE \perp AB, DF \perp AC,$
 $\therefore \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} AC \cdot DF,$
 $\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AC}{AB},$ 故选项 C 正确, 但不符合题意;

由选 B 知, 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, $AD = BD = CD = \frac{1}{2} AB,$ 与 $\angle B、\angle C$ 数量关系无关, 故选项 D 错误,

符合题意;

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 当 x _____ 时, $\sqrt{x-2}$ 有意义.

【答案】 ≥ 2

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式有意义的条件，直接利用二次根式有意义的条件列不等式求解即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{x-2}$ 有意义，

$$\therefore x-2 \geq 0,$$

解得， $x \geq 2$ ，

故答案为： ≥ 2 .

8. 化简： $\sqrt{48} =$ _____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，二次根式的乘法，逆用二次根式的乘法，根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解： $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ，

故答案为： $4\sqrt{3}$.

9. $\sqrt{a+3}$ 的有理化因式可以是_____. (只需填一个)

【答案】 $\sqrt{a+3}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化，理解有理化因式的意义和平方差公式是正确解答的关键. 根据有理化因式的意义即可得出答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{a+3} \cdot \sqrt{a+3} = a+3$ ，

$$\therefore \sqrt{a+3} \text{ 的有理化因式可以是 } \sqrt{a+3},$$

故答案为： $\sqrt{a+3}$ (答案不唯一).

10. 已知一个一元二次方程有一个根为 -1 ，且常数项为 0 ，请写出一个满足要求的方程：_____.

【答案】 $x^2 + x = 0$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程，解题的关键是熟练运用一元二次方程的定义. 根据一元二次方程的定义

和一元二次方程的解的定义即可求出答案.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程的常数项为0，

$\therefore$ 设一元二次方程为 $ax^2 + bx = 0$ ，

$\because$ 一元二次方程有一个根为-1，

$$\therefore (-1)^2 a + (-1)b = 0,$$

$$\therefore a - b = 0,$$

故该方程为 $x^2 + x = 0$ (答案不唯一)，

故答案为： $x^2 + x = 0$ (答案不唯一).

11. 不等式 $3x - 1 < \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了解不等式，分母有理化等知识，先移项，合并同类项，然后根据分母有理化求解即可.

【详解】解： $3x - 1 < \sqrt{2}x$ ，

$$3x - \sqrt{2}x < 1,$$

$$(3 - \sqrt{2})x < 1,$$

$$\therefore x < \frac{1}{3 - \sqrt{2}}, \text{ 即 } x < \frac{3 + \sqrt{2}}{7},$$

故答案为： $x < \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$.

12. 在实数范围内因式分解： $3x^2 + x - 1 =$ _____.

【答案】 $3\left(x - \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)$

【解析】

【分析】 首先解方程 $3x^2 + x - 1 = 0$ ，然后分解因式即可.

【详解】解： $3x^2 + x - 1 = 0$

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2 \times 3}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$\therefore 3x^2 + x - 1 = 3 \left(x - \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right).$$

【点睛】 本题考查了在实数范围内分解因式，求根公式法当首项系数不是 1 时，往往需要多次试验，务必注意各项系数的符号。注意当无法用十字相乘法的方法时用求根公式法可分解因式。

13. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-1)x = -\frac{1}{4}m^2$ 有两个实数根，那么 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的意义。当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。根据根的判别式的意义可得 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4}m^2 \geq 0$ ，然后解不等式即可。

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 + (m-1)x = -\frac{1}{4}m^2$ 有两个实数根，

$$\therefore \Delta = (m-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4}m^2 \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为： } m \leq \frac{1}{2}.$$

14. 把命题“全等三角形的对应边相等”改写成“如果……，那么……”的形式：_____。

【答案】 如果两个三角形是全等三角形，那么它们的对应边相等。

【解析】

【分析】 根据如果的后面是条件，那么的后面是结论，即可求解。

【详解】 $\because$ 原命题的条件是：两个三角形是全等三角形，结论是：对应边相等，

∴命题“全等三角形的对应边相等”改写成“如果…，那么…”的形式是如果两个三角形是全等三角形，那么它们的对应边相等.

故答案为：如果两个三角形是全等三角形，那么它们的对应边相等.

【点睛】本题主要考查了命题的“如果…那么…”形式，解题的关键是熟练掌握如果的后面是条件，那么的后面是结论.

15. 某工厂五月份的产值为 100 万元，七月份的产值为 81 万元，如果每个月产值降低的百分率相同，那么这个降低的百分率为_____. (填百分数)

【答案】 10%

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，解题的关键是找出题目中的等量关系式. 设这个降低的百分率为 x ，根据等量关系式：五月份的产值 $\times (1-x)^2 =$ 七月份的产值，列出方程即可.

【详解】解：设这个降低的百分率为 x ，

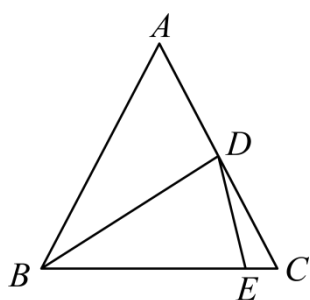
根据题意，得 $100(1-x)^2 = 81$ ，

解得 $x_1 = 0.1 = 10\%$ ， $x_2 = 1.9$ (舍去)，

∴这个降低的百分率为 10%，

故答案为：10%.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， $BD = BE$ ，已知 $\angle DEC = 106^\circ$ ，那么 $\angle A =$ _____ $^\circ$.



【答案】 52

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，三角形内角和定理以及角平分线的定义，根据等边对等角可求出 $\angle BDE = \angle BED = 74^\circ$ ，根据三角形内角和定理可求出 $\angle DBE = 32^\circ$ ，根据角平分线定义可求出 $\angle ABC = 64^\circ$ ，根据等边对等角可求出 $\angle C = \angle ABC = 64^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理求解即可.

【详解】解：∵ $\angle DEC = 106^\circ$ ，

$$\therefore \angle BED = 180^\circ - \angle DEC = 74^\circ,$$

$$\because BD = BE,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BED = 74^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 180^\circ - \angle BDE - \angle BED = 32^\circ,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle DBE = 64^\circ,$$

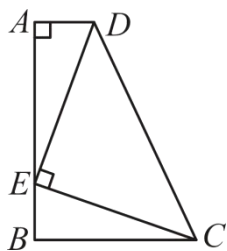
$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABC = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 52^\circ,$$

故答案为：52.

17. 如图，已知 $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $DE \perp EC$ ，如果 $\angle EDC = 45^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AB = 7$ ，那么 $BC =$ _____.



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定，全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理等，先根据三角形内角和定理求出 $\angle ECD = 45^\circ = \angle EDC$ ，根据等角对等边得出 $DE = CE$ ，然后根据 AAS 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BEC$ ，得出 $AD = BE = 2$ ， $AE = BC$ ，即可求解.

【详解】解： $\because DE \perp EC$ ， $\angle EDC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ECD = 45^\circ = \angle EDC,$$

$$\therefore DE = CE,$$

$$\because \angle A = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ = \angle A,$$

$$\because \angle AED = 90^\circ - \angle BEC = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = BE = 2, AE = BC,$$

又 $AB = 7$,

$$\therefore BC = AE = AB - BE = 5,$$

故答案为：5.

18. 我们知道二次根式具有以下性质： $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ ，小普同学经过思考，得出 $(\sqrt{-a})^2 = -a (a < 0)$ ，

利用这些结论，准确解出形如 $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$ 的方程，方法如下：

由题意，可知 $x \geq 0$ ，得 $x = (\sqrt{x})^2$ 。

原方程变形为 $(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 8 = 0$ ，

$$\therefore (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 4) = 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} = -2 \text{ (舍去) 或 } \sqrt{x} = 4,$$

$$\therefore x = 16.$$

已知 $x - 5\sqrt{-xy} + 6y = 0 (x > 0)$ ，参考以上方法，可求得 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -36

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，因式分解法解一元二次方程等知识，参照材料，把原方程变形为

$$1 - 5\sqrt{-\frac{y}{x}} - 6\left(\sqrt{-\frac{y}{x}}\right)^2 = 0, \text{ 求解即可.}$$

【详解】 解：由题意，可知 $-xy \geq 0$ ，

$$\because x > 0,$$

$$\therefore -\frac{y}{x} \geq 0,$$

$$\therefore -\frac{y}{x} = \left(\sqrt{-\frac{y}{x}}\right)^2,$$

$$\because x - 5\sqrt{-xy} + 6y = 0 (x > 0),$$

$$\therefore 1 - 5\sqrt{-\frac{y}{x}} + 6\frac{y}{x} = 0,$$

$$\therefore 1 - 5\sqrt{-\frac{y}{x}} - 6\left(\sqrt{-\frac{y}{x}}\right)^2 = 0$$

$$\left(1 + \sqrt{-\frac{y}{x}}\right)\left(1 - 6\sqrt{-\frac{y}{x}}\right) = 0,$$

$$\text{解得 } \sqrt{-\frac{y}{x}} = -1 \text{ (舍去) 或 } \sqrt{-\frac{y}{x}} = \frac{1}{6},$$

$$\therefore -\frac{y}{x} = \frac{1}{36},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = -36,$$

故答案为: -36 .

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19202 题每题 6 分; 第 2324 题每题 8 分; 第 25 题 12 分, 满分 52 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{27} + \sqrt{0.25} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的混合运算, 先化简二次根式以及分母有理化, 再计算加减运算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \sqrt{27} + \sqrt{0.25} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} - \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} - 2 - \sqrt{3} \\ &= -\frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$20. \text{ 计算: } \sqrt{6x^7} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{x^3}} \div \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

【答案】 $12x\sqrt{x}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的乘除混合运算, 直接利用二次根式的乘法, 除法运算法则计算即可.

$$\text{【详解】 解: } \sqrt{6x^7} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{x^3}} \div \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$= 2\sqrt{6x^7 \cdot \frac{3}{x^3} \cdot \frac{2}{x}}$$

$$= 2\sqrt{36x^3}$$

$$= 12x\sqrt{x}.$$

21. 配方法解方程： $2x^2 + 10x + 9 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{7}-5}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{7}+5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程的配方法，掌握配方的步骤：“第一步： $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ，第二步：

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ ，第三步： $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ，第四步： $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ”是解题的

关键，据此求解即可.

【详解】 解： $2x^2 + 10x + 9 = 0$,

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2},$$

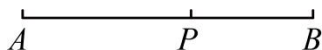
$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4},$$

$$\therefore x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{7}-5}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{7}+5}{2}.$$

22. 线段 AB 上的一点 P 将 AB 分割成 PA 、 PB ($PA > PB$) 两段，如果 PA 的长度是 AB 与 PB 长度的比例中项，即 $PA^2 = PB \cdot AB$ ，那么称点 P 为线段 AB 的黄金分割点. 如图，已知线段 $AB = 1$ ，点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($PA > PB$)，求 PA 的长度.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是黄金分割点，读懂材料中黄金分割点的概念及公式是解决此题的关键。 设 $PA = x$ ，根据点 P 是线段 AB 的黄金分割点得出 $x^2 = (1-x) \cdot 1$ ，解方程即可求解。

【详解】 解：设 $PA = x$ ，则 $BP = AB - AP = 1 - x$

$\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($PA > PB$)，

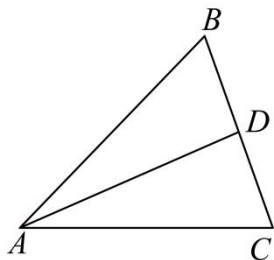
$$\therefore PA^2 = PB \cdot AB, \text{ 即 } x^2 = (1-x) \cdot 1,$$

化简，得 $x^2 + x - 1 = 0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore PA \text{ 的长度为 } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

23. 求证：如果一个三角形一边上的中线平分这条边所对的内角，那么这个三角形是等腰三角形。如图所示，小普同学按照题目要求画出了 $\triangle ABC$ 以及 BC 边上的中线 AD ，请你依据此图完成命题的证明。



已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，_____。

求证：_____。

证明：

【答案】 在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle CAB$ ，交 BC 边于点 D ，且 $CD = BD$ ； $AB = AC$ ；证明见解析

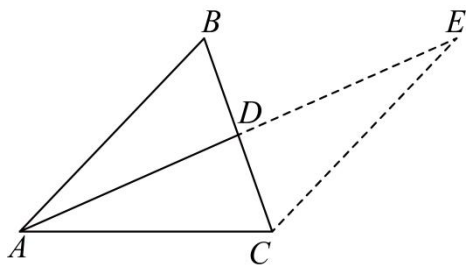
【解析】

【分析】 本题是三角形综合题，考查了等腰三角形的判定，全等三角形的判定和性质，添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键。证明 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ (SAS)，即可求解。

【详解】 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle CAB$ ，交 BC 边于点 D ，且 $CD = BD$ ，

求证： $AB = AC$ 。

证明：如图，延长 AD 至 E ，使 $DE = AD$ ，连接 CE ，



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADB = \angle EDC, \\ CD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle EBD (\text{SAS})$,

$\therefore \angle BAD = \angle E$, $AB = CE$,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

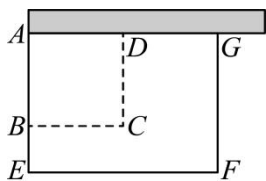
$\therefore \angle CAD = \angle BAD$,

$\therefore \angle CAD = \angle E$,

$\therefore AC = CE$,

$\therefore AB = AC$.

24. 如图，已知一个一面靠墙（图中阴影部分，墙长 10 米），三面用篱笆围成的正方形仓库 $ABCD$ ，该仓库的边长为 4 米，且仓库的一边 AB 紧贴墙的一端，现因业务需要进行扩建，保留 AB 边，拆除另外两面篱笆（ BC 与 CD ），不计损耗，用拆除的旧篱笆加上 8 米长的新篱笆进行如图所示的扩建。如果要求新的长方形仓库（ $AEFG$ ）的面积增加 32 平方米，求新仓库相邻两边的长。



【答案】 新仓库相邻两边的长分别为 8 米，6 米

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，根据已知条件列出一元二次方程是解题的关键。设 $EF = x$ 米，则 $GF = \frac{4+4+8-x+4}{2} = \frac{20-x}{2}$ 米，根据“新的长方形仓库（ $AEFG$ ）的面积增加 32 平方米”列方程求解即可。

【详解】 解：设 $EF = x$ 米，则 $GF = \frac{4+4+8-x+4}{2} = \frac{20-x}{2}$ 米，

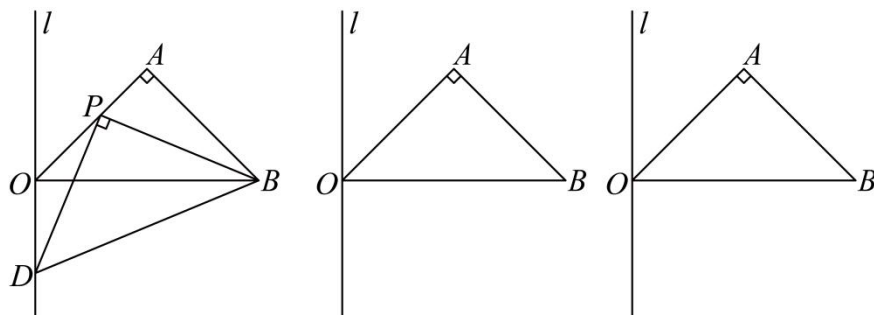
根据题意, 得 $x \cdot \frac{20-x}{2} - 4^2 = 32$,

解得 $x_1 = 8$, $x_2 = 12$ (舍去),

$\therefore EF = 8$ 米, $GF = 6$ 米,

即新仓库相邻两边的长分别为 8 米, 6 米.

25. 已知在 $\triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ$, $AO = AB$, $OB = 4$, 过点 O 作直线 $l \perp OB$, 点 P 为直线 OA 上一点, 连接 BP , 作 $PD \perp PB$ 交直线 l 于点 D .



备用图1

备用图2

(1) 如图, 当 P 在线段 OA 上时.

① 设 $\angle ABP = \alpha$, 那么 $\angle PDO = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 α 的代数式表示).

② 求证: $PD = PB$;

(2) 设点 P 到直线 OB 的距离为 m , 当 $\triangle OPD$ 的面积为 4 时, 请直接写出 m 的值.

【答案】 (1) ① $45^\circ - \alpha$; ② 见解析

(2) $1 + \sqrt{5}$ 或 $-1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 (1) ① 根据等边对等角可求出 $\angle AOB = \angle B = 45^\circ$, 根据余角的性质可得出 $\angle OPD = \angle ABP = \alpha$, 然后在 $\triangle OPD$ 中, 根据三角形内角和定理求解即可;

② 在 AB 上取点 R , 使 $AR = AP$, 联结 PR , 根据 ASA 证明 $\triangle OPD \cong \triangle RBP$, 即可得证;

(2) 分 P 在线段 OA 上, 在点 A 的右侧, 在点 O 的左侧讨论, 根据 $\triangle OPD$ 的面积为 4 列出关于 m 的方程, 求解即可.

【小问 1 详解】

① 解: $\because \angle OAB = 90^\circ$, $AO = AB$,

$\therefore \angle AOB = \angle B = 45^\circ$,

$\because PD \perp PB$,

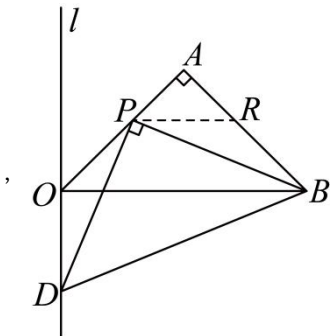
$\therefore \angle OPD = 90^\circ - \angle APB = \angle ABP = \alpha$,

$$\because l \perp OB,$$

$$\therefore \angle PDO = 180^\circ - \angle DOP - \angle OPD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha,$$

故答案为: $45^{\circ}-a$;

②在 AB 上取点 R , 使 $AR = AP$, 联结 PR ,



$$\therefore \angle APR = \angle ARP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BRP = 135^\circ,$$

又 $\angle DOP = \angle DOB + \angle AOB = 135^\circ$,

$$\therefore \angle BRP = \angle DOP,$$

$$\because AO = AB, \quad AR = AP,$$

$$\therefore OP = BR,$$

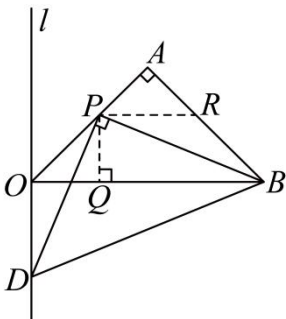
由①知: $\angle OPD = \angle ABP$,

$$\therefore \Delta OPD \cong_{\Delta} RBP(\text{ASA}),$$

$$\therefore PD = PB ;$$

【小问 2 详解】

解: 当 P 在线段 OA 上, 过 P 作 $PQ \perp OB$ 于 Q ,



$$\therefore \angle PAQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OPQ = 45^\circ = \angle POQ,$$

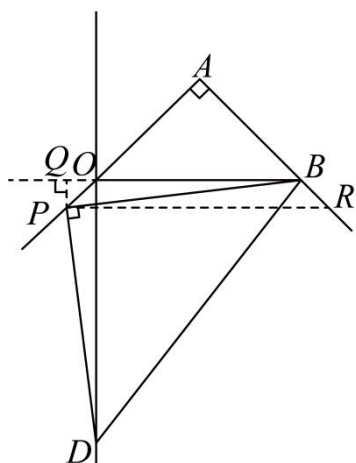
同理可求 $AP = AR = OP - AO = \sqrt{2}m - 2\sqrt{2}$,

$$\therefore PQ = 2m - 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(2m - 4) \cdot m = 4,$$

解得 $m_1 = 1 + \sqrt{5}$, $m_2 = 1 - \sqrt{5}$ (舍去),

点 P 在点 O 的左侧, 过 P 作 $PQ \perp AB$ 于 Q , 在 AB 的延长线上取点 R , 使 $AR = AP$, 联结 PR ,



备用图1

同理可证 $\triangle OPD \cong \triangle RBP$,

$$\therefore S_{\triangle RBP} = S_{\triangle ODP} = 4,$$

同理可求 $AP = AR = OP + AO = \sqrt{2}m + 2\sqrt{2}$,

$$\therefore PQ = 2m + 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(2m + 4) \cdot m = 4,$$

解得 $m_1 = -1 + \sqrt{5}$, $m_2 = -1 - \sqrt{5}$ (舍去),

综上, 当 m 的值为 $1 + \sqrt{5}$ 或 $-1 + \sqrt{5}$ 时, $\triangle OPD$ 的面积为 4.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定与性质, 三角形内角和定理, 解一元二次方程, 勾股定理等知识, 明确题意, 添加合适辅助线, 合理分类讨论, 构造全等三角形是解题的关键.