

2024 学年第一学期期中考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列根式中与 $\sqrt{5}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{5x}$ B. $\sqrt{0.5}$ C. $\sqrt{25}$ D. $\sqrt{\frac{1}{5}}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式的识别, 掌握定义是解题的关键, 首先化简二次根式, 然后根据同类二次根式的定义即可判定.

【详解】 解: A. $\sqrt{5x}$ 不能化简, 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式, 故 A 选项不合题意;

B. $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式, 故 B 选项不合题意;

C. $\sqrt{25} = 5$, 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式, 故 C 选项不合题意;

D. $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 与 $\sqrt{5}$ 是同类二次根式, 故 D 选项符合题意;

故选: D.

2. 二次根式 $\sqrt{a-1}$ 的一个有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{a+1}$ B. $2\sqrt{a-1}$ C. $\sqrt{a}+1$ D. $\sqrt{a}-1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理化因式的定义, 二次根式的性质, 根据有理化因式的定义即可解答.

【详解】 解: $\because 2(\sqrt{a-1})(\sqrt{a-1}) = 2|a-1| = 2a-2$,

$\therefore \sqrt{a-1}$ 的一个有理化因式是 $2\sqrt{a-1}$,

故选: B.

3. 下列等式正确的是 ()

- A. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{5}$ B. $\sqrt{9\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$

$$C. \sqrt{(\pi - 3.14)^2} = 3.14 - \pi$$

$$D. \sqrt{6} \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，二次根式的混合运算；根据二次根式的性质与混合运算逐项分析判断，即可求解.

【详解】解：A. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \neq 5\sqrt{5}$ ，故该选项不正确，不符合题意；

$$B. \sqrt{9\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}, \text{ 故该选项不正确，不符合题意；}$$

$$C. \sqrt{(\pi - 3.14)^2} = \pi - 3.14, \text{ 故该选项不正确，不符合题意；}$$

$$D. \sqrt{6} \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, \text{ 故该选项正确，符合题意；}$$

故选：D.

4. 方程 $(x-2)(x+3)=6$ 的根是 ()

$$A. x_1 = 2, x_2 = -3$$

$$B. x_1 = -2, x_2 = 3$$

$$C. x_1 = -4, x_2 = 3$$

$$D. x_1 = 4, x_2 = -3$$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程，根据方程特点选择合适的方法求解是解题关键. 先去括号化简，再根据因式分解法求解即可.

$$\text{【详解】解：} (x-2)(x+3)=6,$$

$$x^2 + x - 6 = 6,$$

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x+4)(x-3)=0,$$

$$\therefore x+4=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\therefore x_1 = -4, x_2 = 3.$$

故选 C.

5. 下列说法正确的是 ()

- A. 等腰三角形两腰上的中线一定相等
- B. 方程 $x^2 = -a$ 一定无实数根 (a 为任意实数)
- C. 在同一平面内垂直于同一条直线的两条直线可能有交点
- D. 两边及一个角对应相等的两个三角形一定全等

【答案】A

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质、一元二次方程的解，平行线的判定、及全等三角形的判定逐一判断即可求解.

【详解】解：A. 等腰三角形两腰上的中线一定相等，故该选项正确，符合题意；

B. 方程 $x^2 = -a$ 当 $a < 0$ 时，有实数根 (a 为任意实数)，故该选项不正确，不符合题意；

C. 在同一平面内垂直于同一条直线的两条直线平行，不可能有交点，故该选项不正确，不符合题意；

D. 两边及两边的一个夹角对应相等的两个三角形一定全等，故该选项不正确，不符合题意；

故选：A.

6. 在平面直角坐标系中， $A(0,4)$ ， $B(3,0)$ ， $C(0,-2)$ ，点 D 是平面直角坐标系内任意一点，若以 A 、 B 、 D 为顶点的三角形与 $\triangle ACB$ 全等 (点 D 与点 C 不重合)，那么符合要求的点 D 的个数有 ()

- A. 2 个
- B. 3 个
- C. 4 个
- D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查坐标与图形性质、全等三角形的判定等知识，根据题意，画出平面直角坐标系中的示意图，分类讨论解题即可.

【详解】如图所示，

【详解】解：原式： $\sqrt{\frac{9y}{x^2}} = \frac{\sqrt{3^2 y}}{\sqrt{x^2}} = \frac{3\sqrt{y}}{x}$ ，

故答案为: $\frac{3\sqrt{y}}{x}$.

9. 二次根式 $\sqrt{2x^2}$ 、 $\sqrt{m^2-2m+1}$ 、 $\sqrt{26xy}$ 、 $\sqrt{\frac{1}{p-1}}$ 中最简二次根式的有_____个.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是最简二次根式的定义, 被开方数不含分母; 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式是最简二次根式, 根据最简二次根式的定义解答即可.

【详解】 解: $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$, $\sqrt{m^2-2m+1} = |m-1|$, $\sqrt{\frac{1}{p-1}} = \frac{\sqrt{p-1}}{p-1}$, 都不是最简二次根式,

$\sqrt{26xy}$ 是最简二次根式,

则最简二次根式有 1 个,

故答案为: 1.

10. 方程 $\frac{1}{2}x^2 = -x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

【解析】

【分析】 利用因式分解法解一元二次方程即可得.

【详解】 解: $\because \frac{1}{2}x^2 = -x$,

移项得: $\frac{1}{2}x^2 + x = 0$,

$\therefore x\left(\frac{1}{2}x+1\right) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $\frac{1}{2}x+1 = 0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$,

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 主要解法包括: 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法等, 熟练掌握各解法是解题关键.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用一元二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 判断方程的根的情况, 当 $\Delta = 0$ 时, 一元二次方程有两个相等实数根, 据此求出 m 的值即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4m = 0,$$

$$\text{解得: } m = \frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{9}{4}.$$

12. 不等式 $\sqrt{5}x - 1 > 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > \sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式, 分母有理化, 严格遵循解不等式的基本步骤是解本题的关键, 尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数, 不等号方向要改变. 通过移项、合并同类项、系数化为 1, 再根据分母有理化化简即可求出不等式的解集.

【详解】 解: $\sqrt{5}x - 1 > 2x$

$$\sqrt{5}x - 2x > 1$$

$$(\sqrt{5} - 2)x > 1$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{5} - 2}, \text{ 即 } x > \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

$$\text{故答案为: } x > \sqrt{5} + 2.$$

13. 在实数范围内分解因式 $x^2 - x - 3 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 令 $x^2 - x - 3 = 0$, 然后用公式法解出方程的根, 即可写出因式分解的结果.

【详解】解：令 $x^2 - x - 3 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{所以 } x^2 - x - 3 = \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$\text{故答案为 } \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

【点睛】本题考查实数范围内分解因式，根据 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 先解方程是关键.

14. 已知一个一元二次方程有一个根是 1，且它的一次项系数是 -3，写出一个符合要求的方程：

_____.

【答案】 $2x^2 - 3x + 1 = 0$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程，解题的关键是熟练运用一元二次方程的定义，本题属于基础题型. 根据一元二次方程的定义和一元二次方程的解的定义即可求出答案.

【详解】解：由题意可设： $ax^2 - 3x + c = 0$,

将 $x = 1$ 代入 $ax^2 - 3x + c = 0$ ，得 $a - 3 + c = 0$,

$$\therefore a + c = 3,$$

故该方程可为： $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

故答案为： $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (答案不唯一).

15. 已知当 $x = 2$ 时，二次三项式 $2x^2 - x + a$ 的值是 5，那么当 $x = -2$ 时，这个二次三项式的值是

_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】本题考查了代数式求值，根据题意求得 $a = -1$ ，得出二次三项式为 $2x^2 - x - 1$ ，再将 $x = -2$ 代入，即可求解.

【详解】解：依题意， $2 \times 2^2 - 2 + a = 5$,

解得： $a = -1$,

∴二次三项式为 $2x^2 - x - 1$

∴当 $x = -2$ 时, $2x^2 - x - 1 = 2 \times (-2)^2 - (-2) - 1 = 9$,

故答案为: 9.

16. 2024年10月1日,某高速路检票口车流量约500万辆次,10月2日该高速路检票口的车流量减少10%.假设从3日、4日车流量有所增加且增长率相同,预计10月4日该高速路检票口车流量达到648万辆次,设10月3日、4日车流量的增长率为 x ,那么可列方程为_____.

【答案】 $500(1-10\%)(1+x)^2 = 648$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用. 设10月3日、4日车流量的增长率为 x , 根据题意列出一元二次方程, 即可求解.

【详解】 解: 设10月3日、4日车流量的增长率为 x , 根据题意得 $500(1-10\%)(1+x)^2 = 648$

故答案为: $500(1-10\%)(1+x)^2 = 648$.

17. 定义一种运算, 对于任意角 α 和 β , $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, 已知 $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

那么 $\tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ$ 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 根据 $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 代入

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ 求得 $\tan 105^\circ$, 根据 $\tan 60^\circ = \tan(15^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 45^\circ}$, 求得

$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, 进而即可求解.

【详解】 解: $\because \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore \tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$,

$\tan 60^\circ = \tan(15^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 45^\circ}$, 即 $\sqrt{3} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{1 - \tan 15^\circ}$

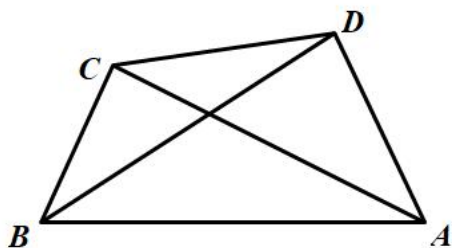
$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 15^\circ = \tan 15^\circ + 1$

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ = -(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -1,$$

故答案为: -1 .

18. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 连接 AC 、 BD . 已知 $\angle DBC = \angle DBA = \angle DAC$, $\angle BCA = 90^\circ$, $AC = 6$, $AB = CB + 2\sqrt{5}$, 那么 $\triangle ADC$ 的面积是_____.



【答案】 $3\sqrt{5}$

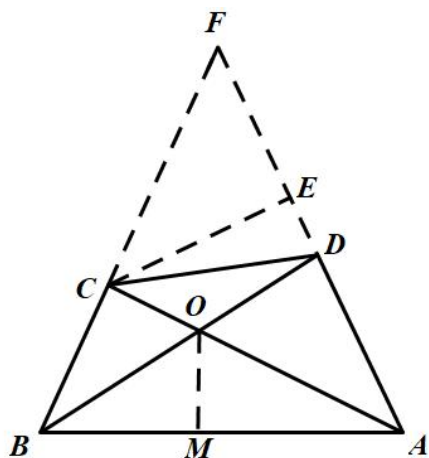
【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质、三角形外角的定义和性质等知识, 正确作出辅助线构造全等三角形是解题关键. 设 AC 、 BD 交于点 O , 延长 BC 、 AD 交于点 F , 过点 C 作 $CE \perp AF$ 于点 E , 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M , 首先证明 $\triangle OBC \cong \triangle OBM$, 由全等三角形的性质可得 $OC = OM$,

$BC = BM$, 进而可知 $AM = 2\sqrt{5}$; 再证明 $\triangle FDB \cong \triangle ADB$, 易得 $FD = AD$, $BF = AB$, 进而推导

$FC = AM = 2\sqrt{5}$, 结合 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CDA$ 等底等高, 利用 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACF}$ 求解即可.

【详解】 解: 如图, 设 AC 、 BD 交于点 O , 延长 BC 、 AD 交于点 F , 过点 C 作 $CE \perp AF$ 于点 E , 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M ,



$\therefore \angle DBC = \angle DBA$, $\angle BCA = 90^\circ$, $OM \perp AB$,

∴在 $\triangle OBC$ 和 $\triangle OBM$ 中,

$$\begin{cases} \angle OCB = \angle OMB = 90^\circ \\ \angle OBC = \angle OBM \\ OB = OB \end{cases},$$

∴ $\triangle OBC \cong \triangle OBM$ (AAS),

∴ $OC = OM$, $BC = BM$,

∵ $AB = BM + AM = CB + 2\sqrt{5}$,

∴ $AM = 2\sqrt{5}$,

∵ $\angle COD = \angle DBC + \angle ACB = \angle DAC + \angle ADB$,

又∵ $\angle DBC = \angle DAC$,

∴ $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$,

∴ $\angle BDF = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$,

在 $\triangle FDB$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBC = \angle FBA \\ BD = BD \\ \angle BDF = \angle BDA = 90^\circ \end{cases},$$

∴ $\triangle FDB \cong \triangle ADB$ (ASA),

∴ $FD = AD$, $BF = AB$,

∵ $AB = BM + AM$, $BF = BC + FC$, 且 $BC = BM$,

∴ $FC = AM = 2\sqrt{5}$,

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CDA$ 中, $FD = AD$, $CE \perp AF$,

即 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CDA$ 等底等高,

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} CF \cdot AC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 6 = 3\sqrt{5}.$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

三、简答题: (本大题共 4 题, 满分 32 分)

19. (1) 计算: $2\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{12} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$;

(2) 计算: $-\sqrt{xy^2} \div \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

【答案】(1) 1; (2) $-2x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算.

(1) 先把各项化成最简二次根式, 再合并即可;

(2) 根据二次根式的乘除法则进行计算即可.

【详解】 解: (1) $2\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{12} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1$$

$$= 1;$$

(2) $-\sqrt{xy^2} \div \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

$$= -\left(1 \div \frac{1}{2}\right) \sqrt{xy^2 \div \frac{y}{x}}$$

$$= -2\sqrt{xy^2 \cdot \frac{x}{y}}$$

$$= -2x\sqrt{y}.$$

20. (1) 解方程: $(2x-9)^2 = (x-6)^2$;

(2) 用配方法解方程: $2x^2 + 4x - 1 = 0$.

【答案】(1) $x_1 = 3, x_2 = 5$; (2) $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程;

(1) 根据直接开平方法解一元二次方程, 即可求解;

(2) 根据配方法解一元二次方程, 即可求解.

【详解】解：(1) $(2x-9)^2 = (x-6)^2$

$$\therefore 2x-9 = \pm(x-6)$$

$$\therefore 2x-9 = x-6 \text{ 或 } 2x-9 = -x+6,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3, x_2 = 5$$

$$(2) \quad 2x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (x+1)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x+1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{解得: } x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

21. 已知: $a = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, 求代数式 $a+ab+b$ 的值.

【答案】 $\sqrt{5} + \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值, 利用平方差公式分别计算出 $a+b$ 、 ab 的值, 代入 $a+ab+b$ 中计算即可.

【详解】 解: $\because a = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}},$

$$\therefore a+b = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \sqrt{5},$$

$$ab = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$$a+ab+b$$

$$= a+b+ab$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

22. 已知 m 、 n 为实数，且 $(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 2) = 15$ ，求 $m^2 + n^2$ 的值.

【答案】5

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用，运用整体代入法是解题关键. 设 $x = m^2 + n^2$ ，则有 $x(x-2)=15$ ，解该方程，并结合 $m^2 + n^2 \geq 0$ ，即可获得答案.

【详解】 解：根据题意， $(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 2) = 15$ ，

设 $x = m^2 + n^2$ ，则有 $x(x-2)=15$ ，

整理可得 $x^2 - 2x - 15 = 0$ ，解得 $x_1 = 5$ ， $x_2 = -3$ ，

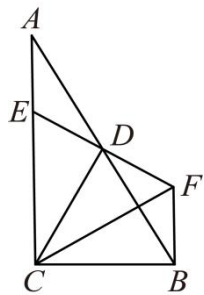
因为 $m^2 \geq 0$ ， $n^2 \geq 0$ ，

所以 $m^2 + n^2 \geq 0$ ，

所以 $m^2 + n^2 = 5$ ，即 $m^2 + n^2$ 的值为 5.

四、解答题：（本大题共 2 题，满分 16 分）

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AB 的中点，连接 CD ，且 $AD = CD$. E 是边 AC 上任意一点（不与点 A 、 C 重合），过点 B 作 $BF \parallel AC$ ，点 F 落在 ED 的延长线上.



(1) 求证： $AC \perp BC$ ；

(2) 连接 CF ，当 $\angle CDE = 90^\circ$ 时，求证： $BF + CF = AC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质得出 $\angle A = \angle ACD$ ， $\angle DCB = \angle DBC$ ，根据 $\angle A + \angle ACD + \angle DCB + \angle DBC = 180^\circ$ ，得出 $\angle ACD + \angle BCD = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，即可证明结论；

(2) 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ ，得出 $DE = DF$ ， $AE = BF$ ，证明 CD 垂直平分 EF ，得出 $CE = CF$ ，根据 $AC = AE + CE = BF + CF$ ，即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 D 是边 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore AD = BD = CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD, \quad \angle DCB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACD + \angle DCB + \angle DBC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

即 $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AC \perp BC;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because BF \parallel AC$,

$$\therefore \angle A = \angle DBF, \quad \angle AED = \angle BFD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore ADE \cong BDF,$$

$$\therefore DE = DF, \quad AE = BF,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp EF,$$

$$\therefore CD \text{ 垂直平分 } EF,$$

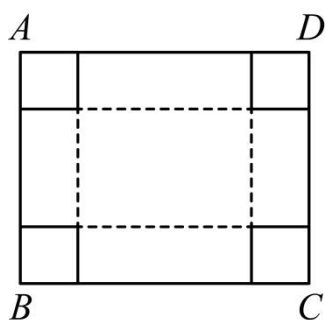
$$\therefore CE = CF,$$

$$\therefore AC = AE + CE = BF + CF,$$

即 $BF + CF = AC$.

【点睛】 本题主要考查了平行线的性质, 三角形全等的判定和性质, 垂直平分线的性质, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理的应用, 垂线的定义, 解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质.

24. 如图, $ABCD$ ($AD > AB$) 是一张周长为 36 厘米的长方形纸片, 设长方形纸片的长 AD 为 x 厘米, 将纸片的四个角各剪下一个边长为 2 厘米的正方形.



- (1) 如果剪去四个角剩下的纸片的面积为 S_1 ，请用含有 x 的式子表示 S_1 （结果要求化简）；
- (2) 如图，沿虚线将剪去四个角剩下的纸片折成一个无盖的长方体纸盒，如果所得的长方体纸盒的体积是 48 立方厘米，求 AD 的长。

【答案】(1) $S_1 = -x^2 + 18x - 16$

(2) 10 厘米

【解析】

【分析】此题主要考查了一元二次方程的应用，首先要注意读懂题意，正确理解题意，然后才能利用题目的数量关系列出方程。

(1) 设长方形纸片的长 AD 为 x 厘米，则宽 AB 为 $(18-x)$ 厘米，根据长方形的面积减去 4 个正方形的面积，即可求解；

(2) 设长方形纸片的长 AD 为 x 厘米，根据题意表示长方体纸盒的长、宽、高，然后根据体积列出方程，解方程即可求解。

【小问 1 详解】

解：设长方形纸片的长 AD 为 x 厘米，则宽 AB 为 $(18-x)$ 厘米，

$$\therefore S_1 = x(18-x) - 4 \times 2^2 = -x^2 + 18x - 16$$

【小问 2 详解】

解：依题意， $2(x-4)(18-x-4) = 48$

解得： $x_1 = 8, x_2 = 10$

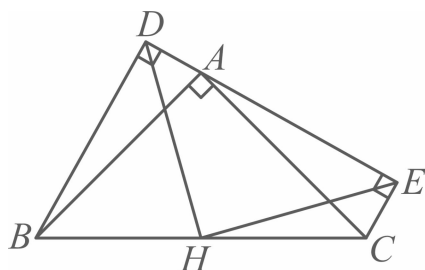
又 $\because x > 18-x$ ，即 $x > 9$

$\therefore AD = 10$ 厘米

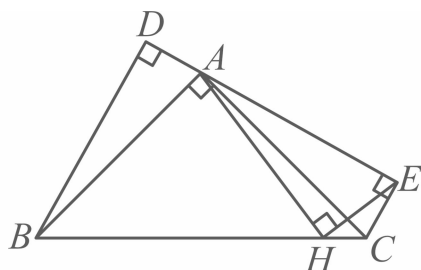
五、综合题；(本大题共 1 题，满分 10 分)

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 A 在 DE 上， $\angle BDA = 90^\circ$ ， $\angle AEC = 90^\circ$ ，

点 H 是边 BC 上的一个动点.



图①



图②

(1) 求证: $AD = CE$;

(2) 如图①, 当点 H 是边 BC 的中点时, 连接 DH 、 HE , 求 $\angle HDE$ 的度数;

(3) 如图②, 连接 AH 、 HE , 当 $AH \perp HE$, 且 $CH = CE$ 时, 设 $\angle ABD = x^\circ$, 请用含 x 的代数式表示 $\angle BAH$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) 45°

(3) $67.5^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定, 三角形内角和定理, 等腰三角形的性质与判定;

(1) 根据已知条件得出 $\angle DBA = \angle EAC$, 进而证明 $\triangle DBA \cong \triangle EAC$ (AAS), 根据全等三角形的性质, 即可得证;

(2) 证明 $\triangle DHA \cong \triangle EHC$, 进而可得 $\triangle DHE$ 是等腰直角三角形, 即可求解;

(3) 根据全等三角形的性质可得 $\angle EAC = \angle ABD = x^\circ$, 进而求得 $\angle ACE = 90^\circ - x^\circ$, 根据等边对等角以及三角形内角和定理求得 $\angle EHC = 22.5^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$, 再根据三角形内角和定理, 即可求解.

【小问 1 详解】

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle EAC,$$

在 $\triangle DBA$ 与 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ \\ \angle DBA = \angle EAC \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBA \cong \triangle EAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CE;$$

【小问 2 详解】

解：如图，联结 AH ，

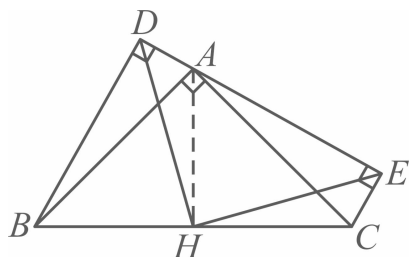


图 ①

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 H 是边 BC 的中点

$$\therefore AH = \frac{1}{2}BC = HC, \quad AH \perp BC$$

$$\therefore \angle AHC = \angle DHE = 90^\circ, \quad \angle BAH = \angle ACH = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DHA = \angle EHC$$

$$\because \triangle DBA \cong \triangle EAC$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle DAH = \angle ECH,$$

$$\therefore \triangle DHA \cong \triangle EHC (\text{ASA})$$

$$\therefore DH = HE,$$

$\therefore \triangle DHE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle HDE = 45^\circ$$

【小问 3 详解】

解：设 $\angle ABD = x^\circ$,

$$\because \triangle DBA \cong \triangle EAC$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ABD = x^\circ,$$

$$\because \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ - x^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle HCE = \angle ACB + \angle ACE = 135^\circ - x^\circ$$

$$\because HC = CE,$$

$$\therefore \angle EHC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle HCE) = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ + x^\circ) = 22.5^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$$

$$\because AH \perp HE,$$

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ - \angle EHC = 67.5^\circ - \frac{1}{2}x^\circ$$

$$\text{在 } \triangle ABH \text{ 中, } \angle BAH = 180^\circ - \angle ABH - \angle AHB = 180^\circ - 45^\circ - \left(67.5^\circ - \frac{1}{2}x^\circ\right) = 67.5^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$$

$$\therefore \angle BAH = 67.5^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$$