

市北初级中学北校 2024 学年第一学期八年级数学期中卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 120 分)

2024. 11

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各式, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{9}$

C. $\sqrt{12}$

D. $\sqrt{\frac{1}{6}}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式: 被开方数不含分母; 被开方数不含能开得尽方的因数或因式; 根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】解: $\sqrt{10}$ 是最简二次根式; $\sqrt{9} = \sqrt{3^2}$, $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$, 这两个二次根式中被开方数含有开得尽方的因数, 不是最简二次根式, $\sqrt{\frac{1}{6}}$ 里被开方数含有分母, 不是最简二次根式;

故选: A.

2. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-1, 6)$, 那么该反比例函数图象也一定经过点 ()

A. $(3, 2)$

B. $(1, 6)$

C. $(-2, 3)$

D. $(-1, -6)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了求反比例函数解析式, 反比例函数图象的性质, 先利用待定系数法求出反比例函数解析式为 $y = -\frac{6}{x}$, 再由反比例函数图象的性质得到在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上的点横纵坐标的乘积一定为 -6 , 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-1, 6)$,

$$\therefore k = (-1) \times 6 = -6,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = -\frac{6}{x},$$

$\therefore$ 反比例函数图象上的点横纵坐标一定满足其解析式,

$$\therefore \text{在反比例函数 } y = -\frac{6}{x} \text{ 的图象上的点横纵坐标的乘积一定为 } -6,$$

A、 $3 \times 2 = 6 \neq -6$ ，该点不在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，不符合题意；

B、 $1 \times 6 = 6 \neq -6$ ，该点不在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，不符合题意；

C、 $3 \times (-2) = -6$ ，该点在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，符合题意；

D、 $(-1) \times (-6) = 6 \neq -6$ ，该点不在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，不符合题意；

故选：C.

3. 下列方程中① $3x^2 + x = 20$ ；② $2x + y = 3$ ；③ $x^2 - \frac{1}{x} = 4$ ；④ $x^2 = 1$ ；⑤ $ax^2 + 3x = 0$ ，一元二次方程有（ ）

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键. 根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程，然后逐个判断即可.

【详解】解：① $3x^2 + x = 20$ 符合一元二次方程定义，故是一元二次方程，符合题意；② $2x + y = 3$ 有两个未知数，故不是一元二次方程，不符合题意；③ $x^2 - \frac{1}{x} = 4$ 不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意；④ $x^2 = 1$ 符合一元二次方程定义，故是一元二次方程，符合题意；⑤ $ax^2 + 3x = 0$ ，只有 $a \neq 0$ 才是一元二次方程，不符合题意.

$\therefore$ 符合题意的有 2 个，

故选：A.

4. 下列关系中，属于成正比例函数关系的是（ ）

A. 正方形的面积与边长

B. 从甲地到乙地，所用的时间和行驶速度

C. 圆的面积与它的半径

D. 等边三角形的周长和边长

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查正比例函数定义的应用，根据各个选项中的说法，利用学过的数学知识得到变量之间的关系式，判断它们的函数关系是否是正比例函数关系即可得到答案. 读懂题意，判断变量之间是否满足正比例函数关系是解决问题的关键.

【详解】解：A、正方形的面积 S 与边长 a 的关系是 $S = a^2$ ，不是正比例函数关系，故选项不符合题意；

B、从甲地到乙地距离固定为 s ，所用的时间 t 和行驶速度 v 的关系是 $s = vt$ ，不是正比例关系，故选项不符合题意；

C、圆的面积 S 与它的半径 r 的关系是 $S = \pi r^2$ ，不是正比例函数关系，故选项不符合题意；

D、等边三角形的周长 C 和边长 a 的关系是 $C = 3a$ ，是正比例函数关系，故选项符合题意；

故选：D.

5. 将式子 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 根式外的因式移到根式内的结果是 ()

A. $\sqrt{-a}$

B. $-\sqrt{a}$

C. $-\sqrt{-a}$

D. $\sqrt{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质、二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式的性质是解题关键. 先根据二次根式有意义的条件可得 $a < 0$ ，再根据二次根式的性质计算即可得.

【详解】解：由题意得： $-\frac{1}{a} \geq 0$ ，且 $a \neq 0$ ，

$\therefore a < 0$ ，

则 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$

$$= -(-a) \cdot \sqrt{-\frac{1}{a}}$$

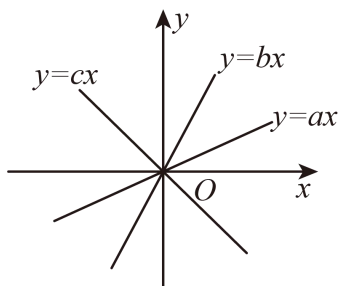
$$= -\sqrt{-\frac{1}{a} \cdot (-a)^2}$$

$$= -\sqrt{-\frac{1}{a} \cdot a^2}$$

$$= -\sqrt{-a},$$

故选：C.

6. 如图，三个正比例函数的图像分别对应的解析式是：① $y = ax$ ，② $y = bx$ ，③ $y = cx$ ，下列用“ $<$ ”表示 a ， b ， c 的不等关系正确的是 ()



A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $c < b < a$

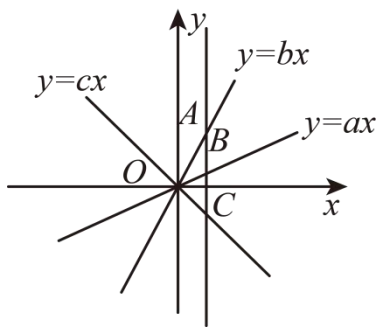
D. $a < c < b$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数的图象与性质，在图中画出直线 $x=1$ ，得出此直线与三个正比例函数图象的交点，再根据它们的位置关系即可解决问题。熟知正比例函数的图象与性质是解题的关键。

【详解】解：作直线 $x=1$ ，如图所示：



则点 $A(1, b)$ ，点 $B(1, a)$ ，点 $C(1, c)$ ，

结合 A ， B ， C 三个点的位置可知， $c < a < b$ 。

故选：B。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的定义域是_____。

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】本题主要考查了分式有意义的条件，立方根有意义的条件。根据分式有意义的条件，立方根有意义的条件，即可解答。

【详解】解：根据题意得： $x-2 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 2$ ，

即函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的定义域是 $x \neq 2$ 。

故答案为: $x \neq 2$

8. 化简: $\sqrt{\frac{-8a}{b}}(b < 0)$ _____.

【答案】 $-\frac{2\sqrt{-2ab}}{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简, 根据二次函数的性质以及 $\sqrt{a^2} = |a|$ 求解即可.

【详解】 解: 由题意, $a > 0$, 则

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{-8a}{b}}(b < 0) \\ &= \sqrt{\frac{-8ab}{b^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{-2ab}}{|b|} \\ &= -\frac{2\sqrt{-2ab}}{b}, \end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{2\sqrt{-2ab}}{b}$.

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根是 $x = -1$, 则 $2024 - a + b$ 的值是_____.

【答案】 2029

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解, 根据一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根是 $x = -1$, 可以得到 $a - b = -5$, 然后代入所求式子计算即可.

【详解】 解: $\because$ 一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根是 $x = -1$,

$$\therefore a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 5 = 0,$$

化简, 得: $a - b = -5$,

$$\therefore 2024 - a + b$$

$$= 2024 - (a - b)$$

$$= 2024 - (-5)$$

$$= 2024 + 5$$

$$= 2029,$$

故答案为：2029.

10. 若 $y = (m-2)x^{|m|-1}$ 是关于 x 的正比例函数，则实数 $m =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查的是正比例函数的定义，一般地，形如 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数，其中 k 叫做比例系数. 依据正比例函数的定义求解即可.

【详解】 解： $\because y = (m-2)x^{|m|-1}$ 是关于 x 的正比例函数，

$$\therefore m-2 \neq 0, \quad |m|-1=1,$$

解得： $m = -2$.

故答案为： -2.

11. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根. 根据 $\Delta < 0$ 求解即可.

【详解】 解： $\because x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m < 0,$$

$$\therefore m > 1.$$

故答案为： $m > 1$.

12. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元，商场经调查发现，如果每件衬衫降价 2 元，商场平均每天可多售出 4 件，若商场平均每天想盈利 1000 元，设每件衬衫应降价 x 元，可列出方程为_____.

【答案】 $x^2 - 30x + 100 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，解题的关键在于找到题目中的等量关系．根据每天的盈利=每天售出的件数×每件的盈利，列出方程即可解题．

【详解】 解：根据题意得 $\left[20 + \left(\frac{x}{2} \times 4\right)\right](40 - x) = 1000$ ，

整理得 $(20 + 2x)(40 - x) = 1000$ ，

即 $x^2 - 30x + 100 = 0$ ，

故答案为： $x^2 - 30x + 100 = 0$ ．

13. 一元二次方程 $(x-1)^2 = 9$ 的根是_____．

【答案】 $x_1 = 4$ ， $x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程-直接开平方法．方程两边开方，再解两个一次方程即可．

【详解】 解： $(x-1)^2 = 9$ ，

$\therefore x-1 = \pm 3$ ，

解得： $x_1 = 4$ ， $x_2 = -2$ ，

故答案为： $x_1 = 4$ ， $x_2 = -2$ ．

14. 等式 $\sqrt{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是_____．

【答案】 $x < 2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件、分式有意义的条件，根据二次根式的被开方数为非负数、分式的分母不为零求解即可．

【详解】 解：由题意，等式 $\sqrt{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ ，

解得 $x < 2$ ，

故答案为： $x < 2$ ．

15. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - xy - y^2 =$ _____．

【答案】 $3\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，先把原式变形为 $3x^2 - xy - y^2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2\right)$ ，可得到

$$3\left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{13}{36}y^2\right]，$$

再利用平方差公式进行因式分解，即可求解

本题考查了实数范围内分解因式：一些式子在有理数的范围内无法分解因式，可是在实数范围内就可以继续分解因式，通过补项配成完全平方公式是解决问题的关键。

【详解】 解： $3x^2 - xy - y^2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2\right)$

$$= 3\left[x^2 - \frac{1}{3}xy + \left(-\frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{1}{36}y^2 - \frac{1}{3}y^2\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{13}{36}y^2\right]$$

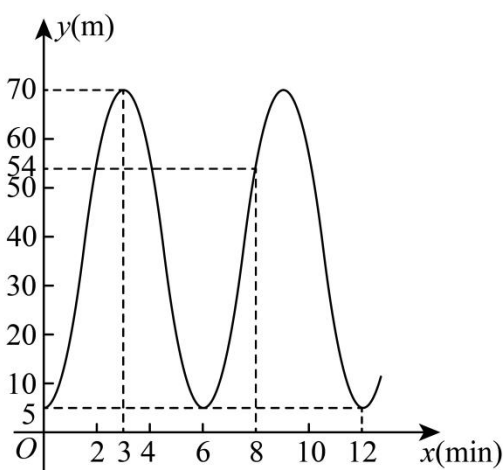
$$= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6}y\right)^2\right]$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{1}{6}y - \frac{\sqrt{13}}{6}y\right)$$

$$= 3\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y\right).$$

故答案为： $3\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y\right)$ 。

16. 宁化儿童公园的摩天轮可抽象成图中的一个圆，圆上一点离地面的高度 $y(\text{m})$ 与旋转时间 $x(\text{min})$ 之间的关系如图所示。根据图中的信息，摩天轮的直径为_____。



【答案】 65m

【解析】

【分析】 根据最高点的纵坐标减去最低点的纵坐标即可求得摩天轮的直径. 本题考查了动点问题的函数图象问题, 函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力. 用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

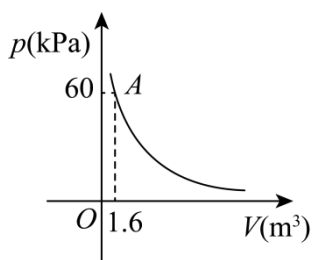
【详解】 解: 依题意, 由图得出摩天轮的最高点为 70m, 最低点为 5m,

$$\therefore 70 - 5 = 65(\text{m}),$$

$\therefore$ 摩天轮的直径为 65m.

故答案为: 65m.

17. 当温度不变时, 某气球内的气压 $p(\text{kPa})$ 与气体体积 $V(\text{m}^3)$ 成反比例函数关系 (其图像如图所示), 已知当气球内的气压 $p > 120 \text{kPa}$ 时, 气球将爆炸, 为了安全起见, 气球内气体体积 V 满足的条件是_____.



【答案】 $V \geq \frac{48}{85}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数的应用, 根据图象可知, 函数图象是反比例函数, 且过点 $(1.6, 60)$, 将点 $(1.6, 60)$ 代入反函数解析式即可求得 k 的值, 从而得出函数解析式, 再根据 p 的范围即可得出答案. 解题的关键是根据图象上的已知点的坐标, 利用待定系数法求出函数解析式.

【详解】解：设球内气体的气压 $p(\text{kPa})$ 与气体体积 $V(\text{m}^3)$ 成反比例函数关系为 $p = \frac{k}{V}$,

$\because$ 图象过点 $(1.6, 60)$,

$$\therefore 60 = \frac{k}{1.6}, \text{ 解得 } k = 96,$$

由已知得 $p = \frac{96}{V}$ 图象在第一象限内,

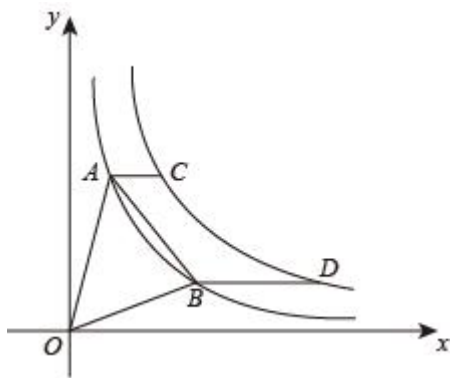
$\therefore P$ 随 V 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } p > 170 \text{ 时, } \frac{96}{V} > 170,$$

$$\text{解得 } V \geq \frac{48}{85}.$$

$$\text{故答案为: } V \geq \frac{48}{85}.$$

18. 如图, A, B 两点在双曲线 $y_1 = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上, C, D 两点在双曲线 $y_2 = \frac{m}{x} (m > 1, x > 0)$ 上, 若 $AC \parallel BD \parallel x$ 轴, 且 $BD = 2AC$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{3}{4}$

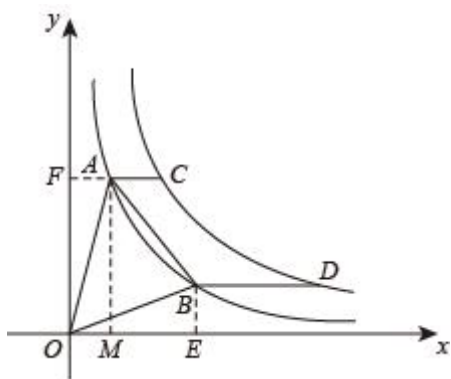
【解析】

【分析】过点 A 作 $AF \perp y$ 轴于 F 点, 过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M , 过 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ;

根据 A, B 都在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 上, 假设 $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$, 根据 C, D 又在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 上, 且 $AB \parallel CD$, 得出 A, C 点的纵坐标相等, 则 B, D 点的纵坐标相等,

得到 $C(am, \frac{1}{a})$ $D(bm, \frac{1}{b})$ 根据 $BD = 2AC$, 得到 $b = 2a$, 即可求解.

【详解】如图: 过点 A 作 $AF \perp y$ 轴于 F 点, 过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M , 过 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ;



$\because A, B$, 都在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 上,

$\therefore$ 设 $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$

而 C, D 又在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 上, 且 $AB \parallel CD$,

则 A, C 点的纵坐标相等, 则 B, D 点的纵坐标相等,

$\therefore$ 当 $\frac{1}{a} = \frac{m}{x}$ 时, $\therefore x = am$,

当 $\frac{1}{b} = \frac{m}{x}$ 时, $x = bm$,

所以 $C(am, \frac{1}{a})$ $D(bm, \frac{1}{b})$

$\therefore AC = am - a = a(m-1)$, $BD = bm - b = b(m-1)$

又 $BD = 2AC$

$\therefore b(m-1) = 2a(m-1)$

$\because m > 1 \therefore b = 2a$

又 $S_{\text{五边形}OFABE} = S_{\triangle OAF} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OBE}$

$\therefore S_{\text{五边形}OFABE} = \frac{1}{2} \times 1 + S_{\triangle AOB} + \frac{1}{2} \times 1 = 1 + S_{\triangle AOB}$

又 $S_{\text{五边形}OFABE} = S_{\text{矩形}OMAF} + S_{\text{梯}AMEB} = 1 + \frac{(AM + BE) \cdot ME}{2}$

而 $AM = \frac{1}{a}$, $BE = \frac{1}{b}$, $ME = b - a$

$\therefore 1 + S_{\triangle AOB} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(b-a)}{2}$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}\right)(2a-a)}{2} = \frac{\frac{3}{2a} \times a}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{故 } S_{\triangle AOB} = \frac{3}{4}$$

【点睛】 本题主要考查反比例函数的应用，求反比例函数的解析式，三角形面积，梯形面积等，根据题意正确作出辅助线，设好未知数，代入求解是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 5 题, 19–22 每题 6 分, 23 题 8 分, 满分 32 分)

19. 计算: $\left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$.

【答案】 $5\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，涉及二次根式性质、平方差公式等知识，首先利用二次根式性质化简，再由二次根式混合运算求解即可得到答案. 熟练掌握二次根式的性质、二次根式混合运算法则及平方差公式是解决问题的关键.

【详解】 解: $\left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

$$= \left(2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \times \sqrt{3} - [3^2 - (2\sqrt{2})^2]$$

$$= 2\sqrt{6} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - (9 - 8)$$

$$= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1$$

$$= 5\sqrt{2} - 1.$$

20. 计算: $\sqrt{3a^2} \div 3\sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{3}}$

【答案】 $\frac{a}{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘除运算求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{3a^2} \div 3\sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{3}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3a^2} \times \sqrt{\frac{2}{9a}} \times \sqrt{\frac{a}{6}} \\
 &= \sqrt{3a^2 \times \frac{2}{9a} \times \frac{a}{6}} \\
 &= \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了二次根式的乘除运算，解题的关键是掌握二次根式的乘除运算法则.

21. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x - 5 = 0$

【答案】 $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程 - 配方法，先利用配方法得到 $(x-1)^2 = \frac{7}{2}$ ，然后利用直接开平方法解方程. 熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解决问题的关键.

【详解】解: $2x^2 - 4x - 5 = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x = \frac{5}{2},$$

$$\text{则 } x^2 - 2x + 1 = \frac{5}{2} + 1,$$

$$\therefore (x-1)^2 = \frac{7}{2},$$

$$\text{直接开平方得 } x-1 = \pm \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

22. 解方程: $3(x-1)^2 = x^2 - 1$

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】本题考查因式分解法解一元二次方程: 因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法, 这种方法简便易用, 是解一元二次方程最常用的方法. 先移项, 再利用因式分解法把方程转化为 $x-1=0$ 或 $3(x-1)-(x+1)=0$, 然后解两个一次方程即可得到答案. 熟练掌握因式分解法求解是解决问题的关键.

【详解】解: $3(x-1)^2 = x^2 - 1$,

$$\therefore 3(x-1)^2 - (x-1)(x+1) = 0,$$

$$\text{则 } (x-1)[3(x-1) - (x+1)] = 0,$$

$$\text{即 } (x-1)(2x-4) = 0,$$

$$\therefore (x-1)(x-2) = 0,$$

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

23. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值.

【答案】18

【解析】

【分析】先将条件变形为: $a = \sqrt{5} + 2$, $b = \sqrt{5} - 2$, 然后将结论变形 $\frac{a^2 + b^2}{ab}$, 最后将化简后的条件代入变形后的式子就可以求出其值.

【详解】解: $\because a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$,

$$\therefore a = \sqrt{5} + 2, \quad b = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore ab = 1, \quad a + b = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = \frac{(2\sqrt{5})^2}{1} - 2 = 18.$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的分母有理化, 完全平方公式的运用, 正确求出 $a = \sqrt{5} + 2$, $b = \sqrt{5} - 2$ 是解答本题的关键.

四、解答题 (本大题共 4 题, 24-26 题每题 8 分, 27 题 10 分, 满分 34 分)

24. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (k+8)x + 8 = 0$.

(1) 求证: 无论 k 取任何实数, 方程总有实数根;

(2) 若等腰三角形的一边长为 4, 另两边长恰好是这个方程的两个根, 求此时的 k 值.

【答案】(1) 详见解析

(2) $k = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

当 $\Delta > 0$ 时，方有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根；也考查了解一元二次方程，根与系数的关系：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两实数根为 x_1, x_2 ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

(1) 分 $k = 0$ 和 $k \neq 0$ 时两种情况求解即可；

(2) 分三角形的腰长为 4 和底边为 4 两种情形讨论即可.

【小问 1 详解】

解：当 $k = 0$ 时，原方程变为 $-8x + 8 = 0$ ，

解得 $x = 1$ ，故符合题意；

当 $k \neq 0$ 时，

$$\because \Delta = (k+8)^2 - 32k$$

$$= k^2 + 16k + 64 - 32k$$

$$= k^2 - 16k + 64$$

$$= (k-8)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 无论 k 取任何非零实数，方程总有实数根.

【小问 2 详解】

解：当三角形的腰长为 4 时，设底边为 a ，

$\therefore x = 4$ 是 $kx^2 - (k+8)x + 8 = 0$ 的一根，

$$\therefore 16k - 4(k+8) + 8 = 0,$$

$$\therefore 16k - 4k - 32 + 8 = 0,$$

$$\therefore k = 2,$$

$$\therefore \text{由根与系数的关系可知：} 4a = \frac{8}{k},$$

$$\therefore a = 1,$$

此时 $1+4 > 4$ ，能够组成三角形，满足题意；

$\therefore$ 当底边为 4 时，设腰长为 b ，

$\therefore kx^2 - (k+8)x + 8 = 0$ 有两个相同的根，

$$\therefore \Delta = (k-8)^2 = 0,$$

$$\therefore k = 8,$$

$$\therefore \text{原方程为 } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore \text{该方程的解为: } x_1 = x_2 = 1.$$

$$\therefore 1+1 < 4, \text{ 不能组成三角形, 故舍去,}$$

综上所述, $k = 2$.

25. 已知函数 $y = y_1 + y_2$, 其中 y_1 与 x 成反比例, y_2 与 x 成正比例, 函数的自变量 x 的取值范围是 $x \geq \frac{1}{2}$,

且当 $x = 1$ 或 $x = 4$, y 的值均为 $\frac{3}{2}$.

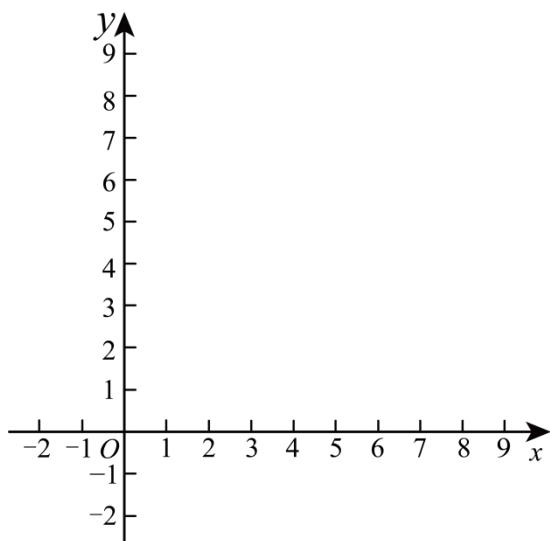
请对该函数及其图像进行如下探究:

(1) 求该函数的解析式;

(2) 函数图像探究: 根据解析式完成下表:

x	...	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	...	$8\frac{1}{2}$	5	4	①	5	$5\frac{4}{5}$	②	$7\frac{4}{7}$	$8\frac{1}{2}$	...

根据表中数据, 在如图所示的平面直角坐标系中描点, 并画出函数的大致图像.



【答案】(1) $y = \frac{4}{x} + x$

(2) $\frac{13}{3}$, $\frac{20}{3}$, 作图见解析

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求函数解析式, 正确画出函数图象、数形结合是解题的关键.

(1) 用待定系数法设 $y_1 = \frac{k_1}{x}$, $y_2 = k_2x$, 则 $y = \frac{k_1}{x} + k_2x$, 将已知条件代入得关于 k_1 、 k_2 方程组, 即可求得该函数解析式;

(2) 把 $x=3$, $x=6$ 分别代入 $y = \frac{4}{x} + x$, 即可求得对应的函数值, 在平面直角坐标系中描点, 用平滑曲线从左到右顺次连接各点, 画出图象即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $y_1 = \frac{k_1}{x}$, $y_2 = k_2x$, 则 $y = \frac{k_1}{x} + k_2x$,

$\because$ 当 $x=1$ 或 $x=4$, y 的值均为 $\frac{3}{2}$,

$$\therefore \begin{cases} k_1 + k_2 = 5 \\ \frac{k_1}{4} + 4k_2 = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 1 \end{cases},$$

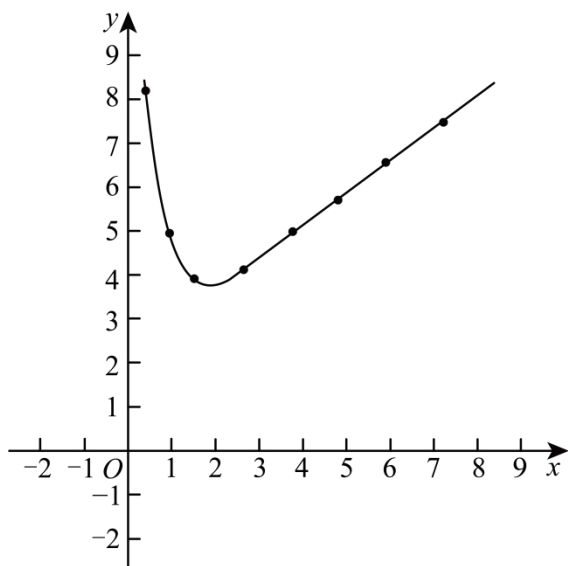
$\therefore$ 该函数解析式为 $y = \frac{4}{x} + x$;

【小问 2 详解】

解: 把 $x=3$ 代入 $y = \frac{4}{x} + x$ 得, $y = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$;

把 $x=6$ 代入 $y = \frac{4}{x} + x$ 得, $y = \frac{4}{6} + 6 = \frac{20}{3}$;

在平面直角坐标系中描点, 画出图象如图所示:



故答案为: $\frac{13}{3}$, $\frac{20}{3}$.

26. 请阅读下列材料, 并按要求完成相应的任务:

人类对一元二次方程的研究经历了漫长的岁月, 我国古代三国时期的数学家赵爽给出了一元二次方程的几

何解法. 赵爽在其所著的《勾股圆方图注》中记载了解方程 $x^2 + 5x - 14 = 0$ 即 $x(x+5) = 14$ 的方法. 首先构造了如图 1 所示的图形, 图中的大正方形面积可以表示为 $(x+x+5)^2$, 其中四个全等的小矩形面积分别为 $x(x+5) = 14$, 中间的小正方形面积为 5^2 , 所以大正方形的面积又可表示为 $4 \times 14 + 5^2$, 据此易得 $x = 2$.

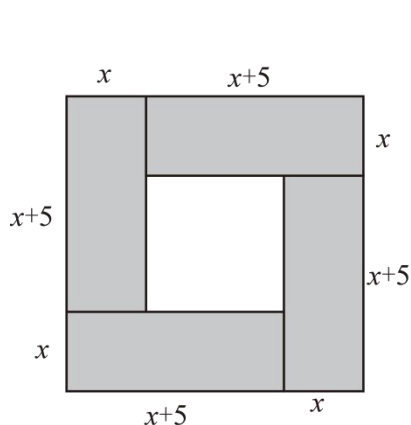


图1

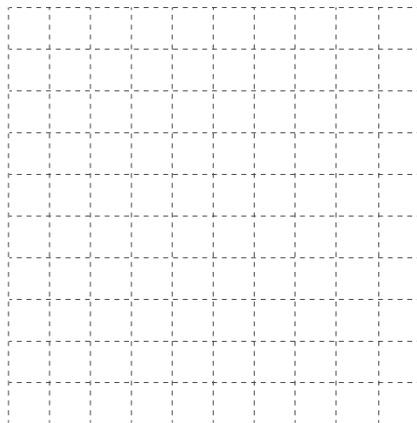
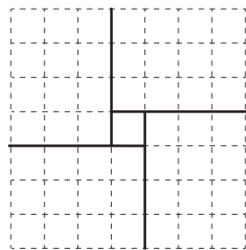


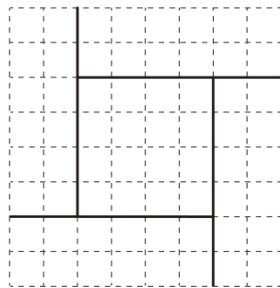
图2

任务:

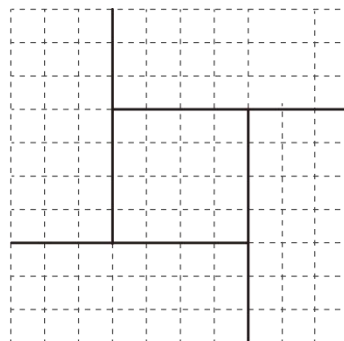
(1) 参照上述图解一元二次方程的方法, 请在下面三个构图中选择能够说明方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的正确构图是_____ (从序号①②③中选择);



①



②



③

(2) 一个长方形的长比宽长 2 米, 且该长方形的面积为 15 平方米, 则长方形的宽为多少? 请列出方程并求解;

(3) 通过对上述材料的学习, 尝试用几何法求解在第 (2) 题中你所列出的方程, 在图 2 的网格中设计正确的构图.

【答案】 (1) ② (2) 列方程求解见解析

(3) 求解、作图见解析

【解析】

【分析】 本题是材料阅读题, 考查了构造图形解一元二次方程, 关键是读懂材料中提供的构图方法, 并能

正确构图解一元二次方程，体现了数形结合的思想.

(1) 仿照阅读材料构造图形，即可判断出构图方法；

(2) 依据题意，设长方形的宽为 x 米，从而长为 $(x+2)$ 米，则 $x(x+2)=15$ ，进而计算可以得解；

(3) 仿照阅读材料构造大正方形面积是 $(x+x+2)^2$ ，其中四个全等的小矩形面积分别为 $x(x+2)=15$ ，中间的小正方形面积为 2^2 ，即可解决问题.

【小问 1 详解】

解： $\because x^2 - 4x - 12 = 0$,

$$\therefore x(x-4)=12.$$

$\therefore$ 应构造面积是 $(x+x-4)^2$ 的大正方形，其中四个全等的小矩形面积分别为 $x(x-4)=12$ ，中间的小正方形面积为 4^2 ，

$$\therefore \text{大正方形的面积又可表示为 } 4 \times 12 + 4^2 = 64,$$

$$\therefore \text{大正方形的边长为 } 8, \text{ 则 } x+x-4=8,$$

$$\therefore x=6, \text{ 则正确构图②},$$

故答案为：②；

【小问 2 详解】

解：由题意，设长方形的宽为 x 米，

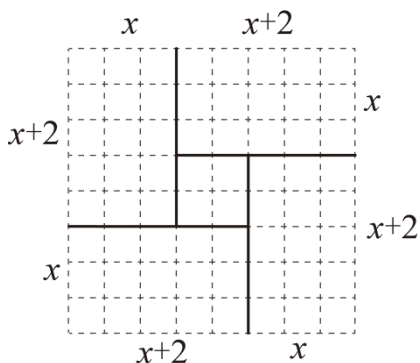
$$\therefore \text{长为 } (x+2) \text{ 米}.$$

$$\therefore x(x+2)=15,$$

由 (2) 中解法可得 $x=3$ 或 $x=-5$ (负值，舍去)；

【小问 3 详解】

解：由题意，首先构造如图所示的图形：



图中的大正方形面积是 $(x+x+2)^2$ ，其中四个全等的小矩形面积分别为 $x(x+2)=15$ ，中间的小正方形面

积为 2^2 ,

$\therefore$ 大正方形的面积又可表示为 $4 \times 15 + 2^2 = 64$, 进一步可知大正方形的边长为 8.

$$\therefore x + x + 2 = 8.$$

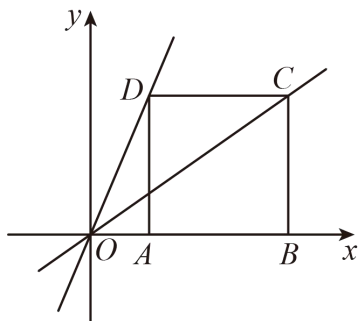
$$\therefore x = 3.$$

27. 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 落在 x 轴正半轴上, 点 C 落在正比例函数 $y = kx$ ($k > 0$) 上, 点 D 落在直线 $y = 2x$ 上, 且点 D 的横坐标为 a .

(1) 直接写出 A 、 B 、 C 、 D 各点的坐标 (用含 a 的代数式表示);

(2) 求出 k 的值;

(3) 将直线 OC 绕点 O 旋转, 旋转后的直线将正方形 $ABCD$ 的面积分成 1: 3 两个部分, 求旋转后得到的新直线解析式.



【答案】(1) 点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标分别为 $(a, 0)$ 、 $(3a, 0)$ 、 $(3a, 2a)$ 、 $(a, 2a)$; (2) $k = \frac{2}{3}$; (3) $y = (3 - \sqrt{5})x$ 或 $y = \frac{1}{4}x$.

【解析】

【分析】(1) 点 D 的横坐标为 a , 则点 $D(a, 2a)$, 则 $AB = AD = 2a$, 进而求解;

(2) 将 C 点坐标代入 $y = kx$ 即可求得 k ;

(3) 根据题干, 可求得直线 OF 的解析式为 $y = \frac{m}{a}x$, 当 $y = 2a$ 时, 可求出点 $E(\frac{2a^2}{m}, 2a)$, 由 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4}S$

正方形 $ABCD$, 可列方程进而求出 m .

【详解】解: (1) 点 D 的横坐标为 a , 则点 $D(a, 2a)$,

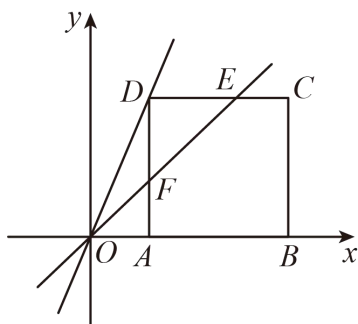
则 $AB = AD = 2a$, 则点 A 、 B 、 C 的坐标分别为 $(a, 0)$ 、 $(3a, 0)$ 、 $(3a, 2a)$,

故点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标分别为 $(a, 0)$ 、 $(3a, 0)$ 、 $(3a, 2a)$ 、 $(a, 2a)$;

(2) 将点 C 的坐标代入 $y = kx$ 得, $2a = 3ak$,

$$\text{解得 } k = \frac{2}{3};$$

(3) 设 $AF=m$ ，则点 $F(a, m)$ ，设直线 OC 旋转后交 AD 于点 F ，交 CD 于点 E ，



则直线 OF 的表达式为 $y = \frac{m}{a}x$ ，

当 $y=2a$ 时， $y = \frac{m}{a}x = 2a$ ，

解得 $x = \frac{2a^2}{m}$ ，

故点 $E(\frac{2a^2}{m}, 2a)$ ，

由题意得： $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形 } ABCD} = \frac{1}{4} \times (2a)^2 = a^2$ ，

即 $\frac{1}{2} \times DE \times DF = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2a^2}{m} - a \right) (2a - m) = a^2$ ，

解得： $m = 3a \pm \sqrt{5}a$ ，

则函数的表达式为 $y = \frac{m}{a}x = (3 \pm \sqrt{5})x$ 。

当 $y = (3 + \sqrt{5})x$ 时，直线与正方形没有公共点故舍去

第二种情况，旋转后直线 OC 和线段 BC 相交，同理可得 $k = \frac{1}{4}$

则函数表达式为 $y = (3 - \sqrt{5})x$ 或 $y = \frac{1}{4}x$

【点睛】 本题考查一次函数的性质、正方形的性质、面积的计算等，掌握一次函数的性质是解题关键。