

2024 学年第一学期八年级期中考试数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{0.12}$ B. $\sqrt{a^2 + b^2}$ C. $\sqrt{a^4}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3a}}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式, 最简二次根式的概念: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 据此解答即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{0.12}$ 中被开方是小数, 所以不是最简二次根式, 故 A 不符合题意.

B、 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 是最简二次根式, 故 B 符合题意.

C、 $\sqrt{a^4} = a^2$, 不是最简二次根式, 故 C 不符合题意.

D、 $\sqrt{\frac{1}{3a}}$, 被开方数含分母, 故 D 不符合题意.

故选: B.

2. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $2x^2 - 3y + 1 = 0$ B. $x^2 - \frac{1}{x} = 0$
- C. $y^2 = 0$ D. $x^2 - 5 = x(x - 1)$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的概念，根据一元二次方程的定义解答．一元二次方程必须满足四个条件：(1) 未知数的最高次数是2；(2) 二次项系数不为0；(3) 是整式方程；(4) 含有一个未知数．由这四个条件对四个选项进行验证，满足这四个条件者为正确答案．

【详解】 解：A、 $2x^2 - 3y + 1 = 0$ 中方程含有两个未知数，故选项错误；

B、 $x^2 - \frac{1}{x} = 0$ 不是整式方程，故选项错误；

C、 $y^2 = 0$ 符合一元二次方程的定义，故选项正确；

D、方程 $x^2 - 5 = x(x - 1)$ 整理后未知数的最高次数是1，是一元一次方程，故选项错误．

故选：C．

3. 下列运算一定正确的是()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$

C. $(\sqrt{-a})^2 = a$

D. $\sqrt{4^2 - 3^2} = 1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 运用二次根式的计算方法和性质逐一计算得出结果，进一步选择答案即可．

【详解】 A. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 不能合并，此选项错误；

B. $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$ ，此选项正确；

C. $(\sqrt{-a})^2 = -a$ ，此选项错误；

D. $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ ，此选项错误．

故选 B．

【点睛】 本题考查二次根式的运算和化简，掌握运算法则及化简方法是解题的关键．

4. 下列方程中，有实数根的方程是 ()

A. $x^2 + 1 = 0$

B. $x^2 + x + 1 = 0$

C. $x^2 - x + 1 = 0$

D. $x^2 + 3x + 1 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式. 分别计算出每个方程根的判别式的值, 再进一步判断即可. 解题的关键是掌握: 式子 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式, $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不等的实数根; $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根.

【详解】解: A. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

B. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

C. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

D. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$,

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根, 故此选项符合题意.

故选: D.

5. 下列命题中, 属于假命题的是 ()

A. 三角形的内角和等于 180°

B. 对顶角相等

C. 同位角相等

D. 在同一平面内, 垂直于同一条直线的两条直线互相平行

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线的性质与判定, 三角形的内角和定理, 对顶角相等进行逐一判断即可.

【详解】解: A. 三角形的内角和等于 180° , 原命题是真命题, 不符合题意;

B. 对顶角相等, 原命题是真命题, 不符合题意;

C. 两直线平行, 同位角相等, 原命题是假命题, 符合题意;

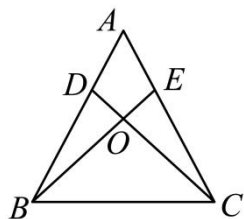
D. 在同一平面内, 垂直于同一条直线的两条直线互相平行, 原命题是真命题, 不符合题意;

故选 C.

【点睛】本题主要考查了判断命题真假, 熟知平行线的性质与判定, 三角形的内角和定理, 对顶角相等是解题的关键.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, BE 与 CD 相交于点 O , 下列各个选项所列举的

条件中，不能证明 $AB = AC$ 的是 ()



A. $BE = CD$, $\angle EBA = \angle DCA$

B. $BD = CE$, $BO = CO$

C. $OD = OE$, $\angle ABE = \angle ACD$

D. $BE = CD$, $BD = CE$

【答案】B

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定对各选项进行判断.

【详解】解：A、因为 $BE = CD$, $\angle EBA = \angle DCA$, $\angle A$ 为公共角,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD,$$

$\therefore AB = AC$, 故 A 选项不符合题意;

B、根据 $BD = CE$, $BO = CO$, 无法判断 $\triangle BOD$ 和 $\triangle COE$ 全等, 故无法得到 $\angle ABE$ 和 $\angle ACD$ 的大小关系, 则 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的大小无法判断,

$\therefore$ 不能证明 $AB = AC$, 故 B 选项符合题意;

C、 $\because OD = OE$, $\angle ABE = \angle ACD$, $\angle BOD = \angle COE$,

$$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE,$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$\therefore AB = AC$, 故 C 选项不符合题意;

D、 $\because BE = CD$, $BD = CE$, $BC = CB$,

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle CBE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$\therefore AB = AC$, 故 D 选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定，熟练掌握全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定是解决此类问题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的减法法则进行计算即可得.

【详解】 解: 原式 $= \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{4}{2}\sqrt{2}$
 $= -\frac{1}{2}\sqrt{2},$

故答案为: $-\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

【点睛】 本题考查了二次根式的减法, 解题的关键是掌握二次根式的减法法则.

8. 若二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$ ## $x \geq 1\frac{1}{2}$ ## $x \geq 1.5$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件即可求出答案.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义,

$\therefore 2x-3 \geq 0,$

$\therefore x \geq \frac{3}{2},$

故答案为: $x \geq \frac{3}{2}.$

【点睛】 本题考查二次根式, 解题的关键是正确理解二次根式有意义的条件.

9. 化简 $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-2$ ## $-2+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先利用二次根式的性质, 再利用求绝对值的法则, 即可求解.

【详解】 解: $\because 4 < 5,$

$\therefore 2 < \sqrt{5},$

$\therefore \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2.$

故答案为: $\sqrt{5}-2.$

【点睛】 本题主要考查二次根式的性质，熟练掌握 $\sqrt{a^2}=|a|$ ，是解题的关键.

10. 如果最简二次根式 $a\sqrt[3]{3+a}$ 与 $\sqrt{b}$ 是同类二次根式，那么 b 的值等于_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式，根据同类二次根式的定义得到 $a-2=2$ ， $3+a=b$ ，然后求解即可，即可得出答案. 解题的关键是掌握同类二次根式的定义：把几个二次根式化为最简二次根式以后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式. 也考查了二元一次方程组的应用.

【详解】 解： $\because$ 最简二次根式 $a\sqrt[3]{3+a}$ 与 $\sqrt{b}$ 是同类二次根式，

$$\therefore \begin{cases} a-2=2 \\ 3+a=b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases},$$

$\therefore b$ 的值等于 7 .

故答案为： 7 .

11. 方程 $x^2=4x$ 的解 ____.

【答案】 $x=0$ 或 $x=4$

【解析】

【分析】 先移项，使方程右边为 0，再提公因式 x ，然后根据“两式相乘值为 0，这两式中至少有一式值为 0.” 进行求解.

【详解】 解：原方程变为

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

解得 $x_1=0$ ， $x_2=4$ ，

故答案为： $x=0$ 或 $x=4$.

【点睛】 本题考查用因式分解法解一元一次方程.提公因式是解题的关键.

12. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 2x - 5 =$ _____.

$$\text{【答案】 } 2\left(x - \frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{11}}{2}\right)$$

【解析】

【分析】 本题考查在实数范围内分解因式和解一元二次方程，先求出方程 $2x^2 - 2x - 5 = 0$ 的根，再分解因式即可．能求出一元二次方程的解是解此题的关键．

【详解】 解： $2x^2 - 2x - 5 = 0$ ，

此时 $a = 2$ ， $b = -2$ ， $c = -5$ ，

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 44 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{44}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1 + \sqrt{11}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{11}}{2},$$

$$\therefore 2x^2 - 2x - 5 = 2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{11}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{11}}{2} \right).$$

$$\text{故答案为: } 2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{11}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{11}}{2} \right).$$

13. 不等式 $x - 1 > \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -1 - \sqrt{2}$ 或 $x < -\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式，解题的关键是掌握解一元一次不等式的步骤：移项，合并同类项，将系数化为1．据此解答即可．也考查了分母有理化．

【详解】 解：移项，得： $x - \sqrt{2}x > 1$ ，

合并同类项，得： $(1 - \sqrt{2})x > 1$ ，

将系数化为1，得： $x < \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ ，即 $x < -1 - \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 不等式 $x - 1 > \sqrt{2}x$ 的解集是 $x < -1 - \sqrt{2}$ ．

故答案为： $x < -1 - \sqrt{2}$ ．

14. 某地 2024 年 6 月份的房价平均每平方米为 51000 元，该地 2022 年同期的房价平均每平方米为 36800 元，假设这两年该地房价的平均增长率均为 x ，则可列关于 x 的方程为：_____．

【答案】 $36800(1 + x)^2 = 51000$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的应用—增长率，一般用增长后的量 = 增长前的量 $\times$ (1 + 增长率)，如果设房价平均每年的增长率为 x 根据题意即可列出方程。解题的关键是掌握增长率的公式：一般形式为

$a(1+x)^2 = b$ ， a 为起始时间的有关数量， b 为终止时间的有关数量。

【详解】 解：设这两年该地房价的平均增长率均为 x ，

依题意，得： $36800(1+x)^2 = 51000$ 。

故答案为： $36800(1+x)^2 = 51000$ 。

15. 命题“等角对等边”改成“如果……,那么……”的形式：_____

【答案】 在同一个三角形中，如果有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等。

【解析】

【分析】 分析原命题，找出其条件与结论，然后写成“如果...那么...”形式即可。

【详解】 解：因为条件是：在同一个三角形中，有两个角相等，结论为：这两个角所对的边也相等。

所以改写后为：在同一个三角形中，如果有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等。

故答案为在同一个三角形中，如果有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等。

【点睛】 本题考查命题的定义，难度适中，正确找到条件与结论是解题关键。

16. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 + x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一个根为 0，则 m 的值为_____。

【答案】 $m=3$

【解析】

【详解】 解：一元二次方程 $(m+1)x^2 + x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 得， $m^2 - 2m - 3 = 0$ ，解之得， $m = -1$ 或 3 ，

$\because m+1 \neq 0$ ，即 $m \neq -1$ ，

$\therefore m=3$

故本题答案为 $m=3$ 。

【点评】 本题逆用一元二次方程解的定义易得出 a 的值，但不能忽视一元二次方程成立的条件 $m+1 \neq 0$ ，因此在解题时要重视解题思路的逆向分析。

17. 已知 a 、 b 均为正整数，如果 $0 < \sqrt{a} - b < 1$ ，我们称 b 是 $\sqrt{a}$ 的“主要值”，那么 $\sqrt{65}$ 的主要值是_____。

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查无理数的估算，根据 a 、 b 均为正整数，如果 $0 < \sqrt{a} - b < 1$ ，我们称 b 是 $\sqrt{a}$ 的“主要

值”，可以求得 $\sqrt{65}$ 的主要值. 解题的关键是明确题意，估算出 $\sqrt{65}$ 处于哪两个整数之间.

【详解】解： $\because 64 < 65 < 81$,

$$\therefore \sqrt{64} < \sqrt{65} < \sqrt{81}, \text{ 即 } 8 < \sqrt{65} < 9,$$

$$\therefore 0 < \sqrt{65} - 8 < 1,$$

$\therefore \sqrt{65}$ 的主要值是8.

故答案为：8.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 20^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转至 $\triangle A'B'C$ ，点 A 、 B 分别与点 A' 、 B' 对应，如果直线 $A'B' \perp$ 直线 AB ，那么 $\angle B'A'A$ 的度数为_____.

【答案】 65° 或 25°

【解析】

【分析】本题考查旋转的性质，等腰直角三角形的性质，根据直线 $A'B' \perp$ 直线 AB ，则把 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，当把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，如图1，根据旋转的性质得到 $CA' = CA$ ， $\angle ACA' = 90^\circ$ ， $\angle CA'B' = \angle CAB = 20^\circ$ ，则可判断 $\triangle ACA'$ 为等腰直角三角形，得 $\angle CA'A = 45^\circ$ ，继而得到 $\angle B'A'A = \angle CA'A + \angle CA'B'$ ；当把 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，如图2，同样得到 $\angle CA'A = 45^\circ$ ，继而得到 $\angle B'A'A = \angle CA'A - \angle CA'B'$. 解题的关键是掌握旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等.

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 20^\circ$ ，

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转至 $\triangle A'B'C$ ，且直线 $A'B' \perp$ 直线 AB ，

$\therefore$ 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，

当把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，如图1，

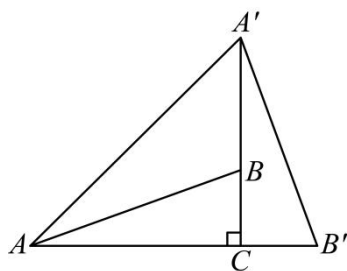


图1

$$\therefore CA' = CA, \angle ACA' = 90^\circ, \angle CA'B' = \angle CAB = 20^\circ,$$

$\therefore \triangle ACA'$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle CA'A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B'A'A = \angle CA'A + \angle CA'B' = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ;$$

当把 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，如图 2，

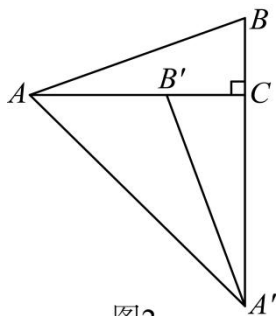


图2

$$\therefore CA' = CA, \angle ACA' = 90^\circ, \angle CA'B' = \angle CAB = 20^\circ,$$

$\therefore \triangle ACA'$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle CA'A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B'A'A = \angle CA'A - \angle CA'B' = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ;$$

综上所述， $\angle B'A'A$ 的度数为 65° 或 25° 。

故答案为： 65° 或 25° 。

三、计算题（本大题共 8 题，满分 64 分）

19. 计算： $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 24^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} - (\sqrt{3}-1)^0$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，根据二次根式的性质，分数指数幂，分母有理化，零指数幂将原式化简，同时将二次根式化为最简二次根式，最后进行加减运算．掌握相应的运算法则、运算顺序、性质及公式是解题的关键．

【详解】 解： $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 24^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} - (\sqrt{3}-1)^0$

$$= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{24} + 2 - \sqrt{3} - 1$$

$$= \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{6} + 2 - \sqrt{3} - 1$$

$$= 2\sqrt{6}.$$

20. 计算： $3\sqrt{1\frac{1}{7}} \div \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{3}{14}}$.

【答案】 $\frac{6}{7}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，先计算二次根式的乘法，然后将二次根式化为最简二次根式，最后进行加减运算．掌握相应的运算法则、运算顺序及性质是解题的关键．

【详解】 解： $3\sqrt{1\frac{1}{7}} \div \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{3}{14}}$

$$= \left(3 \div \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{\frac{8}{7} \div 2 \times \frac{3}{14}}$$
$$= 6\sqrt{\frac{6}{49}}$$
$$= \frac{6}{7}\sqrt{6}.$$

21. 解方程： $(x-3)^2 + 2x(x-3) = 0$.

【答案】 $x_1 = 3, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 方程左边提取公因式化为积的形式，然后利用两数相乘积为 0，两因式中至少有一个为 0 转化为两个一元一次方程来求解．

【详解】 解： 分解因式得： $(x-3)(x-3+2x) = 0$ ，即 $(x-3)(3x-3) = 0$

可得： $x-3=0$ 或 $3x-3=0$

解得： $x_1 = 3, x_2 = 1$

【点睛】 本题考查利用因式分解法求一元二次方程的解．熟练掌握因式分解法是解答本题的关键．

22. 用配方法解方程： $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

【答案】 $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 根据配方法的步骤先两边都除以 2，再移项，再配方，最后开方即可得出答案．

【详解】 原方程变形为： $x^2 - 4x = -\frac{3}{2}$

配方得 $x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{2}$ 即 $(x-2)^2 = \frac{5}{2}$

$x-2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x-2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

所以原方程得解为 $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，关键是能正确配方，配方法的一般步骤：（1）把常数项移到等号的右边；（2）把二次项的系数化为 1；（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方.

23. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0$ ，其根的判别式的值为 1，求 m 的值及该方程的根.

【答案】 $m = 2$ ， $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$

【解析】

【分析】 根据根的判别式的值为 1，求出 m 的值，再利用求根公式进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $\Delta = b^2 - 4ac = [-(3m-1)]^2 - 4m(2m-1) = 1$ ，

整理，得： $m^2 - 2m = 0$ ，

解得： $m = 0$ （不合题意，舍去）或 $m = 2$ ；

$\therefore$ 一元二次方程化为： $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ，

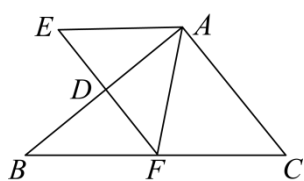
$\therefore \Delta = 1 > 0$ ，

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm 1}{4}$ ，

$\therefore x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$.

【点睛】 本题考查根的判别式，公式法解一元二次方程. 解题的关键是掌握根的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$.

24. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，F 为 BC 上一点， $DF \parallel AC$ ，延长 FD 至 E，且 $DE = DF$ ，联结 AE、AF



(1) 求证： $\angle E = \angle C$;

(2) 如果 DF 平分 $\angle AFB$ ，求证： $AC \perp AB$

【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据 SAS 证明 $\triangle AED$ 与 $\triangle BFD$ 全等，再利用等量代换证明即可；

(2) 根据角平分线的定义和等腰三角形的性质进行证明即可.

【详解】 (1) $\because$ D 为 AB 的中点，

$\therefore BD = AD$ ，

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle BFD$ 中,

$$\begin{cases} DE = DF \\ \angle ADE = \angle BDF, \\ ED = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFD$ (SAS),

$\therefore \angle E = \angle DFB$,

$\therefore DF \parallel AC$,

$\therefore \angle C = \angle DFB$,

$\therefore \angle C = \angle E$;

(2) $\because DF$ 平分 $\angle AFB$,

$\therefore \angle AFD = \angle DFB$,

$\because \angle E = \angle DFB$,

$\therefore \angle AFD = \angle AED$,

$\because ED = DF$,

$\therefore \angle DAF + \angle AFD = 90^\circ$,

$\because EF \parallel AC$,

$\therefore \angle AFD = \angle FAC$,

$\therefore \angle DAF + \angle FAC = 90^\circ$,

$\therefore AC \perp AB$.

【点睛】此题考查全等三角形的判定与性质，解题关键是根据平行线的性质、全等三角形的判定与性质等知识进行解答.

25. 如图 1，要建一个面积为 140 平方米的长方形仓库，仓库的一边靠墙，这堵墙长 16 米；在与墙垂直的一边，要开一扇 2 米宽的门，已知围建仓库的现有木板材料可使新建板墙的总长为 32 米.

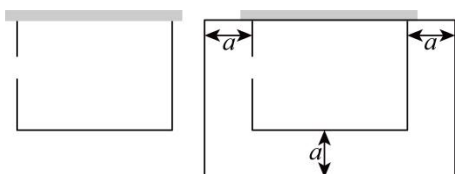


图1

图2

(1) 这个仓库设计的长和宽分别为多少米;

(2) 如图 2，要在仓库外铺一圈宽为 a 米、总面积为 76 平方米的地砖，求 a 的值.

【答案】(1) 长和宽分别为 14 米、10 米

(2) 2

【解析】

【分析】(1) 首先设这个仓库的长为 x 米，则宽表示为 $\frac{1}{2}(32+2-x)$ ，再根据面积为 140 平方米的仓库可得 $x \times \frac{1}{2}(32+2-x) = 140$ ，再解一元二次方程即可；

(2) 根据大长方形的面积等于仓库的面积加上地砖的面积，列出方程，即可求解.

【小问 1 详解】

解：设这个仓库的长为 x 米，则宽表示为 $\frac{1}{2}(32+2-x)$ ，由题意得：

$$x \times \frac{1}{2}(32+2-x) = 140,$$

解得： $x_1 = 14, x_2 = 20$ ，

$\therefore$ 这堵墙的长为 16 米，

$\therefore x = 20$ 不合题意舍去，

$\therefore x = 14$ ，宽为： $\frac{1}{2}(32+2-14) = 10$ (米).

答：这个仓库的长和宽分别为 14 米、10 米.

【小问 2 详解】

解：根据题意得：

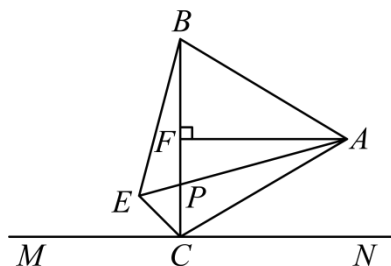
$$(14+2a)(10+a) = 76 + 14 \times 10,$$

解得： $a_1 = 2, a_2 = -19$ (不符合题意，舍去)，

即 a 的值为 2.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用，关键是正确理解题意，正确表示出长方形的长和宽.

26. 已知：如图，点 C 为直线 MN 上的一点，点 B 为直线 MN 外一点，将线段 CB 绕点 C 顺时针旋转 60° 后得 CA ，连接 AB ，过点 A 作 $AF \perp BC$ ，垂足为点 F ， $\angle FAC$ 的平分线交 BC 于点 P ，交 $\angle BCM$ 的平分线于点 E ，连接 BE .



备用图



备用图

(1) 当 $BC \perp MN$,

①求 $\angle AEC$ 的度数;

②证明 $AE = CE + EB$.

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转, 当 $\triangle EPC$ 为等腰三角形时, 直接写出 $\angle AEC$ 的度数.

【答案】(1) ① 60° ; ②证明见解析

(2) 30° 或 52.5° 或 75°

【解析】

【分析】(1) ①由旋转的性质可得 $CA = CB$, $\angle ACB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 根据等边三角形的性质可得 $\angle CAF = 30^\circ$, 由角平分线的定义可得 $\angle CAF = 15^\circ$, $\angle BCE = 45^\circ$, 根据三角形的内角和定理即可得 $\angle AEC$ 的度数;

②在 EA 上截取 $EH = EC$, 连接 CH , 证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACH$ (SAS), 可得 $BE = AH$, 即可得证;

(2) 当 $\triangle EPC$ 为等腰三角形时, 分三种情况: ①当 $EP = EC$ 时, ②当 $EP = CP$ 时, ③当 $EC = PC$ 时, 根据等腰三角形的性质可得出 $\angle AEC$ 的度数.

【小问 1 详解】

解: ① $\because$ 将线段 CB 绕点 C 顺时针旋转 60° 后得 CA ,

$\therefore CA = CB$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle CAB = 60^\circ$,

$\therefore AF \perp BC$,

$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore BC \perp MN$,

$\therefore \angle BCM = 90^\circ$,

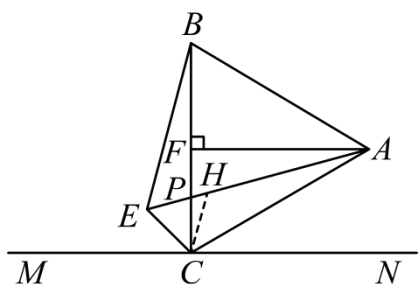
$\therefore AP$ 平分 $\angle FAC$, CE 平分 $\angle BCM$,

$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAF = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$, $\angle BCE = \frac{1}{2} \angle BCM = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - \angle CAE - \angle BCE - \angle ACB = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle AEC$ 的度数为 60° ;

②证明: 如图, 在 EA 上截取 $EH = EC$, 连接 CH ,



$$\therefore \angle AEC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ECH$ 是等边三角形,

$$\therefore CE = CH, \angle ECH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PCH = \angle ECH - \angle BCE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle ACB - \angle PCH = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle BCE,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACH$ 中,

$$\begin{cases} CE = CH \\ \angle BCE = \angle ACH, \\ CB = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACH (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = AH,$$

$$\therefore AE = EH + AH = CE + BE;$$

【小问 2 详解】

解: $\therefore$ 将线段 CB 绕点 C 顺时针旋转 60° 后得 CA ,

$$\therefore CA = CB, \angle ACB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore AF \perp BC,$$

$$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore CE \text{ 平分 } \angle BCM,$$

$$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAF = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ACB + \angle CAE = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ,$$

当 $\triangle EPC$ 为等腰三角形时, 分三种情况:

①当 $EP = EC$ 时,

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 180^\circ - \angle EPC - \angle ECP = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ;$$

②当 $EP = CP$ 时,

$$\therefore \angle AEC = \angle ECP,$$

$$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EPC) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 75^\circ) = 52.5^\circ;$$

③当 $EC = PC$ 时,

$$\therefore \angle AEC = \angle EPC = 75^\circ;$$

综上, $\angle AEC$ 的度数为 30° 或 52.5° 或 75° .

【点睛】 本题是几何变换综合题, 考查了旋转的性质, 等边三角形的判定和性质, 角平分线的定义, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质等知识, 灵活运用所学知识, 利用分类讨论的思想解决问题是解题的关键.