

2024 学年第一学期期中八年级数学试卷

(考试时间: 100 分钟, 满分: 120 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{x}}$

B. $\sqrt{12}$

C. $\sqrt{4xy}$

D. $\sqrt{a^2 - 2ab - b^2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据最简二次函数的特征: 被开方数不含分母, 不含能开方开的尽的因式或因数, 进行判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ 被开方数含有分母, 不符合题意;

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

D、 $\sqrt{a^2 - 2ab - b^2}$, 是最简二次根式, 符合题意;

故选 D.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{6}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{18}$

C. $\sqrt{24}$

D. $\sqrt[3]{6}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质进行化简, 同类二次根式, 立方根. 熟练掌握利用二次根式的性质进行化简, 同类二次根式, 立方根是解题的关键.

利用二次根式的性质进行化简, 然后根据同类二次根式定义判断作答即可.

【详解】 解: A. 中 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 不是 $\sqrt{6}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

B 中 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 不是 $\sqrt{6}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

C 中 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 是 $\sqrt{6}$ 的同类二次根式, 故符合要求;

D 中 $\sqrt[3]{6}$, 不是 $\sqrt{6}$ 的同类二次根式, 故不符合要求;

故选：C.

3. 下列关于 x 的方程中，一定是一元二次方程的是（ ）

A. $(x-3)(x+4)=2x^2-x$

B. $x^2 - \frac{2}{x} - 3 = 0$

C. $ax^2 + bx + c = 0$

D. $3x^2 + \sqrt{2x} - 4 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义，掌握“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为2次的整式方程叫做一元二次方程”是解题的关键.

【详解】解：A、是一元二次方程，故此选项符合题意；

B、不是整式方程，故此选项不符合题意；

C、当 $a=0$ 时，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

D、不是整式方程，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

故选：A.

4. 用配方法解方程 $x^2 + 6x + 12 = 0$ 时，配方后所得的方程是（ ）

A. $(x+3)^2 = 3$

B. $(x-3)^2 = 3$

C. $(x+3)^2 = -3$

D. $(x-3)^2 = -3$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用. 选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为1，一次项的系数是2的倍数. 先把常数项移到等号的右边，再把等式两边同时加上一次项系数一半的平方，即可得答案.

【详解】解： $x^2 + 6x + 12 = 0$ ，

移项得： $x^2 + 6x = -12$ ，

配方得： $x^2 + 6x + 3^2 = -12 + 3^2$ ，即 $(x+3)^2 = -3$.

故选：C.

5. 下列命题中，真命题的个数是（ ）

(1) 等角的补角相等；(2) 两边及其中一边的对角对应相等的三角形是全等三角形；(3) 一个角的两边与另一个角的两边分别平行，则这两个角相等；(4) 两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补；(5) 等腰

三角形，两腰上的高相等.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】

【分析】 主要考查命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而利用排除法得出答案.

【详解】 (1) 等角的补角相等，正确；

(2) SSA 无法证明全等，故错误；

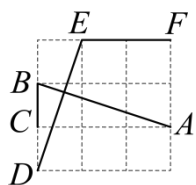
(3) 一个角的两边与另一个角的两边分别平行，则这两个角相等或互补，故错误；

(4) 两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补，故错误；

(5) 等腰三角形，两腰上的高相等，正确；

故选：A.

6. 如图，在 3×3 的正方形网格中，每个小正方形的边长都为 1，则 $\angle ABC$ 和 $\angle DEF$ 的关系为 ()



A. $\angle ABC = \angle DEF$

B. $\angle DEF = 2\angle ABC$

C. $\angle ABC + 90^\circ = \angle DEF$

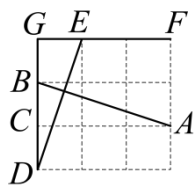
D. $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定与性质，解答本题的关键是判断出 $\triangle ACB \cong \triangle DGE$. 根据 SAS 可证得 $\triangle ACB \cong \triangle DGE$ ，可得出 $\angle ABC = \angle DEG$ ，继而可得出答案.

【详解】 解：如图，



由题意得： $AC = DG$ ， $BC = GE$ ， $\angle ACB = \angle DGE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle DGE$ (SAS)，

$\therefore \angle ABC = \angle DEG$ ，

$$\therefore \angle DEG + \angle DEF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DEF = 180^\circ.$$

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

7. 写出 $\sqrt{a-2b}$ 的一个有理化因式_____

【答案】 $\sqrt{a-2b}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a$ 解答即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a-2b} \times \sqrt{a-2b} = (\sqrt{a-2b})^2 = a-2b,$

$$\therefore \sqrt{a-2b} \text{ 的一个有理化因式是 } \sqrt{a-2b},$$

故答案为： $\sqrt{a-2b}$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质，熟知 $(\sqrt{a})^2 = a$ 是解答的关键.

8. 方程 $3x^2 = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 移项后分解因式得出 $x(3x-1) = 0$ ，推出方程 $x=0$ ， $3x-1=0$ ，求出方程的解即可.

【详解】 解： $3x^2 - x = 0,$

$$x(3x-1) = 0,$$

$$x=0, \quad 3x-1=0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}.$$

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法，解此题的关键是把一元二次方程转化成一元一次方程.

9. 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ 成立的条件是_____

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】利用公式 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 成立的条件 ($a \geq 0, b > 0$) 列出不等式即可.

【详解】由题意可得:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x > 1 \end{cases}$

故答案为 $x > 1$

【点睛】此题考查的是二次根式的公式 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 成立条件: $a \geq 0, b > 0$.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + m = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 3$

【解析】

【分析】此题考查了根的判别式, 根据根的情况确定参数 n 的范围, 解题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 当方程有两个不相等的实数根时, $\Delta > 0$; 当方程有两个相等的实数根时, $\Delta = 0$; 当方程没有实数根时, $\Delta < 0$.

【详解】解: $\because$ 方程 $x^2 + 2x + n - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4m = 12 - 4m > 0,$$

解得: $m < 3$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $m < 3$,

故答案为: $m < 3$.

11. 已知 $x^2 + 4x - 2 = 0$, 那么 $\frac{3}{2}x^2 + 6x - 8 =$ _____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】本题考查了代数式求值. 整体代入是解题的关键.

由 $x^2 + 4x - 2 = 0$, 可得 $x^2 + 4x = 2$, 根据 $\frac{3}{2}x^2 + 6x - 8 = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 8$, 代值求解即可.

【详解】解: $\because x^2 + 4x - 2 = 0$,

$$\therefore x^2 + 4x = 2,$$

$$\therefore \frac{3}{2}x^2 + 6x - 8 = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 8 = \frac{3}{2} \times 2 - 8 = -5,$$

故答案为: -5 .

12. 若 x 、 y 为实数, 且 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4) = 21$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 根据换元法, 先设 $x^2 + y^2 = t \geq 0$, 可得一元二次方程 $t(t+4) = 21$, 然后解一元二次方程并检验即可求解, 掌握解一元二次方程是解题的关键.

【详解】 解: 设 $x^2 + y^2 = t \geq 0$,

$$\therefore t(t+4) = 21,$$

$$\therefore t^2 + 4t - 21 = 0,$$

解得: $t_1 = -7$ (舍去), $t_2 = 3$,

$$\therefore x^2 + y^2 = 3,$$

故答案为: 3.

13. 二次三项式 $x^2 + ax + 12$ 是一个完全平方式, 那么 a 的值是_____.

【答案】 $\pm 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式, 平方根. 熟练掌握完全平方公式, 平方根是解题的关键.

根据 $x^2 + ax + 12 = (x \pm 2\sqrt{3})^2$, 求解作答即可.

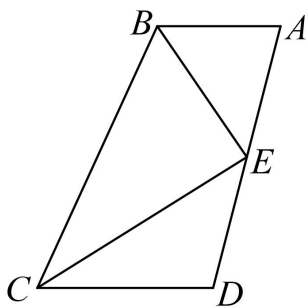
【详解】 解: $\because$ 二次三项式 $x^2 + ax + 12$ 是一个完全平方式,

$$\therefore x^2 + ax + 12 = (x \pm 2\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore a = \pm 4\sqrt{3},$$

故答案为: $\pm 4\sqrt{3}$.

14. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, BE 平分 $\angle ABC$, 点 E 为 AD 中点, 如果 $AB = 3$, $BC = 7$, 那么 $CD =$ _____.

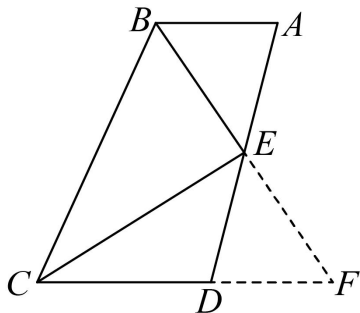


【答案】4

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质和判定，平行线的性质，等角对等边，延长 CD ， BE 交于点 F ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle DFE$ (ASA) 可得 $AB = DF$ ，然后根据平行线的性质和等角对等边得到 $BC = FC = CD + DF = CD + AB$ 。

【详解】 解：如图，延长 CD ， BE 交于点 F ，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAE = \angle ADF$, $\angle ABE = \angle EFD$,

$\because$ 点 E 为 AD 中点,

$\therefore AE = DE$,

又 $\because \angle BEA = \angle FED$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DFE$ (ASA),

$\therefore AB = DF$,

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore \angle CBE = \angle F$,

$\therefore BC = FC = CD + DF = CD + AB$,

$\therefore CD = BC - AB$,

$\because AB = 3$, $BC = 7$,

$$\therefore CD = 7 - 3 = 4.$$

故答案为：4.

15. 请将“等角的补角相等”请改写成“如果，那么”的形式_____.

【答案】如果两个角是等角的补角，那么这两个角相等

【解析】

【分析】本题考查了命题的改写，根据题意，找出题设和结论，运用命题的结果进行改写即可求解，掌握命题的组成元素是解题的关键.

【详解】解：等角的补角相等，题设是：等角的补角，结论是：补角相等，

$\therefore$ 改写的形式为：如果两个角是等角的补角，那么这两个角相等，

故答案为：如果两个角是等角的补角，那么这两个角相等.

16. 若 $b = 3a + \frac{1}{3}c$ ，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有一个实数根是_____.

【答案】-3

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，把 $b = 3a + \frac{1}{3}c$ 代入方程得 $ax^2 + \left(3a + \frac{1}{3}c\right)x + c = 0$ ，最后用因式分解法解一元二次方程即可，灵活运用因式分解法解一元二次方程是解题的关键.

【详解】解：把 $b = 3a + \frac{1}{3}c$ 代入方程得 $ax^2 + \left(3a + \frac{1}{3}c\right)x + c = 0$ ，

整理得： $3ax^2 + (9a + c)x + 3c = 0$ ，

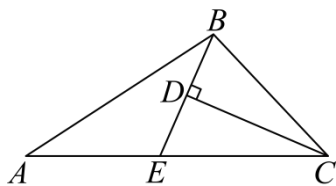
$$\therefore (3ax + c)(x + 3) = 0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{c}{3a}, \quad x_2 = -3,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有一个实数根是 -3，

故答案为：-3.

17. 如图， D 为 $\triangle ABC$ 内一点， CD 平分 $\angle ACB$ ， $BE \perp CD$ ，垂足为 D ，交 AC 于点 E ， $\angle A = \angle ABE$. 若 $AC = 7$ ， $BC = 4$ ，则 BD 长为_____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线，全等三角形的判定与性质，等角对等边．熟练掌握角平分线，全等三角形的判定与性质，等角对等边是解题的关键．

证明 $\triangle BDC \cong \triangle EDC$ (ASA)，则 $BC = EC = 4$ ， $BD = ED = \frac{1}{2}BE$ ，由 $\angle A = \angle ABE$ ，可得 $BE = AE = AC - EC$ ，进而可求 BD ．

【详解】 解： $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle ECD$ ，

又 $\because \angle BDC = 90^\circ = \angle EDC$ ， $CD = CD$ ，

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle EDC$ (ASA)，

$\therefore BC = EC = 4$ ， $BD = ED = \frac{1}{2}BE$ ，

$\because \angle A = \angle ABE$ ，

$\therefore BE = AE = AC - EC = 3$ ，

$\therefore BD = \frac{3}{2}$ ，

故答案为： $\frac{3}{2}$ ．

18. 阅读材料：一般地，我们把被开方数中含有二次根式的二次根式称为复合二次根式，例如：

$\sqrt{\sqrt{3}}$ ， $\sqrt{6-\sqrt{3}}$ ， $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ 等都是复合二次根式．其中有一些特殊的复合二次根式可以进行化简，例如：

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} = \sqrt{1^2+2 \times 1 \times \sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}.$$

请利用上述运算法则化简： $\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}$ = _____.

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了利用完全平方公式进行因式分解，利用二次根式的性质进行化简等知识．熟练掌握利用完全平方公式进行因式分解，利用二次根式的性质进行化简是解题的关键．

由题意知， $\sqrt{21+4\sqrt{5}} = \sqrt{(1+2\sqrt{5})^2} = 1+2\sqrt{5}$ ，则

$$\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} = \sqrt{7-(1+2\sqrt{5})} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}，\text{求解作答即可}.$$

【详解】 解：由题意知， $\sqrt{21+4\sqrt{5}} = \sqrt{(1+2\sqrt{5})^2} = 1+2\sqrt{5}$ ，

$$\therefore \sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} = \sqrt{7-(1+2\sqrt{5})} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1,$$

故答案为: $\sqrt{5}-1$.

三、计算题 (本大题共 6 大题, 共 24 分)

19. 计算: $\frac{2}{\sqrt{2}+1} + (\sqrt{3}-\sqrt{6})\sqrt{3} + \sqrt{8}$.

【答案】 $\sqrt{2}+1$.

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的混合运算, 先分母有理化, 二次根式的乘法, 二次根式性质化简计算, 最后合并即可, 熟知二次根式混合运算的法则是解题的关键.

【详解】 解: 原式 = $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$$= 2\sqrt{2} - 2 + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} + 1.$$

20. 计算: $2\sqrt{12a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a}{4}} + a\sqrt{\frac{3}{a}}$.

【答案】 $\frac{14}{3}\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减计算, 先化简二次根式, 再根据二次根式的加减计算法则求解即可.

【详解】 解: 原式 = $4\sqrt{3a} - \frac{1}{3}\sqrt{3a} + \sqrt{3a}$

$$= \frac{14}{3}\sqrt{3a}.$$

21. 解方程:

(1) $2(x-1)^2 - \frac{3}{2} = 0;$

(2) $x^2 + 2x - 5 = 0;$

(3) $5x(x-2) = 3(x-2);$

(4) $(x+8)(x+1) = -8.$

【答案】 (1) $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $x_1 = -1 + \sqrt{6}$, $x_2 = -1 - \sqrt{6}$

(3) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = 2$

(4) $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 利用直接开平方法解一元二次方程即可；

(2) 利用配方法解一元二次方程即可；

(3) 利用因式分解法解一元二次方程即可；

(4) 利用公式法解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

解: $2(x-1)^2 - \frac{3}{2} = 0$,

$$(x-1)^2 = \frac{3}{4},$$

$$x-1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得, $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $x^2 + 2x - 5 = 0$,

$$x^2 + 2x + 1 = 6,$$

$$(x+1)^2 = 6,$$

$$x+1 = \pm \sqrt{6},$$

解得, $x_1 = -1 + \sqrt{6}$, $x_2 = -1 - \sqrt{6}$;

【小问 3 详解】

解: $5x(x-2) = 3(x-2)$,

$$(5x-3)(x-2) = 0,$$

$$5x-3=0, \quad x-2=0,$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{3}{5}, \quad x_2 = 2;$$

【小问4详解】

$$\text{解: } (x+8)(x+1) = -8,$$

$$x^2 + 9x + 8 = -8,$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0,$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 16 = 17,$$

$$\therefore x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了直接开平方法、配方法、因式分解法、公式法解一元二次方程. 熟练掌握直接开平方法、配方法、因式分解法、公式法解一元二次方程是解题的关键.

四、解答题 (本大题共5大题, 共42分)

22. 已知实数 a 、 b 使等式 $(\sqrt{2a}-1)^2 + |b-2| = 0$ 成立, 请化简代数式 $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + 1 \div \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}}$, 并求代数式的值.

$$\text{【答案】 } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b}; \quad \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了非负数的性质, 二次根式的混合运算, 根据二次根式被开方数的非负性可得 a 、 b 的值, 将所求式子化简后代入 a 、 b 的值进行计算即可.

$$\text{【详解】 解: } \because (\sqrt{2a}-1)^2 + |b-2| = 0$$

$$\therefore \sqrt{2a}-1=0 \text{ 且 } b-2=0,$$

$$\therefore \sqrt{2a}=1, b=2,$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}, b=2,$$

$$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + 1 \div \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{\sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+1)} \\
&= \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\
&= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b}
\end{aligned}$$

当 $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \times 2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{2}+1}{2}
\end{aligned}$$

23. 若 m 非负整数, 且关于 x 的方程 $(1-m)x^2 + 2(2-m)x - (1+m) = 0$ 有两个实数根, 求 m 的值和这时方程的根.

【答案】 $m = 0$, 方程的根为 $x_1 = -2 + \sqrt{5}, x_2 = -2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义以及判别式的意义, 得出 $\Delta \geq 0$ 且 $1-m \neq 0$, 解出关于 m 的不等式组, 即可求得 m 的值, 然后把 m 的值代入原方程, 得出 $x^2 + 4x - 1 = 0$, 解出即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $(1-m)x^2 + 2(2-m)x - (1+m) = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore 1-m \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac = [2(2-m)]^2 - 4(1-m) \times [-(1+m)] = 20 - 16m \geq 0$$

解得: $m \leq \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$

$\therefore m$ 非负整数,

$\therefore m = 0$

$$\therefore \text{原方程为 } x^2 + 4x - 1 = 0$$

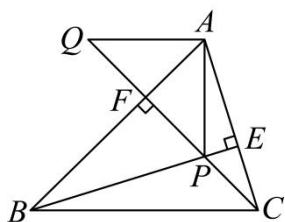
$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 5$$

$$\therefore (x+2)^2 = 5$$

$$\therefore x+2 = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{解得: } x_1 = -2 + \sqrt{5}, x_2 = -2 - \sqrt{5}$$

24. 已知: $\triangle ABC$ 中, BE , CF 是 $\triangle ABC$ 的高, BE , CF 相交于点 P , 延长 CF 至点 Q , 使 $AB = CQ$, 连接 AP 、 AQ , 如果 $BP = AC$, 求证: $AP \perp AQ$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质和判定, 垂直定义, 三角形内角和定理的应用, 解此题的关键是推出 $\triangle APB \cong \triangle QAC$, 注意: 全等三角形的判定定理有 SAS, ASA, AAS, SSS, 全等三角形的对应边相等, 对应角相等. 先证明 $\triangle APB \cong \triangle QAC$, 得 $\angle BAP = \angle CQA$, 通过等量代换得 $\angle BAP + \angle QAF = 90^\circ$ 即可得 $AP \perp AQ$.

【详解】证明: $\because CF \perp AB$, $BE \perp AC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACQ = 90^\circ - \angle BAC.$$

$$\because BP = AC, CQ = AB,$$

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle QAC$ 中,

$$\begin{cases} BP = AC \\ \angle ABE = \angle ACQ, \\ CQ = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle QAC (\text{SAS}).$$

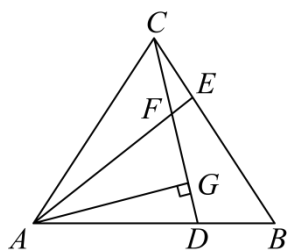
$$\therefore \angle BAP = \angle CQA, AP = AQ,$$

$$\therefore \angle CQA + \angle QAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle QAF = 90^\circ.$$

即 $AP \perp AQ$.

25. 如图, 等边三角形 ABC 中, D 、 E 分别为 AB 、 BC 边上的两动点, AE 与 CD 交于点 F , $AG \perp CD$ 于点 G , 若 $AD = BE$, 求 $\angle FAG$ 的大小.



【答案】 30°

【解析】

【分析】 证明 $\triangle CAD \cong \triangle ABE$ (SAS), 则 $\angle ACD = \angle BAE$, $\angle ACD + \angle CAF = \angle BAE + \angle CAF = 60^\circ$, $\angle AFG = \angle ACD + \angle CAF = 60^\circ$, 根据 $\angle FAG = 180^\circ - \angle AGF - \angle AFG$, 计算求解即可.

【详解】 解: $\because$ 等边三角形 ABC ,

$$\therefore AC = BA, \angle ABC = \angle ACB = \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\because AC = BA, \angle CAD = \angle ABE, AD = BE,$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle ABE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CAF = \angle BAE + \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ACD + \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAG = 180^\circ - \angle AGF - \angle AFG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FAG \text{ 的大小为 } 30^\circ.$$

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 三角形外角的性质, 三角形内角和定理. 熟练掌握等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 三角形外角的性质, 三角形内角和定理是解题的关键.

26. 将一副三角板中的两块直角三角尺的直角顶点 C 按如图 1 方式叠放在一起, 其中

$$\angle A = 60^\circ, \angle D = 30^\circ, \angle E = \angle B = 45^\circ.$$

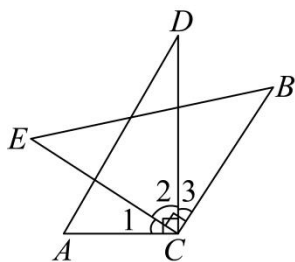


图1

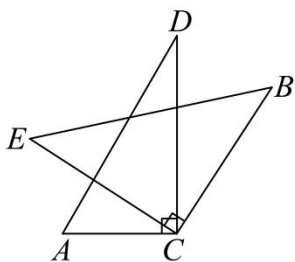


图2

(1) 填空: $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的数量关系_____; 理由是_____;

(2) 直接写出 $\angle 2$ 与 $\angle ACB$ 的数量关系_____;

(3) 如图 2, 当点 E 在直线 AC 的上方时, 将三角尺 ACD 固定不动, 改变三角尺 BCE 的位置, 但始终保持两个三角尺的顶点 C 重合; 探究一下问题:

①当 $BE \parallel AD$ 时, 画出图形, 并求出 $\angle ACE$ 的度数;

②这两块三角尺是否仍存在一组边互相平行? 请直接写出此时 $\angle ACE$ 角度所有可能的值并画出对应的图形.

【答案】 (1) $\angle 1 = \angle 3$, 同角的余角相等

(2) $\angle 2 + \angle ACB = 180^\circ$

(3) ①图见解析, 165° ; ②存在, 图见解析, $\angle ACE$ 的度数为 30° 或 45° 或 120° 或 135°

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的判定与性质, 几何图形中的角度计算, 余角的性质. 数形结合并分类讨论是解题的关键.

(1) 由题意知, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ = \angle 2 + \angle 3$, 则 $\angle 1 = \angle 3$, 然后作答即可;

(2) 由题意知, $\angle ACB = \angle 1 + 90^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, 则 $\angle 2 + \angle ACB = \angle 2 + \angle 1 + 90^\circ = 180^\circ$, 然后作答即可;

(3) ①当 $BE \parallel AD$ 时, 如图 1, 作 $CF \parallel AD$, 则 $CF \parallel BE$, $\angle DCF = \angle D = 30^\circ$, $\angle ECF = \angle E = 45^\circ$, 根据 $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCF + \angle ECF$, 求解作答即可; ②由题意知, 分 $BC \parallel AD$, $BE \parallel AC$, $AD \parallel CE$, $BE \parallel CD$ 四种情况求解作答即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意知, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ = \angle 2 + \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

故答案为: $\angle 1 = \angle 3$, 同角的余角相等;

【小问 2 详解】

解: 由题意知, $\angle ACB = \angle 1 + 90^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 2 + \angle ACB = \angle 2 + \angle 1 + 90^\circ = 180^\circ,$$

故答案为: $\angle 2 + \angle ACB = 180^\circ$;

【小问3 详解】

①解: 当 $BE \parallel AD$ 时, 如图 1, 作 $CF \parallel AD$,

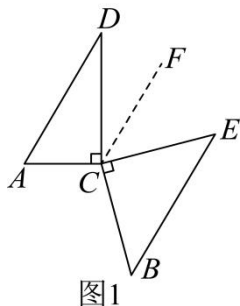


图1

$$\therefore CF \parallel BE,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle D = 30^\circ, \quad \angle ECF = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACD + \angle DCF + \angle ECF = 165^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE \text{ 的度数为 } 165^\circ;$$

②解: 由题意知, 分 $BC \parallel AD$, $BE \parallel AC$, $AD \parallel CE$, $BE \parallel CD$ 四种情况求解;

当 $BC \parallel AD$ 时, 如图 2,

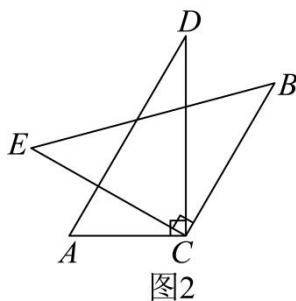


图2

$$\therefore \angle DCB = \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACD - \angle ECD = 30^\circ;$$

当 $BE \parallel AC$ 时, 如图 3,

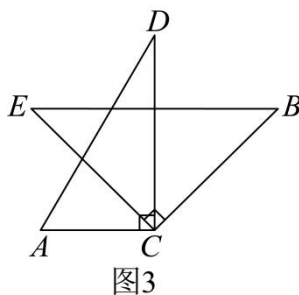
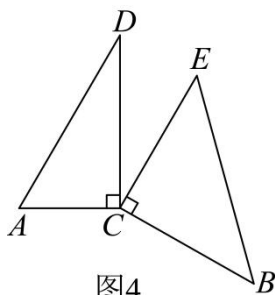


图3

$$\therefore \angle ACE = \angle E = 45^\circ;$$

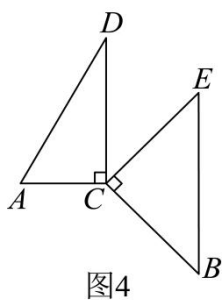
当 $AD \parallel CE$ 时, 如图 4,



$$\therefore \angle DCE = \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 120^\circ;$$

当 $BE \parallel CD$ 时, 如图 5,



$$\therefore \angle DCE = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 135^\circ;$$

综上所述, 存在, $\angle ACE$ 的度数为 30° 或 45° 或 120° 或 135° .