

2024 学年第一学期八年级数学学科

第二阶段质量调研试卷

(时间 90 分钟, 满分 200 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 二次根式 $\sqrt{ab^3}$ 、 $\sqrt{a^2+1}$ 、 $\sqrt{\frac{b}{5}}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 中最简二次根式有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义判断即可.

【详解】解: $\sqrt{ab^3} = b\sqrt{ab}$ 、 $\sqrt{\frac{b}{5}} = \frac{\sqrt{5b}}{5}$,

即最简二次根式有 $\sqrt{a^2+1}$ 和 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 共 2 个,

故选 B.

【点睛】本题考查的是最简二次根式的有关知识, 最简二次根式必须满足两个条件: ①被开方数不含分母; ②被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

2. 下列二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$

D. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{8a}$

【答案】C

【解析】

【详解】解: 选项 A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$, 显然不是,

选项 B. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 不是,

选项 C. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, C 正确,

选项 D. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 不是,

故选：C.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 - 3x + m^2 = 9$ 的常数项为 0, 则 m 的值为 ()

A. 3

B. 0

C. -3

D. ± 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可知 $m^2 = 9$, 求得 $m = \pm 3$, 再根据一元二次方程中二次项系数不为零即可完成.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 - 3x + m^2 = 9$ 的常数项为 0

$\therefore m^2 = 9$, 则 $m = \pm 3$

$\because m-3 \neq 0$ 即 $m \neq 3$

$\therefore m = -3$

故选 C

【点睛】本题考查一元二次方程中二次项系数不为零的运用, 熟练掌握一元二次方程相关知识点是解题关键.

4. 下列二次三项式在实数范围内不能因式分解的是 ()

A. $4x^2 + x - 11$

B. $3y^2 + 7y + 3$

C. $x^2 - 2x - 4$

D. $2x^2 - 4x + 5$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的根的判别式的应用. 判断二次三项式能否在实数范围内分解因式的方法: 把二次三项式看成方程的形式, 可以在实数范围内分解, 即方程有实根, 即 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. 若二次三项式可以在实数范围内分解, 则二次三项式等于 0 时, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 计算各选项中的 Δ 值, 根据 Δ 的符号判断即可.

【详解】解: A、 $4x^2 + x - 11 = 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 4 \times (-11) = 177 > 0$,

$\therefore$ 方程 $4x^2 + x - 11 = 0$ 有实数解,

$\therefore$ 在实数范围内 $4x^2 + x - 11$ 能因式分解, 故本选项不符合题意;

B、 $3y^2 + 7y + 3 = 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 3 \times 3 = 11 > 0$,

$\therefore$ 方程 $3y^2 + 7y + 3 = 0$ 有实数解,

$\therefore$ 在实数范围内 $3y^2 + 7y + 3$ 能因式分解, 故本选项不符合题意;

C、 $x^2 - 2x - 4 = 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20 > 0$,

$\therefore$ 方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 有实数解,

$\therefore$ 在实数范围内 $x^2 - 2x - 4$ 能因式分解, 故本选项不符合题意;

D、 $2x^2 - 4x + 5 = 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -24 < 0$,

$\therefore$ 方程 $2x^2 - 4x + 5 = 0$ 没有实数解,

在实数范围内 $2x^2 - 4x + 5$ 不能因式分解, 故本选项符合题意;

故选: D.

5. 下列命题中是真命题的是 ()

- A. 有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形全等
- B. 两条平行直线被第三条直线所截, 则一组同旁内角的平分线互相垂直
- C. 三角形的一个外角等于两个内角的和
- D. 等边三角形既是中心对称图形, 又是轴对称图形

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用全等三角形的判定方法对 A 进行判断; 根据平行线的性质和角平分线的定义对 B 进行判断; 根据三角形外角性质对 C 进行判断; 根据等边三角形的性质和中心对称的定义对 D 进行判断.

【详解】 解: A、有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等, 所以 A 选项为假命题;

B、两条平行直线被第三条直线所截, 则一组同旁内角的平分线互相垂直两直线平行, 所以 B 选项为真命题;

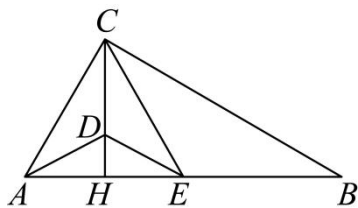
C、三角形的一个外角等于不相邻的两个内角的和, 所以 C 选项为假命题;

D 、等边三角形不是中心对称图形，是轴对称图形，所以 D 选项为假命题。

故选 B 。

【点睛】本题考查了命题与定理：命题写成“如果…，那么…”的形式，这时，“如果”后面接的部分是题设，“那么”后面接的部分是结论。命题的“真”“假”是就命题的内容而言。任何一个命题非真即假。要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可。

6. 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CH \perp AB$ ，垂足为点 H ， AD 平分 $\angle BAC$ ，与 CH 相交于点 D ，过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，与边 AB 相交于点 E ，那么下列结论中一定正确的是（ ）



A. $AD = DE$

B. $AC = EC$

C. $AD = CD$

D. $CD = DE$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，平行线的性质，角平分线的定义，三角形内角和定理，先导角证明 $\angle ABC = \angle ACD = \angle AED$ ，再证明 $\triangle ACD \cong \triangle AED$ (AAS)，可得 $CD = ED$ ，则 D 选项结论正确；根据现有条件无法证明 A、B、C 三个选项中的结论，据此可得答案。

【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AED = \angle ABC$ ，

$\because CH \perp AB$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BCH = 90^\circ$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD + \angle BCH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACD = \angle AED$ ，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle EAD$ ，

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle EAD \\ \angle ACD = \angle AED, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED$ (AAS),

$\therefore CD = ED$, 故 D 结论正确, 符合题意;

根据现有条件无法证明 A、B、C 中的结论,

故选: D.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 化简 $\sqrt{12a}$ 的结果是_____.

【答案】 $2\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简. 根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解: $\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}$,

故答案为: $2\sqrt{3a}$.

8. 如果 $\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 5$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件、分式有意义的条件. 根据二次根式有意义的条件、分式有意义的条件列出不等式, 解不等式得到答案.

【详解】 解: 由题意得, $x+3 \geq 0$, $x-5 \neq 0$,

解得, $x \geq -3$ 且 $x \neq 5$,

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 5$.

9. 写出 $\sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式_____.

【答案】 $\sqrt{2a-b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分母有理化的方法, 分母有理化常常是乘二次根式本身 (分母只有一项) 或与原分母组成平方差公式. 根据二次根式的性质, 求解即可.

【详解】解： $\because (\sqrt{2a-b}) \times (\sqrt{2a-b}) = 2a-b$,

$\therefore \sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{2a-b}$,

故答案为： $\sqrt{2a-b}$ (答案不唯一)

10. 在实数范围内因式分解： $3x^2 + 3xy - y^2 =$ _____.

【答案】 $3\left(x - \frac{-3y + \sqrt{21}y}{6}\right)\left(x - \frac{-3y - \sqrt{21}y}{6}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，解一元二次方程，把 y 看做常数，解关于 x 的一元二次方程 $3x^2 + 3xy - y^2 = 0$ ，求出方程的两个根即可得到答案.

【详解】解：当 $3x^2 + 3xy - y^2 = 0$ 时，

令 $a = 3$, $b = 3y$, $c = -y^2$,

$\therefore \Delta = 9y^2 + 12y^2 = 21y^2 \geq 0$,

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3y \pm \sqrt{21}y}{6},$

解得 $x = \frac{-3y + \sqrt{21}y}{6}$ 或 $x = \frac{-3y - \sqrt{21}y}{6}$,

$\therefore 3x^2 + 3xy - y^2 = 3\left(x - \frac{-3y + \sqrt{21}y}{6}\right)\left(x - \frac{-3y - \sqrt{21}y}{6}\right),$

故答案为： $3\left(x - \frac{-3y + \sqrt{21}y}{6}\right)\left(x - \frac{-3y - \sqrt{21}y}{6}\right).$

11. 方程 $x(x+3) = 4(x+3)$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = -3$, $x_2 = 4$

【解析】

【分析】 先移项，使方程右边为 0，再提公因式 $(x+3)$ ，然后根据“两式相乘值为 0，这两式中至少有一式值为 0”进行求解.

【详解】解：原方程可化为： $x(x+3) - 4(x+3) = 0$,

因式分解得: $(x+3)(x-4)=0$,

所以 $x+3=0$ 或 $x-4=0$,

解得: $x_1=-3$, $x_2=4$,

故答案为: $x_1=-3$, $x_2=4$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法, 要根据方程的特点灵活选用合适的方法. 本题运用的是因式分解法.

12. 不等式 $x < \sqrt{3}x + 4$ 的解是_____

【答案】 $x > -2 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用不等式的性质求不等式解集即可.

【详解】 $x < \sqrt{3}x + 4$

$$x - \sqrt{3}x < 4$$

$$(1 - \sqrt{3})x < 4$$

$$x > \frac{4}{1 - \sqrt{3}}$$

$$x > -2 - 2\sqrt{3}$$

【点睛】 本题考查求一元一次不等式的解集, 还涉及无理数的比较大小, 熟练掌握各个知识点是解题关键.

13. 写出一个一元二次方程, 使它的一个根为 1, 另一个根为 $-\frac{1}{3}$, 这个方程的一般式是_____.

【答案】 $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的一般形式, 一元二次方程的解, 先得出一元二次方程的一个根为 1, 另一个根为 $-\frac{1}{3}$ 得出关于 x 的方程, 再化为一般式即可.

【详解】 解: $\because$ 一元二次方程的一个根为 1, 另一个根为 $-\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 该方程可以为 $(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$, 即 $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

故答案为: $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ (答案不唯一).

14. 某服装经过两次降价后的售价为 a 元, 如果连续两次以同样的百分率 x 降价, 该服装的原价为 _____ 元. (用含 a 和 x 的代数式表示)

【答案】 $\frac{a}{(1-x)^2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用. 设该服装的原价为 b 元, 利用代数式先表示出第一次降价后的价格, 再在第一次的基础上表示出第二次降价后的价格, 整理后即可得出结论.

【详解】 解: 设该服装的原价为 b 元,

第一次降价后的价格为: $b(1-x)$ 元,

则第二次降价后的价格为: $b(1-x)(1-x) = b(1-x)^2$ 元,

根据题意得 $b(1-x)^2 = a$,

$$\therefore b = \frac{a}{(1-x)^2},$$

故答案为: $\frac{a}{(1-x)^2}$.

15. 定理“等腰三角形的两腰相等”的逆命题_____.

【答案】 有两边相等的三角形是等腰三角形

【解析】

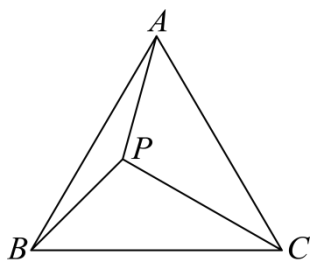
【分析】 先找到原命题的题设和结论, 再将题设和结论互换, 即可而得到原命题的逆命题.

【详解】 解: 命题“等腰三角形的两腰相等”的逆命题是: 两边相等的三角形是等腰三角形.

故答案为两边相等的三角形是等腰三角形.

【点睛】 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件, 那么这两个命题叫做互逆命题, 其中一个命题叫做原命题, 另外一个命题叫做原命题的逆命题.

16. 如图, P 为等边 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $PA = PB$, 若 $\angle PAB = 15^\circ$, 则 $\angle BPC =$ _____ 度.



【答案】 105°

【解析】

【分析】由等边三角形性质和已知可证明 $\triangle BPC \cong \triangle APC$ ，可得 $\angle BCP = \angle ACP = 30^\circ$ ，由 $\angle PAB = 15^\circ$ 可得 $\angle PBC = 45^\circ$ ，根据三角形内角和可得 $\angle BPC$ 的度数.

【详解】解：在等边三角形中， $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$ ， $AC = BC$ ，

又 $\because PA = PB$ ， $\angle PAB = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle PBC = \angle PAC = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle BPC \cong \triangle APC$ (SAS)，

$\therefore \angle BCP = \angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 105^\circ$

故答案为 105° .

【点睛】本题主要考查等边三角形性质、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

17. 定义：若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根，我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$ ，所以这两个方程为“同伴方程”. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的参数同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$ ，且该方程与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，则 $n =$ _____.

【答案】 1或-1##-1或1

【解析】

【分析】依题意 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的两根为 $x_1 = 1, x_2 = -1$ ，结合题意，通过求解方程

$(x+2)(x-n) = 0$ ，即可得到答案；

【详解】解：∵关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$,

∴方程的两根为 $x_1 = 1, x_2 = -1$,

∴ $(x + 2)(x - n) = 0$,

∴ $x_1 = -2, x_2 = n$,

∴ $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与 $(x + 2)(x - n) = 0$ 互为“同伴方程”，

∴ $n = 1$ 或 -1 .

故答案为：1 或 -1.

【点睛】本题考查了因式分解法解一元二次方程，一元二次方程方程的解的定义，求得

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 是解题的关键.

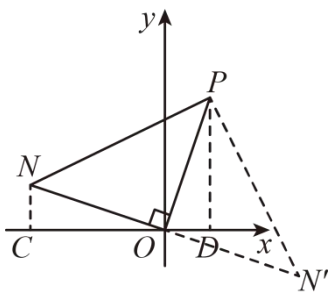
18. 在直角坐标系 xOy 中，点 $P(1, 3)$ ， $\triangle OPN$ 是以 OP 为直角边的等腰直角三角形，那么点 N 的坐标为 _____.

【答案】 $(-3, 1)$ 或 $(3, -1)$ 或 $(-2, 4)$ 或 $(4, -2)$

【解析】

【分析】本题考查了坐标与图形，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质. 分①当 $\angle PON = 90^\circ$ ，②当 $\angle OPN = 90^\circ$ ，利用全等三角形的判定和性质以及坐标与图形的性质求解即可.

【详解】解：①当 $\angle PON = 90^\circ$ ，且点 N 在第二象限时，过点 P, N 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C, D ，如图，



∴ $PO = NO$ ，点 $P(1, 3)$ ，

∴ $\angle NOC = 90^\circ - \angle POD = \angle OPD$ ，

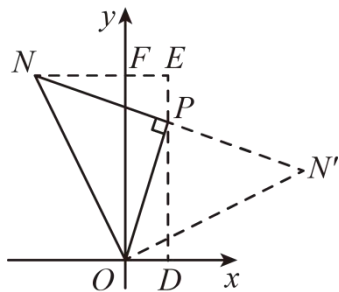
∴ $\triangle POD \cong \triangle ONC$ ，

∴ $NC = OD = 1$ ， $OC = PD = 3$ ，

∴点 N 的坐标为 $(-3, 1)$ ；

若点 N 在第四象限时, 同理 $(3, -1)$;

②当 $\angle OPN = 90^\circ$, 且点 N 在第二象限时, 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 作 $NE \perp y$ 轴于点 F , 交直线 PD 于点 E ,



$\because PO = PN$, 点 P 的坐标为 $(1, 3)$,

同理可证 $\triangle POD \cong \triangle NPE$,

$\therefore PE = OD = 1, NE = PD = 3$,

$\therefore NF = NE - EF = NE - OD = 2, OF = ED = PE + PD = 4$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-2, 4)$;

当点 N 在第四象限时, 点 N 的坐标为 $(4, -2)$;

综上, 点 N 的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(3, -1)$ 或 $(-2, 4)$ 或 $(4, -2)$.

故答案为: $(-3, 1)$ 或 $(3, -1)$ 或 $(-2, 4)$ 或 $(4, -2)$.

三、简答题 (每题 5 分, 共 25 分)

19. 计算: $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{10} + \sqrt{45} + \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2-\sqrt{5}}$.

【答案】 $\frac{33}{2}\sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可求解.

【详解】 解: $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{10} + \sqrt{45} + \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2-\sqrt{5}}$

$$= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$$

$$= 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 + \sqrt{5}$$

$$= \frac{33}{2}\sqrt{5} + 2.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

20. 计算: $\frac{2}{m}\sqrt{m^2n} \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{mn^2}\right) \div \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \quad (m > 0).$

【答案】 $9n^2$

【解析】

【分析】 先把除法转换为乘法，再分别计算系数和被开方数，最后化简即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \frac{2}{m}\sqrt{m^2n} \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{mn^2}\right) \div \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \\ &= \frac{2}{m}\sqrt{m^2n} \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{mn^2}\right) \times \left(3\sqrt{\frac{n}{m}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{m} \times \frac{3}{2} \times 3\right) \sqrt{m^2n \times mn^2 \times \frac{n}{m}} \\ &= \frac{9}{m} \sqrt{m^2n^4} \\ &= \frac{9}{m} \times mn^2 \\ &= 9n^2 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除混合运算，熟练掌握乘法法则是解答本题的关键. 二次根式相乘，把系数相乘作为积的系数，被开方数相乘，并化为最简二次根式.

21. 解方程: $2(x-1)^2 + 3(1-x) = 0$

【答案】 $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程. 利用因式分解法求解.

【详解】 解: $2(x-1)^2 + 3(1-x) = 0,$

因式分解得 $(x-1)[2(x-1)-3] = 0,$

$\therefore x-1=0$ 或 $2x-5=0,$

$\therefore x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$

22. 用配方法解方程: $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3 = 0$

【答案】 $x_1 = 2 + \sqrt{10}, x_2 = 2 - \sqrt{10}$

【解析】

【分析】 根据配方法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}(x^2 - 4x) - 3 = 0$

得 $\frac{1}{2}(x-2)^2 = 5$

故 $x-2 = \pm\sqrt{10}$

$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{10}, x_2 = 2 - \sqrt{10}$

23. 先化简, 再求值: $\frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2+1-2x}}{x^2-x}$, 其中 $x = \frac{1}{2\sqrt{6}+5}$.

【答案】 $x-1-\frac{1}{x}, -4\sqrt{6}-1$

【解析】

【分析】 根据分式的加法, 先化简分式, 再代入求值即可.

【详解】 解: $x = \frac{1}{2\sqrt{6}+5} < 1$,

$\therefore x-1 < 0$,

$$\sqrt{\frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2+1-2x}}{x^2-x}}$$

$$= -(1-x) + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x(x-1)}$$

$$= x-1 + \frac{1-x}{x(x-1)}$$

$$= x-1 - \frac{1}{x},$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2\sqrt{6}+5}, \text{ 原式} = \frac{1}{2\sqrt{6}+5} - 1 - \left(2\sqrt{6}+5\right) = -4\sqrt{6}-1.$$

【点睛】 本题主要考查分式加法、分式化简、分母有理化及二次根式性质, 熟练掌握分式加法法则、二次根式性质、分母有理化是解题关键.

四、解答题 (24 题 6 分, 25 题 9 分: 4 分+5 分, 26 题 12 分: 2+5+5)

24. 某商店准备进一批季节性小家电, 单价 40 元. 经市场预测, 销售定价为 52 元时, 可售出 180 个, 定价每增加 1 元, 销售量净减少 10 个; 定价每减少 1 元, 销售量净增加 10 个. 因受库存的影响, 每批次进货个数不得超过 180 个, 商店若将准备获利 2000 元, 则应进货多少个? 定价为多少元?

【答案】100 个; 60 元

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解此题的关键.

【详解】解: 设每个商品的定价是 x 元,

由题意, 得 $(x-40)[180-10(x-52)]=2000$,

整理, 得 $x^2-110x+3000=0$,

解得 $x_1=50$, $x_2=60$.

当 $x=50$ 时, 进货 $180-10(50-52)=200$ 个 >180 个, 不符合题意, 舍去;

当 $x=60$ 时, 进货 $180-10(60-52)=100$ 个 <180 个, 符合题意.

答: 商店若将准备获利 2000 元, 该商品每个定价为 60 元时, 进货 100 个.

25. 已知: 如图 1 在等边三角形 ABC 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 的延长线上, 且 $BD=CE$, 联结 AE 、 CD .

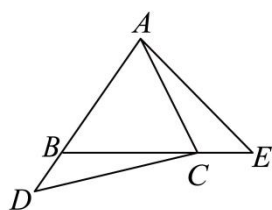


图1

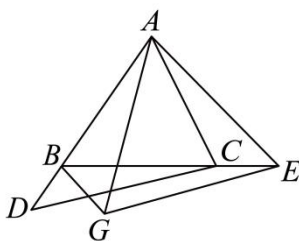


图2

(1) 求证: $CD=AE$;

(2) 如果将 $\triangle CBD$ 绕着点 B 逆时针旋转 60° (如图 2), 此时点 C 与点 A 重合, 点 D 落在点 G 处, 联结 AG 、 EG , 求证: $\triangle AEG$ 是等边三角形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查旋转的性质, 等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 熟练掌握旋转不变性

是解题的关键.

(1) 由等边三角形的性质知 $AC = BC$ 、 $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$ ，得出 $\angle 3 = \angle 4 = 120^\circ$ ，结合 $BD = CE$ 可证 $\triangle CBD \cong \triangle ACE$ (SAS) 可得结论；

(2) 由 $\triangle ABG \cong \triangle CBD$ 得 $AG = CD$ 、 $\angle 5 = \angle 6$ ，由 $\triangle CBD \cong \triangle ACE$ 得 $CD = AE$ 、 $\angle 5 = \angle 7$ ，据此知 $AG = AE$ 、 $\angle 6 = \angle 7$ ，由 $\angle 6 + \angle 8 = \angle 7 + \angle 8 = 60^\circ$ 可得答案.

【小问 1 详解】

证明：如图 1 中，

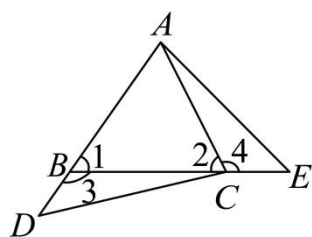


图1

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形 (已知),

$\therefore AB = AC = BC$, $\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC = 60^\circ$ (等边三角形的性质).

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (邻补角的意义),

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 120^\circ$ (等角的补角相等).

在 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} BD = CE \\ \angle 3 = \angle 4, \\ BC = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBD \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore CD = AE$;

【小问 2 详解】

解：如图 2 中，

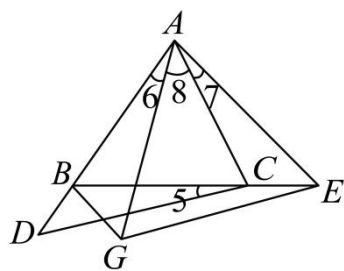


图2

$\because \triangle ABG$ 是 $\triangle CBD$ 绕着点 B 逆时针旋转 60° 得到的,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CBD$.

$\therefore AG = CD, \angle 5 = \angle 6$.

$\because \triangle CBD \cong \triangle ACE$,

$\therefore CD = AE, \angle 5 = \angle 7$.

$\therefore AG = AE, \angle 6 = \angle 7$,

$\therefore \triangle AED$ 是等腰三角形.

$\because \angle 6 + \angle 8 = 60^\circ$,

$\therefore \angle 7 + \angle 8 = 60^\circ$.

即 $\angle GAE = 60^\circ$.

$\therefore \triangle AEG$ 是等边三角形.

26. 倍长中线是初中数学一种重要的数学思想. 某同学在学习过程中, 遇到这样的一个问题: 如图 1: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, AC = 4$, 求 BC 边上的中线 AD 的取值范围, 经过和小组同学的探讨, 共同得到了这样的解决方法: 延长 AD 到点 E , 使 $DE = AD$. 请根据他们的方法解决以下问题:

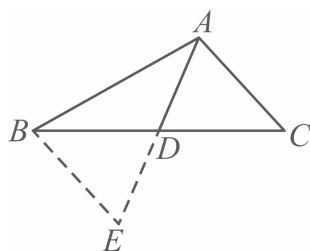


图1

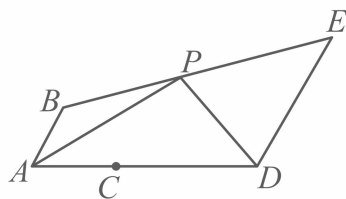


图2

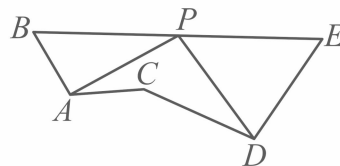


图3

(1) 求 AD 的取值范围: _____.

【问题解决】请利用上述方法 (倍长中线) 解决下列三个问题:

如图: 已知 $\angle BAC + \angle CDE = 180^\circ$, $AB = AC$, $DC = DE$, P 为 BE 的中点;

(2) 如图 2, 若 A, C, D 三点共线, $AC:CD = 3:5$, $S_{\triangle ABP} = 6$, 求 $S_{\text{四边形}ABED}$;

(3) 如图 3, 若 A, C, D 三点不共线, $AP = PD$, 求证: $AB \perp AC$.

【答案】(1) $1 < AD < 5$; (2) 32; (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 延长 AD 到点 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE , 利用全等三角形的判定与性质和三角形的三边关系定理解答即可;

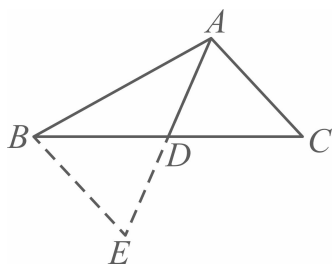
(2) 延长 DP 交 AB 延长线于点 F , 利用平行线的判定与性质和全等三角形的判定与性质得到: $BF = DE$,

$PD = PF$, $S_{\triangle PBF} = S_{\triangle PDE}$, 利用等高的三角形的面积比等于底的比的性质求得 $S_{\triangle BPF} = 10$, 则 $S_{\triangle APF} = 16$,

再利用 $S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF} = 2S_{\triangle APF}$ 解答即可;

(3) 延长 DP 至点 F , 使得 $PF = PD$, 连接 BF 、 AF 、 AD , 通过证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACD$ 和 $\triangle APF \cong \triangle APD$, 利用全等三角形的性质, 等腰直角三角形的性质解答即可得出结论.

【详解】(1) 解: 延长 AD 到点 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE , 如图,



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中,

$$\begin{cases} CD = BD \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ AE = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BE = 4,$$

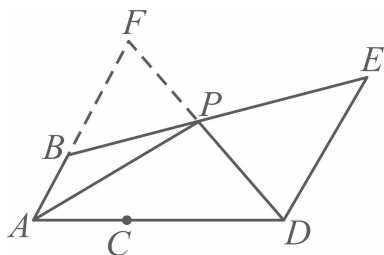
$$\because AB - BE < AE < AB + BE,$$

$$\therefore 6 - 4 < 2AD < 6 + 4,$$

$$\therefore 1 < AD < 5,$$

故答案为: $1 < AD < 5$;

(2) 解: 如图, 延长 DP 交 AB 延长线于点 F ,



$$\angle BAC + \angle CDE = 180^\circ,$$

$$\therefore AF \parallel DE \quad (\text{同旁内角互补, 两直线平行}),$$

$$\therefore \angle PFB = \angle PDE, \quad \angle PBF = \angle PED,$$

$$\because P \text{ 为 } BE \text{ 的中点},$$

$$\therefore BP = PE,$$

在 $\triangle BPF$ 和 $\triangle EPD$ 中,

$$\begin{cases} \angle PFB = \angle PDE \\ \angle PBF = \angle PED, \\ PB = PE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPF \cong \triangle EPD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = DE, \quad PD = PF, \quad S_{\triangle PBF} = S_{\triangle PDE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore DC = DE,$$

$$\therefore DC = BF,$$

$$\therefore AB = AC, \quad AC : CD = 3 : 5,$$

$$\therefore AB : BF = 3 : 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPF} = AB : BF = 3 : 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle BPF} = 10,$$

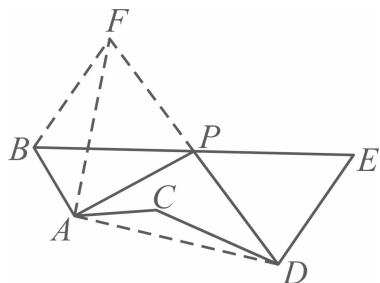
$$\text{则 } S_{\triangle APF} = 16,$$

$$\therefore PF = PD,$$

$$\therefore S_{\triangle ADP} = S_{\triangle AFP},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF} = 2S_{\triangle APF} = 32;$$

(3) 证明: 延长 DP 至点 F , 使得 $PF = PD$, 连接 BF 、 AF 、 AD , 如图,



由 (1) 同理易证: $\triangle DPE \cong \triangle FBP (\text{SAS}),$

$$\therefore BF = DE = CD, \quad \angle E = \angle FBP,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CDE = 180^\circ, \quad \text{且 } \angle ABP + \angle BAC + \angle CAD + \angle ADC + \angle CDE + \angle E = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP + \angle E + \angle CAD + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle CAD + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACD,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABF = \angle ACD, \\ BF = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = AD, \quad \angle BAF = \angle CAD,$$

在 $\triangle APF$ 和 $\triangle APD$ 中,

$$\begin{cases} AF = AD \\ AP = AP, \\ PF = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APF \cong \triangle APD (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle APD = \angle APF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = PD,$$

$$\therefore \angle PAD = 45^\circ,$$

同理可得, $\angle PAF = 45^\circ$,

$$\therefore \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp AC.$$

【点睛】 本题属于四边形综合题, 主要考查了三角形的中线的性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 等腰直角三角形的性质, 三角形的面积, 本题是阅读型题目, 掌握倍长中线的方法, 恰当的添加辅助线构造全等三角形是解题的关键.