

2024 学年第一学期八年级期中考试数学试题

(考试时间 90 分钟, 总分 100 分) 2024.11

考生注意: 答题时请将答案按要求在答题纸规定的位置上作答, 在本试卷上答题一律无效.

一、单选题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{xy^3}$ D. $\sqrt{x^2+9}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

根据最简二次根式的定义逐项判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式, 故该选项不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式, 故该选项不符合题意;

C. $\sqrt{xy^3} = |y|\sqrt{xy}$, $\sqrt{xy^3}$ 不是最简二次根式, 故该选项不符合题意;

D. $\sqrt{x^2+9}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

故选: D.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{48} \times \sqrt{3} = 12$
B. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{5}$
C. $\sqrt{(3.14 - \pi)^2} = 3.14 - \pi$
D. $\sqrt{6} \div (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的混合运算, 根据二次根式的乘法, 除法减法法则进行计算, 即可解答;

【详解】解: A、 $\sqrt{48} \times \sqrt{3} = \sqrt{144} = 12$, 选项 A 正确;

B、不是同类二次根式, 不能合并; 选项 B 不符合题意;

C、 $\sqrt{(3.14-\pi)^2} = \pi - 3.14$ ，选项 C 不符合题意；

D、 $\sqrt{6} \div (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{18} + \sqrt{12} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ ，选项 D 不符合题意；

故答案选 A.

3. 数轴上, 点 A 表示的数是 $-\sqrt{3}$, 将点 A 向右平移 3 个单位到达点 B, 点 B 表示的数为 m . 计算 $\sqrt{3}m - 2\sqrt{3}$, 结果是 ()

A. $-3 - \sqrt{3}$

B. $3 - \sqrt{3}$

C. $-3 + \sqrt{3}$

D. $-3 + 3\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据已知先把点 A 在数轴上向右平移 3 个单位到达点 B, 即为 $m = -\sqrt{3} + 3$, 然后把 m 的值代入即可求解.

【详解】 解: 根据题意可知: $m = -\sqrt{3} + 3$,

把 $m = -\sqrt{3} + 3$ 代入 $\sqrt{3}m - 2\sqrt{3}$ 得: $\sqrt{3} \times (-\sqrt{3} + 3) - 2\sqrt{3} = -3 + \sqrt{3}$,

故选: C.

【点睛】 本题考查实数与数轴, 解题的关键是将文字叙述转化为数学式子求出 m 的值.

4. 平行四边形的周长为 26cm, 两条邻边中较大的一条边长为 y cm, 较小的一条边长为 x cm, 则 y 与 x 之间的函数关系式是 ()

A. $y = 26 - x (0 < x < 6)$

B. $y = 26 - x (0 < x < 6.5)$

C. $y = 13 - x (0 < x < 6)$

D. $y = 13 - x (0 < x < 6.5)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了列函数关系式, 根据平行四边形的周长计算公式即可列出函数关系式, 再根据 x , y 的大小即可求得 x 的取值范围, 从而解题.

【详解】 解: 由题可得: $2(x + y) = 26$,

整理得 $y = 13 - x$,

∵ 两条邻边中较大的一条边长为 y cm, 较小的一条边长为 x cm,

$$\therefore 0 < x < \frac{26}{2} \text{ 即 } 0 < x < 6.5,$$

故选: D.

5. 电影《志愿军》不仅讲述了中国人民志愿军抗美援朝的故事, 更是通过鲜活生动的人物塑造, 让观众体会到历史事件背后的人性和情感, 一上映就获得全国人民的追捧. 某地第一天票房约 3 亿元, 若以后每天票房按相同的增长率增长, 三天后票房收入累计达 18 亿元, 若把增长率记作 x , 则方程可以列为 ()

A. $3(1+x)=18$

B. $3(1+x)^2=18$

C. $3+3(1+x)^2=18$

D. $3+3(1+x)+3(1+x)^2=18$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了增长率问题(一元二次方程的应用), 根据题意求出第二天和第三天的票房即可求解.

【详解】解: 由题意得: 第二天的票房为 $3(1+x)$ 亿元, 第三天的票房为 $3(1+x)^2$ 亿元,

$$\therefore 3+3(1+x)+3(1+x)^2=18$$

故选: D.

6. 新定义: 《 a , b , c 》为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (其中 $a \neq 0, a, b, c$ 为实数) 的“共同体数”, 如:

$x^2+2x-1=0$ 的“共同体数”为《1, 2, -1》, 以下“共同体数”中能让一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根的是()

A. 《3, 2, 1》

B. 《3, 4, 5》

C. 《 $n+1$, $2n$, $n-1$ 》

D. 《 $m, m, m+\frac{1}{m}$ 》

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式的意义, 根据一元二次方程根的判别式进行计算, 即可求解.

【详解】解: A. 当“共同体数”为《3, 2, 1》时, 一元二次方程为 $3x^2+2x+1=0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0,$$

$\therefore 3x^2+2x+1=0$ 没有实数根, 故该选项不符合题意;

B. 当“共同体数”为《3, 4, 5》时, 一元二次方程为 $3x^2+4x+5=0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0,$$

$\therefore 3x^2 + 4x + 5 = 0$ 没有实数根，故该选项不符合题意；

C. 当“共同体数”为《 $n+1, 2n, n-1$ 》时，一元二次方程为 $(n+1)x^2 + 2nx + n-1 = 0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4n^2 - 4 \times (n+1)(n-1) = 4 > 0,$$

$\therefore (n+1)x^2 + 2nx + n-1 = 0$ $3x^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个不相等实数根，故该选项符合题意；

D. 当“共同体数”为《 $m, m, m + \frac{1}{m}$ 》时，一元二次方程为 $mx^2 + mx + m + \frac{1}{m} = 0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times m \times \left(m + \frac{1}{m}\right) = -3m^2 - 4 < 0,$$

$\therefore mx^2 + mx + m + \frac{1}{m} = 0$ 没有实数根，故该选项不符合题意；

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的定义，由函数的定义得 $2-x \neq 0$ ，即可求解；理解函数的定义是解题的关键.

【详解】 解：由题意得

$$2-x \neq 0,$$

解得： $x \neq 2$,

故答案为： $x \neq 2$.

8. 方程 $x^2 = 3x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题考了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可，解题的关键是熟记常见的解法，直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法及正确掌握一元二次方程的解法.

【详解】 解： $x^2 = 3x$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, \quad x_2 = 3,$$

故答案为: $x_1 = 0, \quad x_2 = 3$.

9. 写出二次根式 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{x+y}$

【解析】

【分析】二次根式的有理化的目的就是去掉根号, 所以 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$.

【详解】解: $\sqrt{x+y} \times \sqrt{x+y} = (\sqrt{x+y})^2 = x+y,$

故 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$

故答案为: $\sqrt{x+y}$.

【点睛】本题考查了二次根式的有理化, 根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化. 本题二次根式有理化主要利用平方公式.

10. 已知函数 $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$, 则 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】二次根式的混合运算, 将 $x = \sqrt{2}$ 代入原式求值计算, 注意计算顺序, 先算乘除, 然后算加减.

【详解】解: $f(\sqrt{2}) = 2 \times \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

故答案为: $\sqrt{2}$

【点睛】本题考查二次根式的混合运算, 注意计算顺序, 先算乘除, 然后算加减.

11. 已知 $a < 0$, 那么 $\sqrt{9a^2}$ 可化简为_____.

【答案】 $-3a$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简, 掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

【详解】解: 原式 $= 3|a|$

$= -3a$;

故答案为: $-3a$.

12. 不等式 $\sqrt{2}x > x+1$ 的解集是_____

【答案】 $x > \sqrt{2}+1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，移项，合并同类项，一次项系数化为1，即可求解；掌握解一元一次不等式的步骤是解题的关键.

【详解】 解：移项，得 $\sqrt{2}x - x > 1$,

合并同类项，得 $(\sqrt{2}-1)x > 1$,

两边都除以 $\sqrt{2}-1$ ，得 $x > \sqrt{2}+1$;

故答案为: $x > \sqrt{2}+1$.

13. 在实数范围内因式分解: $2x^2-4x-3=$ _____.

【答案】 $2\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查实数范围内的因式分解，解题的关键是先将式子进行配方，再用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解: $2x^2-4x-3$

$$= 2\left(x^2-2x+1-1-\frac{3}{2}\right)$$

$$= 2\left[(x-1)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

故答案为: $2\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

14. 已知 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ，则代数式 a^2-6a+1 的值是 _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值、分母有理化，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

根据 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2}$ ，可以得到 $a-3$ 的值，然后将所求式子变形，再将 $a-3$ 的值整体代入计算即可.

【详解】 解： $\because a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2}$,

$$\therefore a-3 = -2\sqrt{2},$$

$$\therefore a^2 - 6a + 1$$

$$= (a-3)^2 - 8,$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - 8,$$

$$= 8 - 8,$$

$$= 0,$$

故答案为：0.

15. 如果最简根式 $\sqrt{x^2-6x}$ 与 $\sqrt{5-2x}$ 是同类二次根式，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义，由同类二次根式的定义得 $x^2-6x=5-2x$ ，即可求解；理解定义“几个二次根式，化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫同类二次根式。”是解题的关键.

【详解】 解：由题意得

$$x^2 - 6x = 5 - 2x,$$

解得： $x_1 = -1$, $x_2 = 5$,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时,

$$x^2 - 6x = -5 < 0,$$

$$\therefore x = 5 \text{ 舍去},$$

$$\therefore x = -1,$$

故答案为：-1.

16. 若点 $A(-3, a)$ 、 $B(1, b)$ 、 $C(2, c)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图像上, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为_____ (按从大到小排列).

【答案】 $a > c > b$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的值比较大小, 将各点坐标代入解析式求出 a 、 b 、 c , 比较大小, 即可求解. 熟练求函数值会比较大小是解题的关键.

【详解】 解: $\because A(-3, a)$ 、 $B(1, b)$ 、 $C(2, c)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图像上,

$$\therefore a = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3},$$

$$b = -\frac{4}{1} = -4,$$

$$c = -\frac{4}{2} = -2,$$

$$\therefore \frac{4}{3} > -2 > -4,$$

$$\therefore a > c > b;$$

故答案为: $a > c > b$.

17. 小明发明了一种用“二次根式法”来产生密码的方法, 如对于二次根式 $\sqrt{169}$ 的计算结果是 13, 则在被开放数和结果中间加上数字 0, 就得到一个密码“169013”, 则对于二次根式 $\sqrt{2.56}$, 用小明的方法产生的这个密码是_____(密码中不写小数点)

【答案】 256016

【解析】

【分析】 先计算出 $\sqrt{2.56}$, 然后根据产生密码的方法写出对应的密码即可.

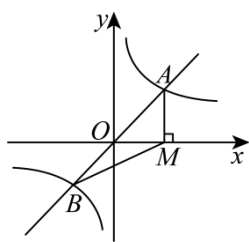
【详解】 $\sqrt{2.56} = 1.6$,

所以小明用“二次根式法”的方法产生的这个密码是 256016.

【点睛】 本题考查了二次根式的应用: 二次根式的应用主要是在解决实际问题的过程中用到有关二次根式的概念、性质和运算的方法.

18. 如图, 直线 $y = mx$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于 A 、 B 两点, 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴, 垂足为 M , 连结 BM , 若

$S_{\triangle ABM} = 2$, 则 k 的值是_____.



【答案】2

【解析】

【分析】由题意得： $S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle AOM}$ ，又 $S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|k|$ ，则 k 的值可求出.

【详解】解：设 $A(x, y)$,

$\therefore$ 直线 $y = mx$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于 A, B 两点,

$\therefore B(-x, -y)$,

$\therefore S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2}|xy|$, $S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|xy|$,

$\therefore S_{\triangle BOM} = S_{\triangle AOM}$,

$\therefore S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM} = 2S_{\triangle AOM} = 2$, $S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|k| = 1$, 则 $k = \pm 2$.

又由于反比例函数图象位于一三象限,

$\therefore k > 0$, 故 $k = 2$.

故答案为 2.

【点睛】本题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线，所得矩形面积为 $|k|$ ，是经常考查的一个知识点.

三、简答题 (本大题共 6 题，第 19-22 题各 5 分，第 23、24 各 6 分，满分 32 分)

19. 计算: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键.

根据二次根式的性质，分母有理化进行计算即可.

【详解】解: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3}$$

$$= 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3}$$

$$= 3.$$

20. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \left(3\sqrt{\frac{b}{a}}\right) (b > 0);$

【答案】 $-a^2b\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的乘除法, 根据二次根式的乘除法运算法则进行计算即可

【详解】 解: $\because b > 0$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore \frac{2}{b}\sqrt{ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \left(3\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$= \frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{3} \sqrt{ab^5 \cdot a^3b \cdot \frac{a}{b}}$$

$$= -\frac{1}{b} \sqrt{a^5b^5}$$

$$= -\frac{1}{b} \cdot a^2b^2\sqrt{ab}$$

$$= -a^2b\sqrt{ab}$$

21. 解方程: $x(x-3)=3-x.$

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先移项, 然后利用提公因式法分解因式, 再解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because x(x-3)=3-x,$

$$\therefore x(x-3)+(x-3)=0,$$

$$\therefore (x+1)(x-3)=0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得 $x_1 = -1, x_2 = 3.$

22. 用配方法解方程: $2x^2 - 3x - 6 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{57}+3}{4}, x_2 = \frac{-\sqrt{57}+3}{4}$

【解析】

【分析】用配方法解方程即可.

【详解】解: 原式移项得: $2x^2 - 3x = 6$,

二次项系数化为 1 得: $x^2 - \frac{3}{2}x = 3$,

配方得: $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 3 + \frac{9}{16}$,

整理并利用完全平方公式得: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{57}{16}$,

对方程两边同时开方得: $x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$,

解得: $x_1 = \frac{\sqrt{57}+3}{4}, x_2 = \frac{-\sqrt{57}+3}{4}$,

所以原方程的解为: $x_1 = \frac{\sqrt{57}+3}{4}, x_2 = \frac{-\sqrt{57}+3}{4}$.

【点睛】本题考查配方法解一元二次方程, 解题关键是掌握配方法解一元二次方程的步骤.

23. 已知正比例函数 $y = kx$ 图象经过点 $(2, -4)$.

(1) 求这个函数的解析式;

(2) 图象上两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 如果 $x_1 < x_2$, 比较 y_1, y_2 的大小.

【答案】(1) $y = -2x$; (2) 当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$.

【解析】

【分析】(1) 把 $(2, -4)$ 代入 $y=kx$ 中求出 k 即可得到正比例函数解析式;

(2) 根据正比例函数的性质解决问题.

【详解】(1) 把 $(2, -4)$ 代入 $y = kx$ 得 $2k = -4$, 解得 $k = -2$,

所以正比例函数解析式为 $y = -2x$;

(2) 因为 $k = -2 < 0$,

所以 y 随 x 的增大而减小,

所以当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求正比例函数解析式，也考查了正比例函数的性质.

24. 已知一元二次方程 $(a-3)x^2 - 4x + 2 = 0$.

- (1) 若方程的一个根为 $x = -1$ ，求 a 的值；
- (2) 若方程有实数根，求满足条件的正整数 a 的值.

【答案】 (1) $a = -3$

(2) 1, 2, 4, 5

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式，一元二次方程的解；

- (1) 把 $x = -1$ 代入方程求出 a 即可.
- (2) 由题意可得 $\Delta \geq 0$ ，根据不等式即可解决问题.

【小问 1 详解】

解：把 $x = -1$ 代入 $(a-3)x^2 - 4x + 2 = 0$ 得： $a - 3 + 4 + 2 = 0$,

解得 $a = -3$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 方程有实数根，

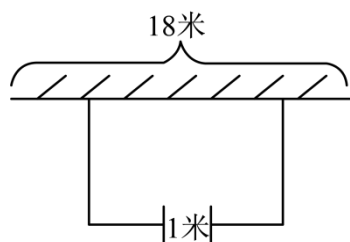
$\therefore \Delta \geq 0$ 且 $a - 3 \neq 0$ ，即 $16 - 8(a - 3) \geq 0$ 且 $a - 3 \neq 0$ ，

解得： $a \leq 5$ 且 $a \neq 3$ ，

$\therefore$ 满足条件的正整数 a 的值为 1, 2, 4, 5.

四、解答题 (本大题共 2 题，每题 8 分，共 16 分)

25. 如图，现有一个面积为 160 平方米的长方形养鸡场，鸡场的一边靠墙 (墙长 18 米)，另三边用竹篱笆围成，在与墙平行的一边，开一扇 1 米宽的门。如果竹篱笆的长为 35 米，求这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是多少？与墙平行的边长是多少？ (列方程解答)



【答案】 这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米，则与墙平行的边长是 16 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米，则与墙平行的边长是 $(36-2x)$ 米，再根据长方形面积计算公式建立方程求解即可.

【详解】解：设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米，则与墙平行的边长是 $35-2x+1=(36-2x)$ 米，由题意得， $x(36-2x)=160$,

整理得 $x^2-18x+80=0$,

解得 $x=8$ 或 $x=10$,

当 $x=10$ 时， $36-2x=16<18$ ，符合题意；

当 $x=8$ 时， $36-2x=20>18$ ，不符合题意；

$\therefore x=10$ ， $36-2x=16$ ，

答：这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米，则与墙平行的边长是 16 米.

26. 一根弹簧的长度为 10 厘米，当弹簧受到 x 千克的拉力时 (x 不超过 10)，弹簧的长度是 y (厘米)，测得有关数据如下表所示：

拉力 x (千克)	1	2	3	4	...
弹簧的长度 y ((厘米))	$10+0.5$	$10+1.0$	$10+1.5$	$10+2.0$	...

(1) 写出弹簧长度 y (厘米) 关于拉力 x (千克) 的函数解析式及函数的定义域

(2) 如果拉力是 10 千克，那么弹簧长度是多少厘米？

(3) 当拉力是多少时，弹簧长度是 13 厘米？

【答案】 (1) $y=10+0.5x$ ($0 \leq x \leq 10$)

(2) 15 厘米

(3) 6 千克

【解析】

【分析】 本题考查了求函数解析式等，理解实际意义，能根据表格得到函数解析式是解题的关键.

(1) 由表格的数据，即可求解；

(2) 当 $x=10$ 时，代入解析式，即可求解；

(3) 当 $y=13$ 时，代入解析式，即可求解；

【小问 1 详解】

解：由题意得

$$y = 10 + 0.5x \quad (0 \leq x \leq 10);$$

【小问2详解】

解：当 $x = 10$ 时，

$$y = 10 + 0.5 \times 10$$

$$= 15 \quad (\text{厘米}),$$

答：如果拉力是 10 千克，那么弹簧长度是 15 厘米；

【小问3详解】

解：当 $y = 13$ 时，

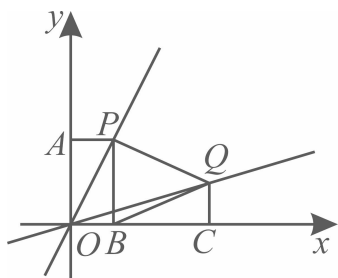
$$10 + 0.5x = 13,$$

解得： $x = 6$ ，

答：当拉力是 6 千克时，弹簧长度是 13 厘米.

五、综合题（本大题共 10 分，第 (1) 小题 2 分，第 (2) (3) 每小题各 4 分)

27 已知：如图，直线 $y = 2x$ 上有一点 $P(2, a)$ ，直线 $y = kx$ ($0 < k < 1$) 上有一点 $Q(b, 2)$.



(1) 请直接写出点 P 和点 Q 的坐标 (其中点 Q 的坐标用含 k 的代数式表示):

(2) 过点 P 分别作 $PA \perp y$ 轴， $PB \perp x$ 轴，过点 Q 分别作 $QC \perp x$ 轴，如果 $\triangle OPQ$ 的面积等于 $\triangle BPQ$ 面积的两倍，请求出 k 的值

(3) 在 (2) 的条件下，在直线 $y = 2x$ 上是否存在点 D ，使 $S_{\triangle OQD} = 12$ ？如果存在，请求出点 D 的坐标，如果不存在，请说明理由.

【答案】(1) $P(2, 4)$ ， $Q\left(\frac{2}{k}, 2\right)$

(2) $\frac{2}{3}$

(3) 存在， $(6, 12)$ 或 $(-6, -12)$

【解析】

【分析】(1) 将 P 、 Q 的坐标代入解析式，即可求解；

(2) PB 与 OQ 交 M ，由三角形面积得 $S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle OMP} + S_{\triangle QPM}$ ， $S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2}BP \cdot BC$ ，即可求解；

(3) ①当 D 在第一象限时，由 $S_{\triangle OPQ}$ 得 D 在 P 的右侧，过 D 作 $DE \perp x$ 轴交于 E ，交 OQ 于 N ，设 $D(n, 2n)$ ， $N\left(n, \frac{2}{3}n\right)$ ，由三角形面积得 $S_{\triangle OQD} = \frac{1}{2}DN \cdot OE + \frac{1}{2}CE \cdot DN$ ；②当 D 在第二象限时，连接 DQ 交 x 轴于 F ，由待定系数法得直线 DQ 的解析式为 $y = \frac{2n-2}{n-3}x - \frac{4n}{n-3}$ ，可求 $OF = \frac{2n}{n-1}$ ，由三角形面积得 $S_{\triangle OQD} = \frac{1}{2}(-y_D) \cdot OF + \frac{1}{2}OF \cdot CQ$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：对于直线 $y = 2x$ ，当 $x = 2$ 时，可有 $2 \times 2 = a$ ，

解得： $a = 4$ ，

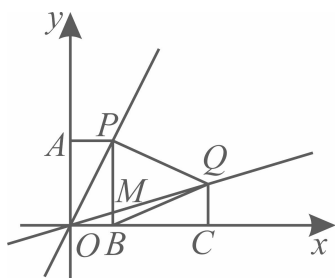
对于直线 $y = kx$ ，当 $y = 2$ 时，可有 $kx = 2$ ，

解得： $x = \frac{2}{k}$ ；

$\therefore P(2, 4)$ ， $Q\left(\frac{2}{k}, 2\right)$ ；

【小问 2 详解】

解：设 PB 与 OQ 交点 M ，如下图，



对于直线 $y = kx$ ，当 $x = 2$ 时，可有 $y = 2k$ ，

$\therefore M(2, 2k)$ ，

$\therefore P(2, 4)$ ， $Q\left(\frac{2}{k}, 2\right)$ ，

$\therefore PM = 4 - 2k$ ，

$\therefore OC = \frac{2}{k}$ ， $BC = \frac{2}{k} - 2$ ，

$$\therefore OB = 2, \quad PB = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle OMP} + S_{\triangle QPM}$$

$$= \frac{1}{2} PM \cdot OB + \frac{1}{2} PM \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} PM (OB + BC)$$

$$= \frac{1}{2} PM \cdot OC$$

$$= \frac{1}{2} (4 - 2k) \cdot \frac{2}{k}$$

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} BP \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{2}{k} - 2 \right),$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = 2S_{\triangle BPQ},$$

$$\therefore \frac{1}{2} (4 - 2k) \cdot \frac{2}{k} = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{2}{k} - 2 \right),$$

$$\text{整理得: } k = \frac{2}{3},$$

经检验 $k = \frac{2}{3}$ 是此方程的根, 故 k 的值为 $\frac{2}{3}$;

【小问 3 详解】

存在;

①当 D 在第一象限时,

由 (2) 得, $Q(3, 2)$,

$\therefore$ 直线 OQ 的解析式为 $y = \frac{2}{3}x$,

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \left(4 - 2 \times \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{2}{\frac{2}{3}} = 4 < 12,$$

$\therefore D$ 在 P 的右侧,

如图, 过 D 作 $DE \perp x$ 轴交于 E , 交 OQ 于 N ,

$$\begin{cases} nk_1 + b = 2n \\ 3k_1 + b = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = \frac{2n-2}{n-3} \\ b = -\frac{4n}{n-3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } DQ \text{ 的解析式为 } y = \frac{2n-2}{n-3}x - \frac{4n}{n-3},$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, 可有 } \frac{2n-2}{n-3}x - \frac{4n}{n-3} = 0, \text{ 解得 } x = \frac{2n}{n-1},$$

$$\therefore F\left(\frac{2n}{n-1}, 0\right),$$

$$\therefore OF = \frac{2n}{n-1},$$

$$\therefore S_{\triangle OQD} = \frac{1}{2}(-y_D) \cdot OF + \frac{1}{2}OF \cdot CQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2n}{n-1}(-2n+2)$$

$$= -2n,$$

$$\therefore -2n = 12, \text{ 解得 } n = -6,$$

$$\therefore y = 2n = -12,$$

$$\therefore D(-6, -12);$$

综上所述: D 的坐标为 $(6, 12)$ 或 $(-6, -12)$.

【点睛】 本题考查了一次函数与几何综合, 待定系数法, 能熟练利用分割法表示出三角形的面积, 并且能根据点的不同位置进行分类讨论是解题的关键.