

2024-2025 学年上海市浦东新区多校联考八年级（上）期中数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\sqrt{x+2y}$ 的一个有理化因式是（ ）

- A. $\sqrt{x-2y}$ B. $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$ C. $\sqrt{x}-\sqrt{2y}$ D. $\sqrt{x+2y}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的有理化，根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化．本题二次根式有理化主要利用平方公式．二次根式的有理化的目的就是去掉根号，所以 $\sqrt{x+2y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+2y}$ ．

【详解】解：∵ $\sqrt{x+2y} \cdot \sqrt{x+2y} = x+2y$ ，

∴ $\sqrt{x+2y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+2y}$ ，

故选：D．

2. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ B. $\sqrt{2x}$ C. $\sqrt{x^3y}$ D. $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的判定条件：①被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；②被开方数的因数是整数，因式是整式．根据最简二次根式的判定条件逐项判断即可得解

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{2x}$ 是最简二次根式，符合题意；

C、 $\sqrt{x^3y} = |x|\sqrt{xy}$ ，被开方数中含能开得尽方的因式，不是最简二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{x^2-2xy+y^2} = |x-y|$ ，被开方数中含能开得尽方的因式，不是最简二次根式，不符合题意；

故选：B．

3. 下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式（ ）

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{\frac{3}{25}}$

C. $\sqrt{0.3}$

D. $\sqrt{\frac{1}{27}}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式性质化简后，根据同类二次根式的定义进行选择即可.

【详解】A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故A不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故B不符合题意；

C、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，故C符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故D不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了同类二次根式的定义（几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式），二次根式的性质，掌握同类二次根式的定义，对二次根式进行化简，是解题的关键.

4. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是（ ）

A. $ax^2 + 2x = 0$

B. $2x^2 + \frac{1}{x} + 3 = 0$

C. $x^2 + x + 2 = 0$

D. $x^2 + \sqrt{x} + 2 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键. 根据一元二次方程的定义进行判断即可.

【详解】解：A、 $ax^2 + 2x = 0(a \neq 0)$ 是一元二次方程，故A不符合题意；

B、 $2x^2 + \frac{1}{x} + 3 = 0$ 中含有分式，不是整式，不是一元二次方程，故B不符合题意；

C、 $x^2 + x + 2 = 0$ 是一元二次方程，故C符合题意；

D、 $x^2 + \sqrt{x} + 2 = 0$ 不是一元二次方程，故D不符合题意.

故选：C.

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x + k = 0$ 有两个相等实数根，则 k 的值是 ()

- A. -4 B. 4 C. -2 D. 2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查根的判别式，熟练掌握公式是解题的关键。根据题意得到 $\Delta = 0$ 进行计算即可。

【详解】 解：由题意可得： $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4k = 0$

解得 $k = 4$ ，

故选 B.

6. 下列命题中，其逆命题是真命题的是 ()

- A. 对顶角相等 B. 全等三角形对应角相等
C. 两个全等三角形的面积相等 D. 两直线平行，内错角相等

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查命题与定理，熟练掌握命题与逆命题的概念和相关定理是解题的关键。

交换原命题的题设和结论部分得到四个命题的逆命题，然后根据对顶角的定义、平行线的判定、全等三角形的判定进行判定即可。

【详解】 解：A、对顶角相等的逆命题是相等的角是对顶角，逆命题是假命题，不符合题意；

B、全等三角形对应角相等的逆命题是对应角相等的三角形是全等三角形，逆命题是假命题，不符合题意；

C、两个全等三角形的面积相等的逆命题是面积相等的三角形是全等三角形，逆命题是假命题，不符合题意；

D、两直线平行，内错角相等的逆命题是内错角相等，两直线平行，逆命题是真命题，符合题意；

故选：D.

二、填空题 (每题 2 分，共 24 分)

7. 如果 $\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ 有意义，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > -1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件、分式有意义的条件，由题意得出 $a+1 > 0$ ，求解即可，熟练掌握二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件是解此题的关键。

【详解】 解：由题意得： $a+1 > 0$ ，

解得： $a > -1$ ，

故答案为: $a > -1$.

8. 化简: $\sqrt{18a^2b^3} (a < 0) =$ _____.

【答案】 $-3ab\sqrt{2b}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件、利用二次根式的性质进行化简, 先由二次根式有意义的条件得出 $b \geq 0$, 再根据二次根式的性质化简即可, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: $\because 18a^2b^3 \geq 0, a < 0,$

$\therefore b \geq 0,$

$\therefore \sqrt{18a^2b^3} = 3|a|b\sqrt{2b} = -3ab\sqrt{2b}.$

故答案为: $-3ab\sqrt{2b}.$

9. 分母有理化: $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} =$ _____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化, 分子分母同乘 $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ 计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$

10. 不等式 $\sqrt{3}x - \sqrt{6} > \sqrt{2}x$ 的解集是__.

【答案】 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ ## $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 移项，合并同类项，系数化成 1，再分母有理化即可.

【详解】 解： 移项得 $\sqrt{3}x - \sqrt{2}x > \sqrt{6}$,

合并同类项，得 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x > \sqrt{6}$,

系数化成 1，得 $x > \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$,

故答案为： $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式. 注意： 解一元一次不等式的步骤是： 去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化成 1. 注意分母有理化.

11. 如果 $\sqrt{x+5}$ 与 $\sqrt{x^2+6x-1}$ 是同类二次根式，那么 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义、二次根式有意义的条件，根据题意得出 $x+5 = x^2+6x-1$ ，求解即可得出 x 的值，再结合二次根式有意义的条件判断即可得解.

【详解】 解： 由已知，得 $x+5 = x^2+6x-1$,

解得 $x = -6$ 或 1 ,

当 $x = -6$ 时， $x+5 = -1 < 0$ ，不合题意，

$\therefore x = 1$.

故答案为： 1.

12. 方程 $x^2 = \frac{1}{2}x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 解： $x^2 = \frac{1}{2}x$,

$$x^2 - \frac{1}{2}x = 0,$$

$$x\left(x-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$x=0 \text{ 或 } x-\frac{1}{2}=0,$$

所以 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$,

故答案为: $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$.

13. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m^2+2m-3=0$ 有一根为 0, 则 m 的值是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】把 $x=0$ 代入方程即可得到一个关于 m 的方程，即可求得 m 的值.

【详解】根据题意得： $m^2+2m-3=0$ 且 $m-1 \neq 0$

解得: $m = -3$

故答案是: -3 .

14. 在实数范围内因式分解: $2x^2 - 2x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

【解析】

【分析】先在实数范围内提公因式得： $2\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)$ ，然后利用配方法以及平方差公式将括号里的进行因

式分解变形得出答案

【 详 解 】

$$2x^2 - 2x - 1 = 2\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] =$$

$$2\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

故答案为 $2\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

【点睛】 本题主要考查了因式分解的基本方法, 熟练掌握相关方法是关键

15. 当 $k =$ _____ 时, 关于 x 的方程 $4x^2 - (k+3)x + k = 1$ 有两个相等的实数根.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 将根的判别式转化为方程是解题的关键. 由于方程有两个相等的实数根, 则方程为一元二次方程, 令根的判别式 $\Delta = 0$, 解方程即可.

【详解】 解: 原方程可变形为 $4x^2 - (k+3)x + k - 1 = 0$.

$\therefore$ 方程 $4x^2 - (k+3)x + k = 1$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [-(k+3)]^2 - 4 \times 4 \times (k-1) = k^2 - 10k + 25 = 0,$$

解得: $k = 5$.

故答案为: 5.

16. 为加快上海家电以旧换新速度, 某商场对一台原价 4000 元的电视进行调价, 经过两次降价后, 价格调整为 2560 元, 如果每次降低的百分率相同, 则这个百分率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 增长率问题, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

设这个百分率为 x , 根据该商品的原价及经过两次降价后的价格, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 检验后可得出结论.

【详解】 解: 设这个百分率为 x ,

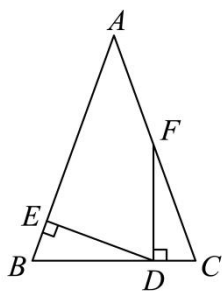
根据题意得: $4000(1-x)^2 = 2560$,

解得: $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = 1.8$ (不符合题意, 舍去),

$\therefore$ 这个百分率为 20%.

故答案为: 20%.

17. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$, D 是边 BC 上一点, $DE \perp AB$, 垂足为点 E , $DF \perp BC$, 垂足为点 D , DF 交边 AC 于点 F , 当 $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle DFA =$ _____ 度.



【答案】 160

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和定理、垂线的定义，由三角形内角和定理得出

$\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 70^\circ$ ，由垂线的定义得出 $\angle CDF = 90^\circ$ ，再由三角形内角和定理得出 $\angle CFD = 20^\circ$ ，即可得解.

【详解】 解： $\because \angle B = \angle C$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 70^\circ,$$

$$\because DF \perp BC,$$

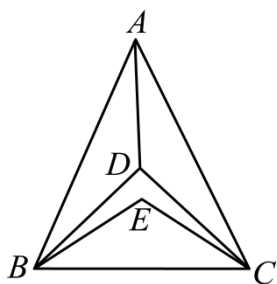
$$\therefore \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = 180^\circ - \angle C - \angle CDF = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle DFA = 180^\circ - \angle CFD = 160^\circ.$$

故答案为： 160.

18. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 $\triangle ABC$ 内部，且 $AD = DB = DC$ ，点 E 是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 角平分线的交点，若 $\angle BAC = \alpha$ ，则 $\angle BDC + \angle BEC =$ _____. (用含 α 的式子表示)



【答案】 $90^\circ + \frac{5}{2}\alpha$

【解析】

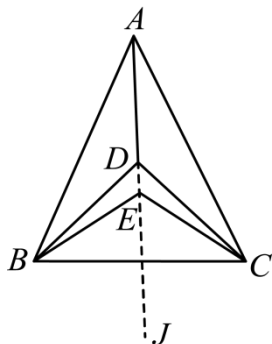
【分析】 本题考查了三角形内角和定理、角平分线的定义、三角形外角的定义及性质、等边对等角，延长 AD 到 J ，由等边对等角结合三角形外角的定义及性质可得

$$\angle BDC = \angle BDJ + \angle CDJ = 2\angle DAB + 2\angle DAC = 2(\angle DAB + \angle DAC) = 2\alpha，$$
再由角平分线的定义可得

$\angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle ECB = \frac{1}{2} \angle ACB$, 有三角形内角和定理得出

$\angle BEC = 180^\circ - (\angle EBC + \angle ECB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha$, 即可得解.

【详解】解: 如图, 延长 AD 到 J .



$\therefore DA = DB = DC$,

$\therefore \angle DAB = \angle DBA$, $\angle DAC = \angle DCA$,

$\therefore \angle BDJ = \angle DAB + \angle DBA$, $\angle CDJ = \angle DAC + \angle DCA$,

$\therefore \angle BDC = \angle BDJ + \angle CDJ = 2\angle DAB + 2\angle DAC = 2(\angle DAB + \angle DAC) = 2\alpha$,

$\therefore$ 点 E 是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 角平分线的交点,

$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle ECB = \frac{1}{2} \angle ACB$,

$\therefore \angle BEC = 180^\circ - (\angle EBC + \angle ECB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha$,

$\therefore \angle BDC + \angle BEC = 2\alpha + 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha = 90^\circ + \frac{5}{2} \alpha$.

故答案为: $90^\circ + \frac{5}{2} \alpha$.

三、解答题 (19 题 12 分; 20 题 12 分; 21 题至 24 题每题 6 分; 25 题 10 分; 共 58 分)

19 计算:

$$(1) \sqrt{27} - \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{18} \div \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}};$$

$$(2) x\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{y} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}.$$

【答案】(1) $3\sqrt{3} + 6 + \frac{11\sqrt{6}}{4}$

(2) y

【解析】

【分析】此题主要考查二次根式的混合运算，解题的关键是熟知其运算法则.

(1) 先计算二次根式除法和化简二次根式，再计算二次根式加减法即可；

(2) 先化简二次根式和计算二次根式除法，再计算二次根式加减法即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{27} - \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{18} \div \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 3\sqrt{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 6 + 3\sqrt{6} \\ &= 3\sqrt{3} + 6 + \frac{11\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & x\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{y} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \\ &= \sqrt{xy} - \sqrt{y} \cdot \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \sqrt{xy} - \sqrt{y} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \sqrt{xy} - \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y \\ &= y.\end{aligned}$$

20. 解方程:

$$(1) \quad 3x(x-1) = 2(1-x);$$

$$(2) \quad x^2 + 4x - 2 = 0.$$

【答案】(1) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

$$(2) \quad x_1 = -2 + \sqrt{6}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{6}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，解题关键是熟练掌握解一元二次方程的常用方法，如直接开方法、配方法、公式法、因式分解法等.

(1) 将原方程整理为 $(x-1)(3x+2)=0$ ，运用因式分解法求解即可；

(2) 按照移项，配方的步骤将原方程转化为 $(x+2)^2=6$ ，运用配方法求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 3x(x-1)=2(1-x),$$

$$3x(x-1)+2(x-1)=0,$$

$$(x-1)(3x+2)=0,$$

$$x-1=0 \text{ 或 } 3x+2=0,$$

$$\therefore x_1=1, \quad x_2=-\frac{2}{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } x^2+4x-2=0,$$

$$x^2+4x=2,$$

$$x^2+4x+4=6,$$

$$(x+2)^2=6,$$

$$\therefore x+2=\pm\sqrt{6},$$

$$\therefore x_1=-2+\sqrt{6}, \quad x_2=-2-\sqrt{6}.$$

21. 已知 $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}$ 的值.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简求值，分母有理化，先化简 a 和 b ，求出 $a+b=2\sqrt{5}$ ， $ab=1$ ，代入化简后的式子计算即可，熟练掌握其相应的运算法则是解决此题的关键.

$$\text{【详解】} \therefore a = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}+2, \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2,$$

$$\therefore a+b=2\sqrt{5}, \quad ab=5-4=1,$$

$$\therefore \frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}$$

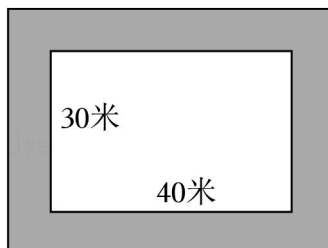
$$= \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{ab}{a+b}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

22. 在长为 40 米，宽为 30 米的矩形景观水池的外围四周铺设一个宽均等的绿化带，且绿化带和景观水池的面积之比为 2:3，求绿化带的宽.



【答案】 绿花带的宽为 5 米

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，读懂题意，根据题意列出方程是解本题的关键.

设绿花带的宽为 x 米，算出矩形景观水池的面积，从而得出绿化带的面积，根据面积公式，即可列出方程，从而求出符合条件的解.

【详解】 解：设绿花带的宽为 x 米.

矩形景观水池的面积： $40 \times 30 = 1200$ (平方米),

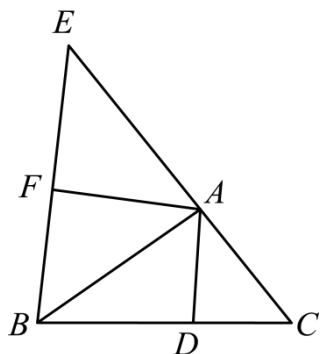
绿化带的面积： $1200 \times \frac{2}{3} = 800$ (平方米),

$$\therefore (40+2x)(30+2x)-1200=800,$$

解得： $x=5$ 或 $x=-40$ (舍去),

$\therefore$ 绿花带的宽为 5 米.

23. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $BE \parallel AD$, 交 CA 延长线交于点 E , F 是 BE 的中点, 求证: $AF \perp BE$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查等腰三角形的性质和判定、平行线的性质, 掌握相关知识并灵活应用是解题的关键. 由 AD 平分 $\angle BAC$, 得到 $\angle BAD = \angle CAD$, 根据平行线的性质得到 $\angle E = \angle DAC$, $\angle ABE = \angle BAD$, 等量代换得到 $\angle E = \angle ABE$, 于是得到 $AE = AB$, 根据等腰三角形的性质即可得到结论.

【详解】证明: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\because BE \parallel AD$,

$\therefore \angle E = \angle DAC$, $\angle ABE = \angle BAD$,

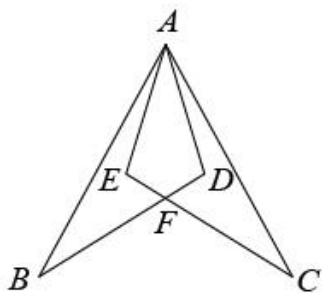
$\therefore \angle E = \angle ABE$,

$\therefore AE = AB$,

$\because F$ 是 BE 的中点,

$\therefore AF \perp BE$.

24. 已知如图, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAE = \angle CAD$, BD 与 CE 相较于点 F , 求证: $FB = FC$



【答案】证明见详解

【解析】

【分析】连接 BC , 由已知条件证得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 从而证得 $\angle ABD = \angle ACE$. 要证 $FB = FC$, 可

利用等式性质来证得.

【详解】证明：连接 BC .

$$\therefore \angle BAE = \angle CAD ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle EAD = \angle CAD + \angle DAE ,$$

$$\text{即 } \angle BAD = \angle CAE .$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS) .$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE .$$

$$\therefore AB = AC ,$$

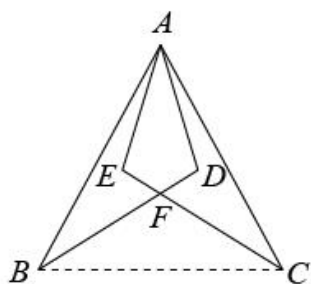
$$\therefore \angle ABC = \angle ACB .$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE ,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle ACB - \angle ACE ,$$

$$\text{即 } \angle FBC = \angle FCB .$$

$$\therefore FB = FC .$$



【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质以及全等三角形的判定和性质，证得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 而得到 $\angle ABD = \angle ACE$ 是解题的关键.

25. (1) 课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB = 14$ ， $AC = 8$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围.

小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法（如图 1）.

①延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ；

②再联结 BE ，可得 $\triangle DBE \cong$ _____，从而把 AB 、 AC 、 $2AD$ 转化在 $\triangle ABE$ 中；

③利用全等三角形性质和三角形三边关系可得 _____ $< AE <$ _____，则 AD 的取值范围是： _____（在

横线上填空).

感悟: 解题时, 条件中若出现“中点”“中线”等条件, 可以考虑倍长中线, 构造全等三角形, 把分散的已知条件和所求证的结论转化到同一个三角形中.

(2) 思考: 已知, 如图 2, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AB = AF$, $AC = AE$, $\angle BAF = \angle CAE = 90^\circ$ (点 F 和点 E 在 BC 同侧), 试探究线段 AD 与 EF 的数量和位置关系并加以证明.

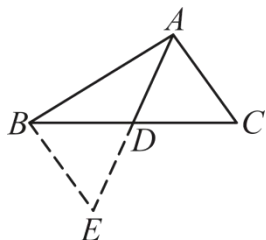


图1

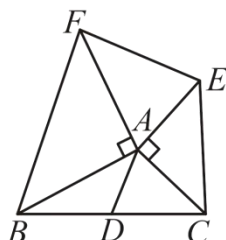


图2

【答案】 (1) $\triangle DCA$, $AB - AC$, $AB + AC$, $3 < AD < 11$; (2) $2AD = EF$, $AD \perp EF$, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质、三角形三边关系、等腰三角形的性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 根据全等三角形的判定和性质以及三角形的三边关系即可得到结论;

(2) 延长 AD 至 H , 使 $DH = AD$, 连接 CH , 由 (1) 可得 $\triangle ABD \cong \triangle HCD$, 由全等三角形的性质得出 $\angle BAD = \angle H$, $AB = CH$, 证出 $\angle ACH = \angle EAF$, 证明 $\triangle ACH \cong \triangle EAF$ (SAS), 得出 $AH = EF$, $\angle HAC = \angle AEF$, 推出 $2AD = EF$. 延长 DA 交 EF 于 G , 求出 $\angle AGE = 90^\circ$, 即可得解.

【详解】 解: (1) 延长 AD 到 E , 使得 $DE = AD$,

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD = CD$,

在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DCA$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle BDE = \angle CDA, \\ DE = DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCA$ (SAS),

$\therefore BE = AC = 8$,

$\because AB - BE < AE < AB + BE$,

$\therefore AB - AC < AE < AB + AC$, $14 - 8 < AE < 14 + 8$,

$\therefore 3 < AD < 11$,

故答案为： $\triangle DCA$ ， $AB - AC$ ， $AB + AC$ ， $3 < AD < 11$ ；

(2) $2AD = EF$ ， $AD \perp EF$ ， 理由如下：

延长 AD 至 H ， 使 $DH = AD$ ， 连接 CH ， 如图 2 所示：

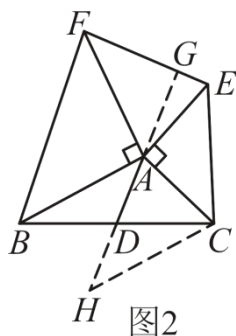


图2

由 (1) 得： $\triangle ABD \cong \triangle HCD$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle H$ ， $AB = CH$ ，

$\because \angle BAF = \angle CAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle EAF = 180^\circ$ ， 即 $\angle BAD + \angle CAD + \angle EAF = 180^\circ$ ，

$\because \angle H + \angle CAD + \angle ACH = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ACH = \angle EAF$ ，

$\because \triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AB = AF$ ， $AC = AE$ ，

$\therefore CH = AF$ ，

在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases} CH = EF \\ \angle ACH = \angle EAF, \\ AC = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACH \cong \triangle EAF$ (SAS)，

$\therefore AH = EF$ ， $\angle HAC = \angle AEF$ ，

$\therefore 2AD = EF$ 。

延长 DA 交 EF 于 G ，

$\because \angle EAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle HAC + \angle EAG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF + \angle EAG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AGE = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \perp EF$ 。

